数理解析研究所講究録
第505巻 1983年 53-62

G－積空間のJames数

京大・理　入江幸右衛門（Kouyemon Iriye）

§0. 序

Mを連結で向きづけ可能な閉多様体（一般には、"写像度"という概念が定義され得る空間）、Gはm次対称群$(m>1)$の*transitive*な部分群とする。このとき、Gは$(M)^m = M\times\cdots\times M$（$m$個）に自然な方法で作用する。写像

$$f:(M)^m \to M$$

は、$^\forall(x_1,\cdots,x_m)\in(M)^m$と$^\forall\sigma\in G$に対して

$$f(x_1,\cdots,x_m)=f(x_{\sigma(1)},\cdots,x_{\sigma(m)})$$

を満たすとき、G-*invariant*であると言う。このようなG-*invariant map* $f:(M)^m\to M$に対して、その*type*という整数を

$$t(f):=\text{degree}\,(f\circ i : M\to M)$$

によって定義する。ここに、$i:M\to(M)^m$は、$*\in M$をある基点として、$i(x)=(x,*,\cdots,*)$によって定義される写

像である。このような定義のもとで、自然に次の問題が提起される。

問題（I. M. James）　$J(G, M) := \{ n \in \mathbb{Z} \mid {}^{\exists} G$-invariant map $f : (M)^m \to M$ s.t. $t(f) = n \} \subset \mathbb{Z}$ を決定せよ。

ここでは、この問題に対する若干の結果と問題点を述べたいと思う。

§1．準備

まず最初に、以下の必要のために二、三の準備を行なう。

補題（A. Kono）　Gを有限群、Xを連結なG-空間、素数pはGの位数と素であるとする（$p=0$でもよい）。このとき、G-写像に関して自然な写像

$$\tau = \tau(X) : (\Sigma X/G)_{(p)} \longrightarrow (\Sigma X)_{(p)}$$

で、$(\Sigma\pi \circ \tau) = id : (\Sigma X/G)_{(p)} \to (\Sigma X/G)_{(p)}$ となるものが存在する。

注意．上の補題を一般化して、次のような命題：

「Gを有限群、HはGの部分群、Xは　　G-空間、素数pは$|G/H|$と素であるとする。このとき写像

$$\tau : \Sigma^\infty X/G_{(p)} \longrightarrow \Sigma^\infty X/H_{(p)}$$

で、$\pi \circ \tau = id : \Sigma^\infty X/G_{(p)} \to \Sigma^\infty X/G_{(p)}$ となるものが存在

する。」

が考えられるが、これは正しくはない。反例は、たとえば、$G=\mathfrak{S}_3$, $H=\{1, (2,3)\}<G$, $X=S^n\times S^n\times S^n$, $p=2$ の場合を考えればよい。実際、[6, §14]により自然な写像

$$\pi^*: H^*(X/G:\mathbb{Z}/2) \longrightarrow H^*(X/H:\mathbb{Z}/2)$$

は、split monomorphism であるが Steenrod algebra の module としては split しないことが分かる。

次に、Mが連結で向きづけ可能な閉多様体，$j: M\to \Omega\Sigma M$ を canonical embedding とする。そして、集合

$$D(M):=\{n\in\mathbb{Z}\mid \exists f: \Omega\Sigma M\to M \text{ s.t. degree}(f\circ j)=n\}$$

を考える。MがH-空間ならば、[1, Theorem 3.2] などにより $D(M)\ni 1$ であることがわかる。このことと[5]により、次の命題は明らかであろう。

命題. Mは連結で向きづけ可能な閉多様体とする。このとき、$D(M)\neq\{0\}$ であるためには、Mが rational H-空間であることが必要かつ十分である。また、Mが modulo p H-空間なら、D(M)の元nでpと素なものが存在する。

§.2. G-積空間のJames数についての一般論

以下、多様体Mは単連結で向きづけ可能な閉多様体とする。このとき、$(M)^m$、$(M)^m/G$ なども単連結になる。また、G-invariant map $f:(M)^m\longrightarrow M$ と $f':(M)^m/G\longrightarrow M$ で $f=f'\circ\pi$ を満たすものは一対一に対応するから両者を同一視する。また、$\pi\circ i: M\longrightarrow (M)^m/G$ も i と書く。

$$\begin{tikzcd}
 & (M)^m \arrow[d, "\pi"] \arrow[dr, "f"] & \\
M \arrow[ur, "i"] \arrow[r, "i"'] & (M)^m/G \arrow[r, "f'"'] & M
\end{tikzcd}$$

