数理解析研究所講究録
第505巻 1983年 85-91

Homotopy normality について

愛知教育大学　古川靖邦
Furukawa Yasukuni

1 まえがき

群論におけるいろんな概念を homotopy 圏で考えることは多い。例えば homotopy-abelian, homotopy normal 等…。

James [3] は $t=2$ or $t\geqq 4$ のときユニタリー群 U_t は回転群 R_{2t} の McCarty の意味での homotopy normal な部分群にならないことを示した。

Bott の結果を relative Samelson 積にしたこの証明方法は $t=3$ の場合に適用できない。この小編ではこのときの homotopy normality を示し（定理1），この obstruction を用いて例外リー群の場合について調べる（定理2）。

2 定義と例

__定義1__. リー群 G の部分群 H が McCarty [6] の意味で homotopy normal とは homotopy $\nu_t : (G\times H, H\times H) \longrightarrow (G, H)$ が存在して $\nu_1(G\times H)\subset H$, $\nu_0(g,h)=ghg^{-1}$ ($^\forall g\in G$, $^\forall h\in H$) をみたすとき.

<u>定義2</u>. 上の定義でhomotopyについての条件 $v_t(H\times H)\subset H$ を要求しないときHはGでJames [2] の意味でhomotopy normalという。

上の定義より次の可換な図式 (James [4])

$$\begin{tikzcd}
 & \pi_p(H)\times\pi_q(G) \arrow[dl, "i_*\times 1"'] \arrow[dr, "1\times j_*"] & \\
\pi_p(G)\times\pi_q(G) \arrow[d, "\langle\,,\rangle"] & & \pi_p(H)\times\pi_q(G,H) \arrow[d, "\langle\,,\rangle"] \\
\pi_{p+q}(G) \arrow[rr, "j_*"'] & & \pi_{p+q}(G,H)
\end{tikzcd} \quad \cdots\cdots \text{(A)}$$

(但し, i は injection, j は projection),

において右辺の写像 $\langle\,,\rangle(1\times j_*)$ がある p, q で零とならないとき James の意味で homotopy normal でない。又, ある p, q について $\langle\,,\rangle : \pi_p(H)\times\pi_q(G,H)\longrightarrow\pi_{p+q}(G,H)$ が零でないとき McCarty の意味で homotopy-normal でないという obstruction を与えている。

<u>例1</u> G = real (complex) affine group,

$H=GL(n,F)$ (但し $F=R$ or C) とおくとき

HはGのnormal subgroupでないがJamesの意味でhomotopy normal.

<u>例2.</u> $G=S^3$, $H=S^1$ とおくとき S^1 は James' sense で

homotopy normal しかし Mclarty's sense で homotopy normal でない（[2]）。

<u>例3.</u> G, H が古典群のとき殆んどの場合 group として normal でなければ homotopy sense で normal にならない。
(James [2, 3, 4], Mclarty [6], Kachi [5])。

3 定理と予想

<u>定理1</u> U_3 は R_6 で homotopy normal でない (James' sense)

<u>定理2</u> subgroups $SU_3 \subset G_2$, $G_2 \subset Spin(7)$, $Spin(7) \subset Spin(8)$, $Spin(8) \subset Spin(9)$, $Spin(9) \subset F_4$ は homotopy normal でない (Mclarty's sense).

<u>系3</u> G_2 は R_7 で homotopy normal でない (James' sense).

<u>予想</u> 単連結，コンパクト，単純リー群はすべて homotopy normal な部分群を含まない (Mclarty or James' sense)

<u>定理1の証明</u> 下の可換図式のように生成元をおく。

$$
\begin{tikzcd}
\mathbb{Z}\{i_*\iota_3\} = \pi_3(U_3) \arrow[d] & \pi_{10}(U_3) = \mathbb{Z}_2\{\widehat{\nu_5\eta_8^2}\} \arrow[d] \\
\mathbb{Z}\{i_*\iota_3\}\times\mathbb{Z}\{2\hat{\iota}_7\} = \pi_3(U_4)\times\pi_7(U_4) \arrow[r, "{\langle\, ,\, \rangle}"] \arrow[dr, phantom, "\circlearrowright"] & \pi_{10}(U_4) = \mathbb{Z}_8\{\hat{\nu}_7\} \oplus \mathbb{Z}_2\{\widehat{\nu_5\eta_8^2}\} \\
\pi_3(R_6)\times\pi_7(R_6) \arrow[u, "q\times q", "\cong"'] \arrow[r, "{\langle\, ,\, \rangle}"] & \pi_{10}(R_6) \arrow[u, "q", "\cong"']
\end{tikzcd}
$$

但し i, i' は適当な injection, q は合成

$\pi_i(R_6) \xleftarrow{\cong} \pi_i(\mathrm{spin}(6)) \xrightarrow{\cong} \pi_i(U_4)$ とする。

Ⓐで $H=U_3$, $G=U_4$ とおくと

$$q_*\langle i'_*\iota_3, \widehat{2\iota_7}\rangle = \langle i'_*\iota_3, 2\iota_7\rangle = 2J_C(i'_*\iota_3) = 2E^2(J_C\iota_3) \cdots\cdots Ⓑ$$

（J_C については [1] 参照）

ここで写像 $k: \pi_3(R_4) \twoheadrightarrow \pi_3(R_5) \xrightarrow{\cong} \pi_3(R_7)$ により生成元 $\hat{\iota}_3$ が z にうつるものとする；$k(\hat{\iota}_3) = z$。　すると

$$J_C(i'_*\iota_3) = J_R(z) = J_R k(\hat{\iota}_3) = E^3 J_R(\hat{\iota}_3) = E^3\nu_4 = \nu_7 \neq 0 \quad \cdots\cdots Ⓒ$$

