数理解析研究所講究録
第 505 巻 1983 年 92-106

球面上の Spherical Fibre Space の連結和について

東京工大(理)　山口耕平 (K. Yamaguchi)

§1 Introduction

Poincaré duality の成立する有限複体は Poincaré complex と言われる。たとえば、多様体はそうであり、その点においても、Poincaré complex のホモトピー型を分類することは、大変興味ある問題と思われる。ここでは、十分連結性の高い Poincaré complex について考える。

今、単連結な Poincaré complex M で、その homology 群が、次の形のものをとる。

$$H_i(M;\mathbb{Z}) \cong \begin{cases} \mathbb{Z} & (i=0,\ n+m) \\ \underbrace{\mathbb{Z}\oplus\mathbb{Z}\oplus\cdots\oplus\mathbb{Z}}_{r\text{個}} = r\mathbb{Z} & (i=n,m) \\ 0 & (\text{その他の}\ i) \end{cases}$$

(ただし $n < m-1$)

とくに、M が滑らかな閉多様体の場合には、Wall,

田村，石本により、適当な条件のもとで、Mは r 個の m 次元球面 S^m 上の n 次元球面バンドルの連結和に微分同相になる。したがって、この場合には、Mのホモトピー型の分類は、球面上の球面バンドルの連結和の分類に帰着する。そこで、その一般化として、球面上の spherical fibre space の連結和のホモトピー型を分類することを、本論文の目的とする。

§2 定義と結果

M_1, M_2 を p 次元 Poincaré complex とするとき、disk theorem により、$M_i \simeq K_i \cup_{\alpha_i} e^p$ ---(*)

(ただし $\alpha_i \in \pi_{p-1}(K_i)$, K_i は $(p-1)$ 次元以下の次元の有限複体；$i=1,2$）の形に（up to homotopy）でかける。このとき、Poincaré complex M_1, M_2 の連結和 $M_1 \# M_2$ を、$M_1 \# M_2 = (K_1 \vee K_2) \cup_{\alpha_1+\alpha_2} e^p$

と定義する。（この定義は (*) の形によらず、up to homotopy で well-defined である；Wall [12]）

今、
$$\left.\begin{array}{l} SG_{n+1} = \{ f : S^n \to S^n \text{ 連続写像} \mid \text{degree 1-map} \} \\ F_n = \{ f \in SG_{n+1} \mid f \text{ は based map} \} \\ i_n : F_n \hookrightarrow SG_{n+1} : \text{inclusion map} \end{array}\right\}$$

とする。

X を m 次元球面 S^m 上の orientable n-spherical fibre space, その characteristic element を $\chi(X) \in \pi_{m-1}(SG_{n+1})$ とする。今、X が cross-section を持つと仮定すると、

(2.1) $\qquad \chi(X) = j_{n*}(\xi) \qquad (\exists \xi \in \pi_{m-1}(F_n))$

とかける。$\lambda : \pi_{m-1}(F_n) \xrightarrow{\cong} \pi_{m+n-1}(S^n)$ を、自然な同型とし、2つの fibration とその間の maps

$$\begin{tikzcd}
SO(n) \arrow[r, hook, "j_n'"] \arrow[d, hook] & SO(n+1) \arrow[r] \arrow[d, hook] & SO(n+1)/SO(n) \arrow[d, equal] \\
F_n \arrow[r, "j_n"] & SG_{n+1} \arrow[r, "ev"] & S^n
\end{tikzcd}$$

（ただし、$ev(f) = f(*)$ $\qquad f \in SG_{n+1}$, $* \in S^n$: 基点）

を考えると、次の（up to sign で）可換な図式を得る。

$$\begin{tikzcd}
 & \pi_{m-1}(SO(n)) \arrow[rr, "j_{n*}'"] \arrow[dd] \arrow[dr, "J"] & & \pi_{m-1}(SO(n+1)) \arrow[dd] \arrow[dr, "J"] & \\
\pi_m(S^n) \arrow[ur, "\partial'"] \arrow[rr, "P"] \arrow[dr, "\partial"'] & & \pi_{n+m-1}(S^n) \arrow[rr, "E"] & & \pi_{n+m}(S^{n+1}) \\
 & \pi_{m-1}(F_n) \arrow[ur, "\lambda", "\cong"'] \arrow[rr, "j_{n*}"] & & \pi_{m-1}(SG_{n+1}) \arrow[ur] &
\end{tikzcd}$$

Fig (2.2)

ただし、$\begin{cases} P(\xi) = [\xi, \iota_n] \quad \text{for } \xi \in \pi_m(S^n) \\ J : \text{classical } J\text{-homomorphism} \end{cases}$