命題2.1. $J(G,M)\neq\{0\}$ であるためには、Mがrational H-空間であることが必要かつ十分である。

証明. まず $J(G,M)\neq\{0\}$ とすれば、G-invariant map $f:(M)^m\longrightarrow M$ で $t(f)\neq 0$ となるものが存在する。$i':M\times M\longrightarrow (M)^m$ を $i'(x,y)=(x,y,*,\cdots,*)$ と定義して、$f\circ i':M\times M\longrightarrow M$ を考える。ここで $i_1:M\longrightarrow M\times M$、$x\longmapsto(x,*)$、$i_2:M\longrightarrow M\times M$、$x\longmapsto(*,x)$ で定義すれば、fはG-invariantより

$$f\circ i'\circ i_1=f\circ i'\circ i_2 : M\longrightarrow M$$

で、その写像度は0ではない。つまり、$(f\circ i'\circ i_1)^*:H^*(M,\mathbb{Q})\longrightarrow H^*(M,\mathbb{Q})$ は同型でMは単連結より

$$(f\circ i')_{(0)} : (M\times M)_{(0)} \simeq M_{(0)}\times M_{(0)} \longrightarrow M_{(0)}$$

が $M_{(0)}$ のH－空間としての積を与えているとみなしてよい。よって、Mは rational H－空間である。

次は逆にMが rational H－空間であるとする。§2の補題を $X=(M)^m$, $p=0$ に対して適用する。$pr:(M)^m\to M$ を最初の成分への射影として

$$\tau'=\Sigma(pr)\circ\tau : \Sigma(M)^m/G_{(0)} \longrightarrow \Sigma(M)^m_{(0)} \longrightarrow \Sigma M_{(0)}$$

を考えると、$\tau'\circ\Sigma i\simeq id:\Sigma M_{(0)}\to\Sigma M_{(0)}$ を満たす。$M_{(0)}$ がH－空間より写像 $g:\Omega\Sigma M_{(0)}\to M_{(0)}$ で $g\circ j\simeq id: M_{(0)}\to M_{(0)}$ となるものが存在する。ここに、$j:M_{(0)}\to\Omega\Sigma M_{(0)}$ は canonical embedding である。$\tau'':(M)^m/G_{(0)}\to\Omega\Sigma M_{(0)}$ を τ' の adjoint map として合成

$$f'=g\circ\tau'' : (M)^m/G_{(0)} \longrightarrow M_{(0)}$$

を考えると、$f'\circ i\simeq id: M_{(0)}\to M_{(0)}$ である。したがって、[5]により、写像

$$f:(M)^m/G \longrightarrow M$$

でその type $t(f)$ が 0 でないものが存在する。

命題2.2.（J.M.James） 写像 $\mu:M\times M\to M$ でその type が (1,2) のものが存在すれば、J(G,M)は ideal をなす。

証明は［2］を参照。また、上記のような μ が存在

しなくても、$J(G, M)$ は ideal になることがある。たとえば、$J(G, S^{2t_1+1}\times\cdots\times S^{2t_s+1}) = J(G, S^{2t_1+1})\cdots\cdots J(G, S^{2t_s+1})$ が成り立ち、$J(G, S^{2t_1+1}\times\cdots\times S^{2t_s+1})$ は ideal をなす。

命題2.3　p を素数とする。このとき、$p \mid |G|$ ならば $p \mid J(G, M)$ （$^\forall n \in J(G, M)$ に対して $p \mid n$）である。

証明：$m = p$、$G = \mathbb{Z}/p$ のときに証明すれば十分である。そこで、$CP^pM = (M)^p/\mathbb{Z}/p$ とおく。$H^*(CP^pM : \mathbb{Z}/p)$ の構造は、[6] により分かっている。

証明は背理法による。よって、$\mathbb{Z}/p$ -invariant map $f : CP^pM \longrightarrow M$ でその type $t(f)$ が p と素なものが存在したとする。仮定より、

$$(f\circ i)^* : H^*(M : \mathbb{Z}/p) \longrightarrow H^*(M : \mathbb{Z}/p)$$

は同型である。ここで、合成

$$H^*(CP^pM : \mathbb{Z}/p) \xrightarrow{f^*} H^*(M : \mathbb{Z}/p) \xrightarrow{(f\circ i)^{*-1}} H^*(M : \mathbb{Z}/p)$$

を考えることにより、$f : CP^pM \to M$ は $(f\circ i)^* = id$ を満たすと仮定してよい（以下の議論では、$H^*(CP^pM : \mathbb{Z}/p)$、$H^*(M : \mathbb{Z}/p)$ などの環構造と Steenrod algebra 上の加群構造しか用いないから）。また、$H^*(M : \mathbb{Z}/p)$ は Hopf 代数であることを注意しておく。