□

<u>定理2の証明</u>　(i) $SU_3 \subset G_2$ について；

下の可換図式におけるように2-成分の生成元をおく

$$\begin{array}{ccc} Z\{i_*\iota_3\} \times Z\{\iota_6\} = \pi_3(SU_3) \times \pi_6(G_2/SU_3) & \xrightarrow{\langle\ ,\ \rangle} & \pi_9(G_2/SU_3) = Z_8\{\nu_6\} \\ \downarrow 1\times\Delta & & \downarrow \Delta \\ \pi_3(SU_3) \times \underbrace{\pi_5(SU_3)}_{\substack{\parallel \\ Z\{\hat{\iota}_5\}}} & \xrightarrow{\langle\ ,\ \rangle} & \pi_8(SU_3) \end{array}$$

但し, Δ は transgression, 例外群のホモトピー群については [7] 等参照。

$\Delta\langle i_*\iota_3, \iota_6\rangle = \langle i_*\iota_3, \Delta\iota_6\rangle = \langle i_*\iota_3, \widehat{2\iota_5}\rangle$　これが零でないことはⒶにおいて $H=SU_2$, $G=SU_3$ とおくことにより

$q_*\langle i_*\iota_3, \widehat{2\iota_5}\rangle = \langle\iota_3, 2\iota_5\rangle = 2J_C(\iota_3) \neq 0$　（Ⓑ, Ⓒによる）

がわかる。

(ii) $G_2 \subset spin(7)$ について; Ⓐにおいて $H = G_2$, $G = spin(7)$ とおくと $spin(7)/G_2 = S^7$ だから Ⓑ, Ⓒ を用いて James' sense で homotopy normal でないことがわかる。

(iii) $spin(7) \subset spin(8)$ について;

$$\begin{array}{ccc}
\pi_3(SU_3) & \xrightarrow{J_C} & \pi_{10}(S^7) \\
\cong\downarrow & & \| \\
\pi_3(spin(7)) & \xrightarrow{\langle\ ,\iota_7\rangle} & \pi_{10}(spin(8)/spin(7))
\end{array}$$

において $J_C \neq 0$ による。

(iv) $spin(8) \subset spin(9)$ について; 図式

$$\begin{array}{ccc}
\pi_3(SU_3) & \xrightarrow{J_C \neq 0} & \pi_{10}(S^7) \\
\cong\downarrow & & \| \\
\pi_3(R_7) & \xrightarrow{J_R} & \pi_{10}(S^7) \\
\cong\downarrow & & E\downarrow\cong \\
\pi_3(R_8) & \xrightarrow{J_R} & \pi_{11}(S^8) \\
\cong\uparrow & & \| \\
\pi_3(spin(8)) & \xrightarrow{\langle\ ,\iota_8\rangle} & \pi_{11}(spin(9)/spin(8))
\end{array}$$

による。

(v) $spin(9) \subset F_4$ について;

下の可換図式のように組えておく.

$$\begin{tikzcd}
\mathbb{Z}\{i_*\iota_3\} \arrow[d, phantom, "\shortparallel"] & \mathbb{Z}\{x\} \arrow[d, phantom, "\shortparallel"] & \\
\pi_3(Spin(9)) \times & \pi_8(F_4/Spin(9)) \arrow[r, "{\langle\,,\,\rangle}"] & \pi_{11}(F_4/Spin(9)) \arrow[d, "\Delta"] \\
\pi_3(Spin(9)) \times & \pi_7(Spin(9)) \arrow[u, leftarrow, "\cong\ 1\times\Delta"'] \arrow[r, "{\langle\,,\,\rangle}"] & \pi_{10}(Spin(9)) \\
\pi_3(Spin(7)) \times & \pi_7(Spin(7)) \arrow[u, "\cong"] \arrow[r, "{\langle\,,\,\rangle}"] & \pi_{10}(Spin(7)) \arrow[u, "\cong"']
\end{tikzcd}$$

(iii)の議論を用いて，底辺の $\langle\,,\,\rangle \neq 0$ が示される，

従って上辺の $\langle i_*\iota_3, x\rangle \neq 0$ も示された。

□

参考文献

[1] Y. Furukawa, Whitehead products in the complex Stiefel manifolds, Proc. Edinburgh Math. Soc. 26 (1983), 241–251.

[2] I. M. James, On the homotopy theory of the classical groups, An. da. Acad. Brasileira de Ciências 39 (1967), 39–44.

[3] ———, Products between homotopy groups, Compositio Math. 23 (1971), 329–345.

[4] ———, The topology of Stiefel manifolds, London Math. Soc. Lecture Note series, 24, Cambridge (1976).

[5] H. Kachi, On the iterated Samelson product, Math. J. Okayama Univ. 24 (1982), 37–44.

[6] G. S. McCarty, JR, Products between homotopy groups and

the J-morphism, Quart. J. of Math. (Oxford) 15 (1964), 362—370.

[7] M. Mimura, The homotopy groups of Lie groups of low rank, J. Math. Kyoto Univ. 6 (1967), 131—176.

[8] G. W. Whitehead, Elements of homotopy theory, Springer-Verlag (1978).

[9] Y. Furukawa, Homotopy normality of Lie groups, to appear.