（とくに、 $J \circ \partial' = -P$, $E \circ J = -J \circ \partial_{n*}'$ ）

今、 $\chi(X) = \partial_{n*}(\xi) = \partial_{n*}(\xi')$ （ $\xi, \xi' \in \pi_{m+1}(F_n)$ ）と、

(2.1) が、2 通りに書けたと仮定すると Fig. (2.2) より、

$\xi - \xi' = \partial(x)$ （ $\exists x \in \pi_m(S^n)$ ） とおける。

よって、 $\lambda(\xi) - \lambda(\xi') = \lambda(\xi - \xi')$

$= P(x) = [x, \iota_n]$

したがって、$\lambda(\xi)$ は mod $P\pi_m(S^n)$ で、一意的に

決まる。そこで、James-Whitehead invariant $\lambda(X)$ を、

(2.3) $\lambda(X) = [\lambda(\xi)] \in \pi_{m+n+1}(S^n)/P\pi_m(S^n)$

と定義できる。

この不変量 $\lambda(X)$ に対して、次はよく知られる。

定理 2.4. （ I.M. James - J.H.C. Whitehead [3], S. Sasao [5]）

$2n \geqq m+2$ とし、 X_1, X_2 を、cross-section を持つ、S^m 上

の orientable n-spherical fibre space とする。

このとき、

$X_1 \simeq X_2$: same homotopy type

$\Longleftrightarrow \lambda(X_2) = \pm\lambda(X_1)$

この定理の一般化として、我々は次の定理を得る。

定理A

$2n \geqq m+2$ とし、$\left.\begin{array}{l} X_1, X_2, \cdots X_r \\ X_1', X_2', \cdots X_r' \end{array}\right\}$ を、cross-section

を持つ、$2r$ 個の S^m 上の orientable n-spherical fibre space とする。

このとき、

$$\mathop{\#}_{i=1}^{r} X_i' \simeq \mathop{\#}_{i=1}^{r} X_i \quad : \text{same homotopy type}$$

$$\Longleftrightarrow \begin{bmatrix} \lambda(X_1') \\ \lambda(X_2') \\ \vdots \\ \lambda(X_r') \end{bmatrix} = A \cdot \begin{bmatrix} \lambda(X_1) \\ \lambda(X_2) \\ \vdots \\ \lambda(X_r) \end{bmatrix} \qquad \exists A \in GL(r, \mathbb{Z})$$

（ただし、$\pi_{m+n-1}(S^n)/p\pi_m(S^n)$ を、左 $\mathbb{Z}$-module と考える）

とくに、球面上の球面バンドルの場合を考えると、

定理B（H. Ishimoto [2], K. Yamaguchi [14]）

$2n \geqq m+2$ とし、$\left.\begin{array}{l} X_1, X_2, \cdots X_r \\ X_1', X_2', \cdots X_r' \end{array}\right\}$ を、cross-section を持つ

$2r$ 個の S^m 上の n次元球面バンドルとする

このとき、

$$\mathop{\#}_{i=1}^{r} X_i' \simeq \mathop{\#}_{i=1}^{r} X_i \quad : \text{same homotopy type}$$

$\Longleftrightarrow$

$$\begin{bmatrix} \lambda(X_1') \\ \lambda(X_2') \\ \vdots \\ \lambda(X_r') \end{bmatrix} = A \cdot \begin{bmatrix} \lambda(X_1) \\ \vdots \\ \lambda(X_r) \end{bmatrix} \qquad ({}^{\exists}A \in GL_r(\mathbb{Z}))$$

(ただし、 $J\pi_{m-1}(SO(n))/p\pi_m(S^n)$ を、左 $\mathbb{Z}$-module と考える)

§3 The group of self-homotopy equivalences $\mathcal{E}(X)$

基点付きの位相空間 $X=(X, x_0)$, $Y=(Y, y_0)$ に対して、ホモトピー集合 $[X,Y]$ を、

$$[X,Y] = \{ f : (X, x_0) \longrightarrow (Y, y_0) \} / \simeq \qquad (\simeq : \text{homotopy})$$

とおく。とくに $X=Y$ のとき、$[X,X]$ は写像の合成により、$1_X = [id_X]$ を単位元とする monoid となる。そこで、$[X,X]$ の元で可逆元全体のつくる群を、$\mathcal{E}(X)$ とする;

$$\mathcal{E}(X) = \{ [f] \in [X,X] \mid f \text{ は homotopy equivalence} \}$$

次のことを注意する。

命題 3.1 (Homotopy theory)

