

ある種の代数的システムに付随する無限行列の性質

山梨大 エ 内村桂輔 (Keisuke Uchimura)

1. はじめに

次のような代数的システムを考える。これは文脈自由文法と考えるも良い。

$$X = a_0(x) X^k + a_{k-1}(x) X + a_k(x), \quad (1.1)$$

$$a_0(x), a_k(x) \in x \mathbb{R}[x], \quad a_{k-1}(x) \in x \mathbb{R}.$$

この文脈自由文法からプッシュダウンオートマトンを作る。そのプッシュダウンオートマトンのコンフィギュレーションを“状態”と考えるとそれは無限状態オートマトンになる。その無限個の状態に順番をつけ、そのオートマトンの *incidence* 行列を考える ([2] 参照)。この行列を A とし次のことを示す。(a) A の n 次の *truncation* の固有値はある代数曲線上に *dense* に分布する。(b) A が非負行列の時、 A と $(1, 1)$ の判別式との間に *Perron-Frobenius* 定理が成り立つ。(c) (a) と (b) の情報科学への応用を示す。

2. Truncationの固有値

まず、次の代数的システムを考えよう。

$$X = a_0(x)X^k + a_1(x)X^{k-1} + \cdots + a_k(x) \quad (2.1)$$

(2.1)に付随する無限行列を A とする。 A の最初の n 行 n 列より作られる有限行列を A の n 次の truncation といい、 A_n であらわす。

(2.1)に付随する無限オートマトンにおいて、 X が 1 番目の状態で X^2 が $m+1$ 番目の状態であると仮定する。

補題 2.1. $1 \leq j \leq m-1, 1 \leq n$ に対し、

$$\det(E_{m(n-1)+j} - xA_{m(n-1)+j}) = \det(E_{m(n-1)+1} - xA_{m(n-1)+1}),$$

$$\widetilde{(E_{mn+j} - xA_{mn+j})_{(1,1)}} = \det(E_{(n-1)m+1} - xA_{(n-1)m+1}).$$

ここで、 $\widetilde{M}_{(1,1)}$ は行列 M の $(1,1)$ の余因子をあらわし、 E_n は n 次の単位行列をあらわす。

そこで、 $d_n(x) = \det(E_{m(n-1)+1} - xA_{m(n-1)+1})$ とおく。

また、 $P_{\{1,2, \dots, mn+j\}}(1,1)(x) = d_n(x)/d_{n+1}(x)$ が成り立つ。

$P_{\{1,2, \dots, mn+j\}}(1,1)(x)$ は (2.1)に付随する無限オートマトンにおいて、状態 $1, 2, \dots, mn+j$ のみを通り状態 1 から状態 1 に行く道に対応する generating function である。この generating function に関しては [1] を御参照ください。

補題 2.2.

$$d_{n+r}(x) = (1 - a_{r-1})d_{n+r-1}(x) - [a_{r-2}a_r d_{n+r-2}(x) + a_{r-3}a_r^2 d_{n+r-3} + \cdots + a_0 a_r^{r-1} d_n(x)],$$

$$d_0 = 1, \quad d_{-1} = d_{-2} = \cdots = d_{-r+1} = 0.$$

これ以降は式(2.1)の特殊な場合である次式をとり扱うことになる。

$$X = a_0(x)X^r + a_{r-1}(x)X + a_r(x).$$

ここでは便宜的に次の記法を使う。

$$a_0(x)X^r + a_{r-1}(x)X + a_r(x) = 0, \quad (2.2)$$

$$a_0(x), a_r(x) \in x/\mathbb{R}[x], \quad a_{r-1}(x) = cX - 1, \quad (c \in \mathbb{R})$$

ここで、 $D(x)$ を(2.2)の X についての判別式とする。すなわち

$$D(x) = a_0^{2r-2} \prod_{i < j} (y_i(x) - y_j(x))^2,$$

$y_j(x)$ は(2.2)の解。そして、

$$\tilde{D}(x) = D(x)/a_0^{r-2} \text{ とおく。}$$

また $D^*(x) = a_{r-1}^r$ とする。

(2.2)式についての $d_n(x)$ を変形して

$$d_n^*(x) = d_n(x)/(-a_{r-1}(x))^n \text{ とおく。}$$

この時補題2.2より次の漸化式が成り立つ。

$$d_{n+k}^* = d_{n+k-1}^* - [(-1)^{\binom{k+1}{2}} \tilde{D}/D^* + (k-1)^{k-1}/k^k] d_n^*$$

