数理解析研究所講究録
第 505 巻 1983 年 46-52

Thom複体のJames数

東理大・理工　田中隆一 (Ryuichi Tanaka)

§0. 序

Xを連結有限CW複体、ξをX上のn次元実ベクトル束とするとき、そのThom複体X^{ξ}は球面$S^n=(pt)^n$を部分複体にもつ。$i: S^n \to X^{\xi}$を包含写像とするとき、iがinduceする安定コホモトピー群の準同型$i^*: \{X^{\xi}, S^n\} \to \{S^n, S^n\} \cong \mathbb{Z}$のimageの非負生成元を$d(X,\xi)$で表す。$d(X,\xi)$は$X^{\xi}$にstableに拡張できる写像$S^n \to S^n$の次数($\geqq 0$)の最小数に他ならない。例えば$X=FP^{k-1}$ (F上の$k-1$次元射影空間、$F=\mathbb{C}$ or $\mathbb{H}$)、$\xi = n\eta$ (FP^{k-1}上のcanonical line bundle ηのn重和)の場合は、$(FP^{k-1})^{n\eta} = FP^{k+n-1}/FP^{n-1}$であるから$d(FP^{k-1}, n\eta)$は大嶋さんの計算したJames数$F\{n,k\}$である([O])。

ξがζと安定fibre homotopy同値($J(\xi)=J(\zeta)$)のとき、X^{ξ}とX^{ζ}は安定homotopy同値であるから関数$d(X,-): \widetilde{KO}(X) \to \mathbb{Z}$は$\widetilde{KO}(X) \to J(X) \to \mathbb{Z}$と分解する。この関数の性質

を調べるのが目標である。尚、結果は既に [T] で報告したものであるが、同じ結果が Dibag [D] によっても得られている。

§1. 結果

写像 $f: X^{\xi} \to S^n$、$g: X^{\zeta} \to S^m$ に対して合成

$X^{\xi+\zeta} \xrightarrow{\Delta} (X\times X)^{\xi\times\zeta} = X^{\xi} \wedge X^{\zeta} \xrightarrow{f\wedge g} S^n \wedge S^m = S^{n+m}$ （Δ は対角線写像）

の次数は $\deg f \times \deg g$ であるから $d(X, -)$ は次の性質をもつ。

<u>命題 (1.1)</u> $d(X, \xi+\zeta) \mid d(X,\xi)\, d(X,\zeta)$.

又、特に $d(X,\xi)=1$ となるのは X^{ξ} が S-coreducible であることに他ならないから $J(\xi)=0$ のときに限る。これらの事から、又大嶋さんの結果から、$d(X,\xi)$ は $J(\xi)$ の位数と密接な関係があると期待できる。実際、

<u>命題 (1.2)</u> X が double suspension ならば $d(X,\xi) = J(\xi)$ の位数.

証明. X が suspension のときは Wall の補題により、X^{ξ} の cell structure が分っている。即ち、$X = SY$ とすれば $X^{\xi} \simeq S^n \cup_{\theta(J(\xi))} C(S^nY)$。ただし、$n$ は十分大とし θ は $[X, BG_n] \cong [Y, G_n] \cong [Y, F_n] \cong [Y, \Omega^n S^n] \cong [S^nY, S^n]$. 従って $d(X,\xi) = \theta(J(\xi))$ の位数. さらに Y が suspension のとき θ は additive であるから命題が成り立つ。

一般に、次がいえる。

<u>定理 (1.3)</u> (1) $d(X,\xi) \neq 0 \iff \xi$: orientable

(2) ξ: orientable とするとき p:素数に対して

$$p \mid d(X,\xi) \iff p \mid J(\xi) \text{ の位数}.$$

さて $O_{n,k}$ を F 上の Stiefel 多様体、$p: O_{n,k} \to S^{dn-1}$ ($d = \dim_{\mathbb{R}} F$) を射影とするとき $p_*: \pi_{dn-1}(O_{n,k}) \to \pi_{dn-1}(S^{dn-1}) \cong \mathbb{Z}$ の image の生成元(≥ 0) を $O_F\{n,k\}$ で表し、$O_{n,k}$ の James 数という。$Q_{n,k}$ を stunted quasi-projective space とすれば、$Q_{n,k} \hookrightarrow O_{n,k}$ は $2d(n-k)+3(d-1)$ 同値であることと、$Q_{n,k}$ は $(FP^{k-1})^{-n\eta}$ の S-dual であることより、S-duality によって $n \geq 2k-1$ のとき $O_F\{n,k\} = d(FP^{k-1}, -n\eta)$ が成り立つ。よって上の定理の系として次の Sigrist-Rothenberg の結果を得る。ただし $n \geq 2k-1$.