$X = K \cup_\alpha e^p$

$Y = K \cup_\beta e^p$

$\left(\begin{array}{l} \alpha, \beta \in \pi_{p-1}(K) \\ K \text{ は、} \dim K \leqq p-2 \text{ の CW-complex} \\ K : 1\text{-connected} \end{array} \right)$

このとき、

$$X \simeq Y : \text{homotopy 同値} \iff {}^{\exists}\theta \in \mathcal{E}(K) ;\ \theta \circ \alpha = \pm \beta$$

したがって、定理A(または定理B)を証明するには、ある適当な複体Kの $\mathcal{E}(K)$ を求め、そのhomotopy群 $\pi_{p-1}(K)$ への作用

$$(3.2)\qquad \begin{array}{ccc} \mathcal{E}(K)\times\pi_{p-1}(K) & \longrightarrow & \pi_{p-1}(K) \\ \cup\!\!\!\!\,\shortmid & & \cup\!\!\!\!\,\shortmid \\ (\theta,\alpha) & \longmapsto & \theta\circ\alpha \end{array}$$

を調べること ~~ぬ~~ が必要となる。我々の場合必要となるKは、次の形のもので十分である(See §4)

$$(3.3)\qquad K=\bigvee_{i=1}^{r}K_i=\bigvee^{r}(S^n\vee S^m)$$

(ただし $K_i=S^n\vee S^m\quad(1\leqq i\leqq r)$)

そこで、各 $1\leqq k\leqq r$ に対して、

$$\begin{cases} i_k:\ S^n\longrightarrow S^n\vee S^m=K_k & :\text{inclusion map} \\ \xi_k:\ S^m\longrightarrow S^n\vee S^m=K_k & :\qquad " \\ p_k:\ K_k=S^n\vee S^m\longrightarrow S^m & :\text{retraction map} \end{cases}$$

とおく。同様に、各 $1\leqq k,s\leqq r$ について、

$$\left.\begin{array}{l} \sigma_{ks}:\ K_k\longrightarrow K_s \\ \lambda_{ks}:\ K_k\longrightarrow K_s \end{array}\right\}\text{を、}$$

$\sigma_{ks}=\text{identity}$, $\lambda_{ks}=\xi_s\circ p_k$ とおく。

とくに、各空間 K_k はdouble suspension spaceで、ホモトピー集合 $[K_k,K_s]$ は(track additionで)abelian groupとなり、$2n\geqq m+2$ とすると、$[K,K]$ は(和はtrack addition，積は、写像の合成で定義することで）非可換環となる。今、次のことに注意する。

<u>命題 3.4</u>（[14] ~~3~~, [4]）

$$[K_h, K_s] \cong \mathbb{Z}\{\sigma_{hs}\} \oplus \mathbb{Z}\{\lambda_{hs}\} \oplus G_{hs}$$

ただし　$G_{hs} = i_s \pi_m(S^n) \circ p_h \cong \pi_m(S^n)$

<u>命題 3.5</u>（[14]）

$2n \geqq m+2$ のとき　$[K, K] \cong \mathrm{Mat}(r, [K_h, K_s])$

よって、各元 $\Theta \in [K, K]$ は、次の形に一意的に書ける。

$$(3.6) \qquad \Theta = \begin{bmatrix} \theta_{11} & \theta_{12} & \cdots & \theta_{1r} \\ \theta_{21} & & & \vdots \\ \vdots & & \theta_{hs} & \vdots \\ \theta_{r1} & & \cdots & \theta_{rr} \end{bmatrix}$$

（ただし　$\theta_{hs} \in [K_h, K_s]$）

$$\theta_{hs} = a_{hs}\sigma_{hs} + b_{hs}\lambda_{hs} + g_{hs}$$

$$(a_{hs}, b_{hs} \in \mathbb{Z} ; \quad g_{hs} \in G_{hs})$$

そこで、このとき、$(3r \times 3r)$－行列 $F(\Theta)$ を、

$$(3.7) \qquad F(\Theta) = \begin{bmatrix} A & 0 & 0 \\ 0 & A+B & \Gamma \\ 0 & 0 & A \end{bmatrix}$$ とおく

ただし、

$$\left\{\begin{array}{l} A = \begin{bmatrix} a_{11} & & a_{1r} \\ \vdots & & \\ a_{r1} & \cdots & a_{rr} \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} b_{11} & & b_{1r} \\ \vdots & & \\ b_{r1} & \cdots & b_{rr} \end{bmatrix} \in \mathrm{Mat}(r, \mathbb{Z}) \\ \Gamma = \begin{bmatrix} g'_{11} & & g'_{1r} \\ \vdots & & \\ g'_{r1} & \cdots & g'_{rr} \end{bmatrix} \in \mathrm{Mat}(r, \pi_m(S^n)) \end{array}\right.$$