$p = 2$ のとき：$H^*(M ; \mathbb{Z}/2) = 0$ for $0 < * < r$、$H^r(M ; \mathbb{Z}/2)$

$\neq 0$, $x \neq 0 \in H^r(M : Z/2)$ とする。このとき、

$$(2.4) \quad f^*(x^{2^{s+1}}) = \phi^*(x^{2^{s+1}} \times 1) + \sum_{j=2}^{2^s r} E_j'(x_j').$$

$$x_{2^s r} = x^{2^s}$$

と表わされる。証明は帰納法による。このとき，$x^{2^{s+1}} = 0$，$x^{2^s} \neq 0$ なる s をとれば、$E_{2^s r}(x^{2^s}) = 0$。よって、$x^{2^s} = 0$ となり矛盾である。

pが奇素数のとき:

case i): $H^*(M : Z/p)$ に偶数次元の元で non-decomposable な元が存在するときは、$p = 2$ のときと同様の議論により矛盾が導かれる。

case ii): $H^*(M : Z/p)$ が case i) でないとき，つまり $H^*(M : Z/p) = \Lambda(x_1, \cdots, x_n)$，$\dim x_i = odd$，のときを考える。$\dim x_1 \leq \dim x_2 \leq \cdots \leq \dim x_n$ とし，$x = x_1$ とする。$\wp^1 x = 0$ ならば、

$$f^*(x) = \phi^*(x \times 1 \times \cdots \times 1)$$

より

$$0 = f^*(\wp^1 x) = \wp^1 f^*(x) = \phi^*(\wp^1 x \times 1 \times \cdots \times 1) + E_{2(p-1)}(x)$$
$$= E_{2(p-1)}(x)$$

$\dim x \geq 3$ より，$E_{2(p-1)} : H^*(M : Z/p) \to H^*(CP^p M : Z/p)$ は単射である。よって、$x = 0$ となり矛盾する。次に，$\wp^1 x$

$\neq 0$ の場合を考える。このとき，

$$f^*(\wp' x) = \phi^*(\wp' x \times 1 \times \cdots \times 1) + E_{2(p-1)}(x).$$

この両辺に Bockstein 準同型を apply して

$$0 = f^*(\Delta_p \wp' x) = \Delta_p f^*(\wp' x)$$
$$= \Delta_p \phi^*(\wp' x \times 1 \times \cdots \times 1) + \Delta_p E_{2(p-1)}(x)$$
$$= E_{2p-1}(x).$$

この場合も $x = 0$ となり矛盾する。

命題2.4. 素数 p は G の位数と素であると仮定する。このとき、G-invariant map $f : (M)^m \longrightarrow M$ でその type $t(f)$ が

$$t(f) = d \cdot l \quad , \ d \in D(M), \ (p, l) = 1.$$

と表わせるものが存在する。

証明は命題2.1における証明と同様である。この命題は，$D(M) \ni 1$ or 2 などのとき非常に有効である。

§.3. $M = S^{2t+1}$ のとき.

M が S^{2t+1} のとき、$J(G, S^{2t+1})$ の正の生成元を $k^{m,2t+1}(G)$ と書く。

命題3.1.（[3]） $k^{2,2t+1}(Z/2) = 2^{\varphi(2t)}$ である。ここに，$\varphi(b) = \#\{0 < a \leq b \mid a \equiv 0, 1, 2 \text{ or } 4 \bmod 8\}$ である。

命題3.2.([4]) $k^{m,2t+1}(\mathfrak{S}_m)$ は、$m^t, (m-1)^t, \cdots, 2^t$ のすべての数で割り切れる。

命題3.3.([7]) pを素数、G^rを$\mathfrak{S}_{p^r}$ の p-Sylow部分群とする。このとき、

$$k^{p^r,2t+1}(G^r) = \begin{cases} 2\cdot p^{rt} & \text{if } 2t+1 \neq 1,3,7. \\ p^{rt} & \text{if } 2t+1 = 1,3,7. \end{cases}$$

参考文献

[1] B. Gray: On the homotopy groups of mapping cones. Proc. London Math. Soc. 26(1973), 497-520.

[2] I.M. James: Symmetric function of several variables whose range and domain is sphere, Bol. Soc. Mat. Mexicana 1(1956), 85-88.

[3] , E. Thomas, H. Toda and G.W. Whitehead: On the symmetric square of spheres, J. Math. and Mech. 12(1963), 771-776.

[4] P.S. Landweber: On symmetric maps between spheres and equivariant K-theory, Topology 9(1970), 55-61.

[5] M. Mimura, G. Nishida and H. Toda: Locali-

zation of CW-complexes and its applications. J. Math. Soc. Japan 23 (1971), 596-624.

[6] M. Nakaoka: Cohomology theory of a complex with a transformation of prime period and its applications, J. Inst. Poly. O.C.U. 7 (1956). 51-102.

[7] K. Iriye: On the James number of cyclic maps of spheres, preprint.