系 (1.4) $p \mid O_F\{n,k\} \iff p \mid J(n\eta)$ の位数 (p:素数).

§2. 定理の証明

ξ に associate した球、球面束を $D(\xi)$、$S(\xi)$ とするとき $(D(\xi), S(\xi))$ のコホモトピー完全列を考えることにより次が成り立つ。

<u>補題 (2.1)</u> $n \geq \dim X + 3$ のとき、次数 k の写像 $X^{\xi} \to S^n$ が存在 $\iff$ 次数 k の写像 $S(\xi) \to S^{n-1}$ が存在。

従って fibre の次元が十分高い球面束 $S(\xi)$ について、次数 k の写像 $S(\xi) \to S^{n-1}$ が存在するための条件を考えればよい。定理(1.3)(2)の $\Leftarrow$) は次の Adams の定理([A])より出る。

<u>mod k Dold の定理</u>. 次数 k の写像 $S(\xi)\longrightarrow S^{n-1}$ が存在すれば ある正整数 e に対して $k^e\xi$ は fibre homotopy trivial.

実際この定理より、$J(\xi)$ の位数 $|\, d(X,\xi)^e$、従って $p\,|\,J(\xi)$ の位数 $\Longrightarrow$ $p\,|\,d(X,\xi)$. 定理(1.3)(2) の $\Longrightarrow$) を示すには mod k Dold の定理の逆を次の形で証明すればよい。

<u>定理(2.2)</u> ξ を X 上の n 次元 oriented vector bundle, $n\geqq \dim X+3$ とし、$t: S(k\xi)\longrightarrow X\times S^{kn-1}$ を次数 1 の fibre homotopy equivalence とする。そのとき、ある非負整数 e に対して、次数が k^e の fibre preserving map $f: S(\xi)\longrightarrow X\times S^{n-1}$ で次の図式を fibre homotopy commutative にするものが存在する.

$$\begin{tikzcd} S(k\xi) \arrow[r, "kf"] \arrow[dr, "t"'] & X\times S^{kn-1} \\ & X\times S^{kn-1} \arrow[u, "1\times(k^e)^k"'] \end{tikzcd}$$

$J(\xi)$ の位数は有限であるから、上の定理により、ξ が orientable ならば $d(X,\xi)\neq 0$ であることが分る。逆に $d(X,\xi)\neq 0$ であれば、次数 $\neq 0$ の写像 $S(\xi)\longrightarrow S^{n-1}$ を用いて ξ に orientation を入れることができる。よって定理(1.3)(1)を得る.

(2.2) の証明. cell-wise induction による. cell が 1 個のときは明らかであるから. $X=Y\cup e^r$ で、$g: S(\xi|Y)\longrightarrow Y\times S^{n-1}$ を次数 m ($=k$ ベキ) の f. pres. map で、次の図式を f. h. comm. にしているものとする。

$$\begin{tikzcd}
S(k\xi|Y) \arrow[r, "kg"] \arrow[dr, "t|Y"'] & Y \times S^{kn-1} \arrow[d, phantom, "\simeq"] \\
 & Y \times S^{kn-1} \arrow[u, "1 \times m^k"']
\end{tikzcd} \qquad \text{——(I)}$$

Step 1. あるkベキ整数lに対して$(1\times l)\circ g$を$S(\xi)\longrightarrow X\times S^{n-1}$に拡張する。

$g: S(\xi|Y)\longrightarrow Y\times S^{n-1}$の$S(\xi)\longrightarrow X\times S^{n-1}$への拡張に対する障害は$\pi_{r-1}(G(n,m))$の元であるが、これを$\langle g\rangle$で表すことにする。ただし$G(n,m)=\{\alpha: S^{n-1}\to S^{n-1} \mid \deg\alpha = m\}$. ここで$l\in G(n,l)$, $k\in\mathbb{N}$に対して写像