一般に、

$$\begin{bmatrix} A' & 0 & 0 \\ 0 & A'+B' & \Gamma' \\ 0 & 0 & A' \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} A & 0 & 0 \\ 0 & A+B & \Gamma \\ 0 & 0 & A \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A'A & 0 & 0 \\ 0 & A'A+(B'A+AB'+B'B) & \tilde{\Gamma} \\ 0 & 0 & A'A \end{bmatrix}$$

$$(\text{ただし} \quad \tilde{\Gamma} = (A'+B')\Gamma + \Gamma' A)$$

に注意すると、各 abelian group G に対して、次の $(3r \times 3r)$-行列

$$\begin{bmatrix} A & 0 & 0 \\ 0 & A+B & \Gamma \\ 0 & 0 & A \end{bmatrix} \qquad \text{ただし} \left\{\begin{array}{l} A, B \in \mathrm{Mat}(r, \mathbb{Z}) \\ \Gamma \in \mathrm{Mat}(r, G) \end{array}\right.$$

全体のなす matrix ring $M(r; G)$ が定義できる。

とくに、命題(3.5)と(3.7)に注意すると、$2n \geqq m+2$ のとき group isomorphism

$$F: [K, K] \xrightarrow{\cong} M(r; \pi_m(S^n))$$

が定義できる。実は、もっと強く、次のことも言える。

定理 3.8 ([14])

$2n \geqq m+2$ のとき、 F は、環の同型

$$F: [K, K] \xrightarrow{\cong} M(r; \pi_m(S^n))$$ を与える.

とくに、各非可換環 R に対して、その可逆元全体のつくる群を $\mathrm{Inv}(R)$ とおく：

$$\mathrm{Inv}(R) = \{ x \in R \mid \exists x^{-1} \in R \}$$

このとき、

系 3.9 ([14])

$2n \geqq m+2$ のとき、 $\mathcal{E}(K) \cong \mathrm{Inv}(M(r; \pi_m(S^n)))$

§4 定理の証明

今、$X_1, \cdots X_r, X_1', \cdots X_r'$ を定理Aの仮定を満足するように与える。 まず次のことに注意する。

補題 4.1 (S. Sasao, [5])

各 X_k, X_k' は、次の形の cell 分解を持つ.

$$X_k = K_k \cup_{\rho_k} e^{n+m}$$

$$X_k' = K_k \cup_{\rho_k'} e^{n+m}$$

ただし、
$$\begin{cases} \rho_k = i_{k*}\lambda(\gamma_k) + [\xi_k, i_k] \in \pi_{n+m-1}(K_k) \\ \rho'_k = i_{k*}\lambda(\gamma'_k) + [\xi_k, i_k] \in \pi_{n+m-1}(K_k) \\ \lambda(X_k) = [\lambda(\gamma_k)],\ \lambda(X'_k) = [\lambda(\gamma'_k)] \\ \quad (1 \leqq k \leqq r) \end{cases}$$

したがって、$X = \#_{i=1}^{r} X_i$, $X' = \#_{i=1}^{r} X_i'$ とおくと、

$$(4.2) \quad \begin{cases} X = K \cup_{\rho} e^{n+m} \\ X' = K \cup_{\rho'} e^{n+m} \end{cases}$$

ただし、

$$\rho = \sum_{k=1}^{r} j_{k*}\rho_k, \quad \rho' = \sum_{k=1}^{r} j_{k*}\rho'_k \in \pi_{n+m-1}(K)$$

($j_k : K_k \hookrightarrow K$: k-th factor への inclusion map)

今、$\Theta = [K, K]$ を、(3.6)の形の元とすると、容易な計算により

$$(4.3) \quad \Theta \circ \rho = \sum_{s=1}^{r} j_{s*}\Big(\sum_{k=1}^{r} a_{ks}\, i_{s*}\lambda(\gamma_k) + \sum_{k=1}^{r} c_{ks}(a_{ks}+b_{ks}) [\xi_s, i_s] + \sum_{k=1}^{r} i_{s*}[g'_{ks}, \iota_n] \Big)$$

(ただし $g_{ks} = i_s \circ g'_{ks} \circ p_k$, $g'_{ks} \in \pi_m(S^n)$)