$z = \tilde{D}(x)/D^*(x)$ とおき、 $d_n^*(x)$ の変数を z にかえたものを $\tilde{d}_n(z)$ とする。すると、

$k \equiv 0, 3 \pmod{4}$ の時

$$\tilde{d}_{n+k}(z) = \tilde{d}_{n+k-1}(z) - [z + (k-1)^{k-1}/k^k] \tilde{d}_n(z).$$

$k \equiv 1, 2 \pmod{4}$ の時

$$\tilde{d}_{n+k}(z) = \tilde{d}_{n+k-1}(z) - [-z + (k-1)^{k-1}/k^k] \tilde{d}_n(z).$$

$$\tilde{d}_0 = \tilde{d}_1 = \dots = \tilde{d}_{k-1} = 1. \quad \text{となる。}$$

これ以降は $k \equiv 0, 3 \pmod{4}$ の場合だけを取り扱うことにする。他の場合も同様である。

補題 2.3. k 以上の n に対し、 $\tilde{d}_n(z)$ のゼロ点は正であり、 $\tilde{d}_n(z)$ と $\tilde{d}_{n+1}(z)$ のゼロ点は互いに分離しあう。

$$C_+ = \{x \in \mathbb{C} \mid \exists z > 0, \tilde{D}(x) = D^*(x) \times z\} \text{ とおく。}$$

命題 2.1. $k \equiv 0, 3 \pmod{4}$ とする。この時 $d_n(x)$ のゼロ点は全て C_+ 上にある。

C_+ は定義より明らかに、代数曲線の組である。

命題 2.2. 複素数 x について、 x が C_+ の要素である必要十分条件は、 $\lim_{n \rightarrow \infty} (d_n(x)/d_{n+1}(x))$ が収束しないことである。

(2.2) に付随する無限オートマトンに対し、 X から $X \setminus \emptyset$ の道の数に対応する generating function を $P(1,1)(x)$ とし、これを解析接続した関数を $\bar{P}(1,1)(x)$ とおく。

命題 2.3. C_+ に属さない複素数 x について、

$$\lim_{n \rightarrow \infty} d_n(x)/d_{n+1}(x) = \bar{P}(1,1)(x)$$

補題 2.4. $F_n(z) = \tilde{d}_n(z)/\tilde{d}_{n+1}(z)$ とおく。 G を $\tilde{d}_n(z)$ 達の全てのゼロ点の集合から正の距離のある、複素平面上の有界集合とする。この時、任意の負数 ε_0 に対し、定数 k_0 が存在して、任意の G の元 z_0 に対し、

$$|F_n(z)| \leq k_0 |F_n(z_0)|.$$

ここで、次の定理を使う。

定理 (Vitali). $\{f_n\}$ を複素平面の開領域 G で正則な、解析関数の列とする。もし $\{f_n\}$ が G で一様に有界で、 G に集積点を持つ G の部分集合 E で $\{f_n\}$ が収束するならば、 $\{f_n\}$ は G で収束する。

命題 2.1, 命題 2.2, 補題 2.4 と上の定理より次の定理が導かれる。

定理 2.1. $W = \{y \in \mathbb{C} \mid y \text{ はある } d_n(x) \text{ のゼロ点}\}$ とおく。すると集合 W は集合 \mathbb{C}_+ 上で dense である。

3. Perron - Frobenius 定理.

次に、無限オートマトンに付随する行列が非負行列の場合を考えよう。すなわち、式(2.2)で $a_0(x), a_{k-1}(x)+1, a_k(x)$ が $x \in \mathbb{R}_+[x]$ に属する場合を考える。

n 次の非負行列 B に対し、 $f_B(x) = \det(E_n - xB)$ とおく。 $f_B(x)$ のゼロ点は、行列 B の 0 以外の固有値の逆数になっている。 $\det(xE_n - B) = x^n f_B(1/x)$ 。