$c(l): G(n,m)\longrightarrow G(n,lm)$ 及び $j(k): G(n,m)\longrightarrow G(kn,m^k)$

をそれぞれ$c(l)(\alpha)=l\circ\alpha$, $j(k)(\alpha)=\alpha*\cdots*\alpha$ (k重join) で定義する。$n\geqq r+3$のとき、$\pi_r(G(n,m))\cong\pi_r^S$であるが、この同型を$\theta$とするとき Adams により次の2つの図式は可換である。

$$\begin{tikzcd}
\pi_r(G(n,m)) \arrow[r, "c(l)_*"] \arrow[d, "\theta"'] & \pi_r(G(n,lm)) \arrow[d, "\theta"] \\
\pi_r^S \arrow[r, "\times l"'] & \pi_r^S
\end{tikzcd} \qquad
\begin{tikzcd}
\pi_r(G(n,m)) \arrow[r, "j(k)_*"] \arrow[d, "\theta"'] & \pi_r(G(kn,m^k)) \arrow[d, "\theta"] \\
\pi_r^S \arrow[r, "\times km^{k-1}"'] & \pi_r^S
\end{tikzcd}$$

従って $\theta(\langle(1\times l)\circ g\rangle) = \theta(c(l)_*\langle g\rangle) = l\,(\theta\langle g\rangle)$

$\theta(\langle kg\rangle) = \theta(j(k)_*\langle g\rangle) = km^{k-1}(\theta\langle g\rangle)$.

ところが仮定の可換図式(I)によりkgは$S(k\xi)\longrightarrow X\times S^{kn-1}$に拡張可能であるから$\langle kg\rangle=0$. よって$l=km^{k-1}$ととれ

ば $\langle (1\times l)\circ g\rangle = 0$、即ち $(1\times l)\circ g$ は $h: S(\xi)\longrightarrow X\times S^{n-1}$ に拡張できる。$\deg h\ (= k m^k)$ を q とおく。次に、

Step 2. fibre homotopy を X 上に拡張する。

図式

$$\begin{tikzcd} S(k\xi) \arrow[r, "kh"] \arrow[dr, "t"'] & X\times S^{kn-1} \\ & X\times S^{kn-1} \arrow[u, "1\times q^k"'] \end{tikzcd} \qquad \text{——(II)}$$

は、Y 上では fibre homotopy commutative である。この homotopy の X 上の homotopy への拡張に対する障害は $\pi_r(G(kn, q^k))$ の元であるが、これを ϕ とする。もし写像 $S(\xi)\longrightarrow X\times S^{n-1}$ として h の代わりに $(1\times l)\circ h$ をとれば、これに対応する障害は、$C(l^k)_*(\phi)\in\pi_r(G(kn,(lq)^k))$ となる。ここで $(1\times l)\circ h: S(\xi)\longrightarrow X\times S^{n-1}$ を胞体 e^r 上で $\pi_r(G(n,lq))$ の元を用いてホモトピー群の和の定義の要領で変形する。この変形を $\pi_r(G(n,lq))$ の各元について行うとき、変形された写像に対応する障害全体は $\pi_r(G(kn,(lq)^k))$ の剰余類 $C(l^k)_*(\phi)+j(k)_*\pi_r(G(n,lq))$ をなす。この剰余類は、同型 $\theta:\pi_r(G(kn,(lq)^k))\cong\pi_r^S$ により π_r^S の剰余類 $l^k\theta(\phi)+k(lq)^{k-1}\pi_r^S$ に対応するから $l = kq^{k-1}$ ととれば必ず 0 を含む。従って $l=kq^{k-1}$ ととれば次数 kq^k の fibre preserving map $h': S(\xi)\longrightarrow X\times S^{n-1}$ が存在して、この h' に対し図式(II)は fibre homotopy commutative となる。q.e.d.

参考文献

[A] J.F. Adams: On the groups J(X)-I, Topology 2 (1963), 181-195.

[D] I. Dibag: Degree theory for spherical fibrations, Tôhoku Math. J. 34 (1982), 161-177.

[Ō] H. Ōshima: On stable James numbers of stunted complex or quaternionic projective spaces, Osaka J. Math. 16 (1979), 479-504.

[T] R. Tanaka: On the stable James numbers of Thom complexes, Osaka J. Math. 20 (1983), 137-143.