この時、Perron-Frobenius 定理 (の一部) は次のようになる。

(1). $f_B(x)$ には正のゼロ点 r (フロベニウス根の逆数) が存在して、 y を $f_B(x)$ の任意のゼロ点とする時、不等式

$$r \leq |y|$$

が成り立つ。

(2). $0 < x < r$ ならば、 $(E_m - xB)^{-1}$ が存在して、正行列となる。

(3). 非負行列 B に付随する有限グラフの周期を d とする。

この時 $|y| = r$ となる $f_B(x)$ のゼロ点は丁度 d 個あり、それらは $re^{i2\pi k/d}$ ($k = 0, 1, \dots, d-1$) である。

(4). (3). で述べた d 個のゼロ点は $f_B(x)$ の単純ゼロ点である。

この論文では、式(2.2)から無限オートマトン(無限グラフ)を作り、その incidence 行列としての無限行列を考えた。この無限行列に対し、上の Perron-Frobenius 定理と同様の結果が成り立つ。その際、有限次行列の特性多項式の類似物 $f_B(x)$ の役目は、式(2.2)の判別式 $D(x)$ を変形して得られた、 $\tilde{D}(x)$ がうけもつ。

(2.2) に付随する無限行列を A とする。

定理 3.1.

- (1). $\widehat{D}(x)$ には正のゼロ点 r が存在して、 y を $\widehat{D}(x)$ の任意のゼロ点とする時、不等式 $r \leq |y|$ が成り立つ。
- (2). $0 < x < r$ ならば、 $(E - xA)^{-1}$ が存在して、それは正行列 $(P(i, j)(x))$ に等しい。
- (3). 非負行列 A に付随する無限グラフの周期を d とする。このとき、 $|y| = r$ となる $\widehat{D}(x)$ のゼロ点 y は丁度 d 個あり、それらは $re^{i2\pi k/d}$ ($k = 0, 1, \dots, d-1$) である。
- (4). (3)で述べた d 個のゼロ点は $\widehat{D}(x)$ の単純ゼロ点である。

これとは別に、命題 2.3 を使うと次の定理が得られる。

定理 3.2. (2.2)の解のうち各言語に対応する解を $P(x, \lambda)(x)$ とする。 $P(x, \lambda)(x)$ の収束半径は定理 3.1の r である。また、 $C_+ \cap \{x \in \mathbb{C} \mid |x| < r\} = \emptyset$ が成り立つ。

この定理は有限次の Perron - Frobenius 定理の(1).に、定理 3.1 とは別のいみで対応している。

定理 3.1 は次の方程式に付随する無限行列に対しても成り立つ。

$$X = a_0(x)X^k + a_{k-1}(x)X + a_k(x),$$

$$a_0(x), a_{k-1}(x), a_k(x) \in x\mathbb{R}_+[x].$$

4. 応用

4.1. 言語のエントロピー

$L \subset \Sigma^*$ を言語とする。 $U(n)$ を L 中の長さ n の語の数とする。

$$H := \log \left(\limsup_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{U(n)} \right)$$

を言語のエントロピーという。これは Shannon の定義した channel capacity を、言語の場合にあてはめたものである。

$f_L(z) = \sum_{n=1}^{\infty} U(n) z^n$ を考え、その収束半径を r とすると、 $H = -\log r$ となる。

ここで、 $G = (V, \Sigma, P, \sigma)$ を unambiguous CF grammar とする。 Σ の各元を x でおきかえて、次の代数的システムを得る場合を考える。

$$X = a_0(x) X^k + a_{k-1}(x) X + a_k(x) \quad (4.1)$$

$$a_0(x), a_k(x) \in x\mathbb{N}[x], \quad a_{k-1}(x) \in x\mathbb{N}.$$

すると $f_{L(G)}(z)$ は (4.1) の一つの解があり、定理 3.2 より、その収束半径は (4.1) から決まる $\tilde{D}(x)$ のゼロ点中、最小の正数に等しいことがわかる。それゆえ、言語 $L(G)$ のエントロピーが求められる。

4.2. Dyck 言語

$$X = xX^2 + x \quad (4.2)$$

は Dyck 言語 D_1 に対応する。(4.2) に付随する無限行列を A とし、 n 次の truncation を A_n とすると

$$d_n(x) = \det(E_n - xA_n) = x^n S_n(1/x),$$

ここで、 $S_n(y)$ は第 2 種チェビシェフ多項式となる。

A_{n+1} を考えるということは、(4.2) に付随する無限オートマトンを有限で打ち切ることに対応する。

$$X \begin{array}{c} \xrightarrow{x} \\ \xleftarrow{x} \end{array} X^2 \begin{array}{c} \xrightarrow{x} \\ \xleftarrow{x} \end{array} \cdots \begin{array}{c} \xrightarrow{x} \\ \xleftarrow{x} \end{array} X^{n+1}$$

$a(k, t, n)$ を t 文字上の Dyck 言語の語でその深さが n 以下で長さが $2k$ のものの数とする。すると、 $a(k, 1, n)$ の母関数は次のようになる。

$$\sum_{k=0}^{\infty} a(k, 1, n) x^{2k} = P_{[1, \dots, n+1]}(1, 1)(x).$$

補題 2.1 のあとの注意より次式が得られる。

$$P_{[1, \dots, n+1]}(1, 1)(x) = d_n(x)/d_{n+1}(x) = S_n(1/x)/(xS_{n+1}(1/x)).$$

さらに、一般に次の式が成り立つ。

$$\sum_{k=1}^{\infty} a(k, t, n) x^{2k} = S_n(1/(\sqrt{t}x))/(\sqrt{t}x S_{n+1}(1/(\sqrt{t}x))).$$

$$\text{次に } X = \frac{1}{3}xX^2 + \frac{1}{3}xX + \frac{1}{3}x \quad (4.3)$$

を考えよう。深さは十分深い制限がある場合を考えよう。

$$\begin{array}{ccccccc} X & \xrightarrow{\frac{1}{3}x} & X^2 & \xrightarrow{\frac{1}{3}x} & X^3 & \xrightarrow{\frac{1}{3}x} & \dots & \xrightarrow{\frac{1}{3}x} & X^n \\ \frac{1}{3}x \curvearrowright & \frac{1}{3}x & \frac{1}{3}x \curvearrowright & \frac{1}{3}x & \frac{1}{3}x \curvearrowright & \frac{1}{3}x & & \frac{1}{3}x & \frac{1}{3}x \curvearrowright \end{array} \quad (4.4)$$

ここで、 X^i から X^j への推移のようすを考える。そのために(4.4)に付随する行列 A_n を考える。一般に次の式が成り立つ。

$$A_n^t = r_n^t W_n U_n^t + O(t^{m_2-1} |\lambda_2|^t) \quad (4.5)$$

ここで r_n は A_n のフロベニウス根、 $W_n [U_n]$ は A_n の r_n に対する右[左]固有ベクトルで $WU=1$ を満たすもの。 λ_2 は絶対値が2番目に大きい固有値、 m_2 は λ_2 の重複度である。(4.3)に付随する無限行列 A を考える。 A に対する定理3.1の r はその定理より1であることがわかり、定理2.1より r_n は1に十分近い。定理2.1より $|\lambda_2|$ も1に十分近いことがわかる($|\lambda_2| < r_n < 1$)。補題2.3を使えば、 $m_2=1$ であることがわかる。また、 $W_n [U_n]$ の第 l 成分は A の右[左]固有ベクトル $W [U]$ の第 l 成分に十分近くなることがわかる。

$W^t = U = C_0 (1, 2, 3, \dots, l, \dots)$ であることは容易に確かめられる。そこで、 $n=2m$ の時に A_n^t の近似値を求める。 $(n$ が奇数の時も同様)。 A_n の形より

$$W_{2m}^t = U_{2m}^t \doteq (1, 2, \dots, m, m, \dots, 2, 1) / \sqrt{m(m+1)(2m+1)^3}$$

となることがわかる。

ゆえに、 n が十分大きいとき次のようになる。

$$A_{2m}^{\mathbb{R}} \doteq 3/(m(m+1)(2m+1)) [a_{ij}],$$

$$a_{ij} = ij \quad \text{if } 1 \leq i, j \leq m$$

$$= (2m+1-i)j \quad \text{if } 1 \leq j \leq m < i \leq 2m$$

$$= i(2m+1-j) \quad \text{if } 1 \leq i \leq m < j \leq 2m$$

$$= (2m+1-i)(2m+1-j) \quad \text{if } m < i, j \leq 2m.$$

文 献

1. K. Uchimura, Properties of structure generating functions of automata and their applications for linear systems, Theoret. Comput. Sci. 18(1982) 207-220.
2. K. Uchimura, Spectra of infinite incidence matrices of infinite automaton constructed from specific CF grammars, preprint.
3. K. Uchimura, Perron-Frobenius Theory of discriminants of some algebraic equations associated with some CF grammars, preprint.