以上の準備のもとに、定理Aを示す。

$\Rightarrow$: まず、XとX'が、ホモトピー同値であると仮定する。

命題3.1により、 $\exists\, \Theta \in \mathcal{E}(K)$; $\Theta \circ \rho = \pm \rho'$

よって、このとき、(4.2), (4.3) から、

$$\lambda(\gamma_s') \equiv \pm \sum_{t=1}^{r} a_{ts}\, \lambda(\gamma_t) \mod \rho\,\pi_m(S^n)$$

$$(1 \leqq \forall s \leqq r)$$

そこで、
$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1r} \\ \vdots & & \\ a_{r1} & \cdots & a_{rr} \end{bmatrix} \in \mathrm{Mat}(r, \mathbb{Z})$$
とおくと、

$${}^t(\lambda(x_1'), \dots, \lambda(x_r')) = A \cdot {}^t(\lambda(x_1), \dots, \lambda(x_r))$$

とくに、$\Theta \in \mathcal{E}(K)$ より、系3.9を用いると $A \in GL(r, \mathbb{Z})$

したがって前半は示された。

$\Leftarrow$: 逆に、${}^t(\lambda(x_1'), \dots, \lambda(x_r')) = A \cdot {}^t(\lambda(x_1), \dots, \lambda(x_r))$

を満足する $A \in GL(r, \mathbb{Z})$ が、与えられたと仮定する。

今、$A = (a_{ts})$ とおく。一般性を失うことなく、

$$(4.4) \qquad \lambda(\gamma_s') = \sum_{t=1}^{r} a_{ts}\, \lambda(\gamma_t) \qquad (1 \leqq s \leqq r)$$

と仮定してよい。

各 $(r \times r)$-行列 $B = \begin{bmatrix} b_{ts} \end{bmatrix} \in \mathrm{Mat}(r, \mathbb{Z})$ に対して、

$$\Theta_B = \begin{bmatrix} \theta_{11} & \cdots & \theta_{1r} \\ \vdots & & \vdots \\ \theta_{r1} & & \theta_{rr} \end{bmatrix} \in [K, K]$$
とおく。

（ただし、　$\theta_{hs} = a_{hs} + b_{hs}\lambda_{hs} \in [K_h, K_s]$ ）

このとき、(4.3) により、

(4.5)　$\Theta_B \circ \rho = \rho' \iff \sum_{h=1}^{r} a_{hs}(a_{hs} + b_{hs}) = 1$

$(1 \leqq \forall s \leqq r)$

$\iff {}^tA \cdot (A+B) = \begin{bmatrix} 1 & & * \\ & \ddots & \\ * & & 1 \end{bmatrix}$

また、系 3.9 により、

(4.6)　$\Theta_B \in \mathcal{E}(K) \iff A+B \in GL(r, \mathbb{Z})$

そこで、$A \in GL(r, \mathbb{Z})$ に注意して、　$B = ({}^tA)^{-1} - A$ とおくと、

$$\begin{cases} A+B \in GL(r, \mathbb{Z}) \quad \text{かつ、} \\ {}^tA(A+B) = E_r = \begin{bmatrix} 1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & 1 \end{bmatrix} \end{cases}$$

したがって、(4.5)，(4.6) により、X と X′ はホモトピー同値となる。

以上で定理 A は示された。

定理 B の証明は、もはや、定理 A の系にすぎない。

References.

1 P.Hilton and J.Roitberg : Note on quasifibrations and fibre bundles, Illinois J. Math., 15 (1971), 1-8.

2 H.Ishimoto : Homotopy classification of connected sums of sphere bundles over spheres I, II, Nagoya Math. J., 83 (1981), 15-36; Publ. RIMS. Kyoto Univ., 18 (1982), 307-324.

3 I.M.James and J.H.C.Whitehead : The homotopy theory of sphere bundles over spheres I, II, Proc. London Math. Soc., 4 (1954), 196-218; ibid., 5 (1955), 148-166.

4 S.Oka : Groups of self-equivalences of certain complexes, Hiroshima Math. J., 2 (1972), 285-298.

5 S.Sasao : Homotopy types of spherical fibre spaces over spheres, Pacific J. Math., 52 (1974), 207-219.

6 L.Smith : Manifolds with few cells and the stable homotopy of spheres, Proc. A.M.S., 31 (1972), 279-284.

7 M.Spivak : Spaces satisfying Poincaré duality, Topology, 6 (1967), 77-101.

8 J.D.Stasheff : A classification theorem for fibre spaces, Topology, 2 (1963), 239-246.

9 B.Steer : Extensions of mapping into H-spaces, Proc. London Math. Soc., 13 (1963), 219-272.

10 R.Stöcker : Note on quasifibrations and manifolds, Proc. A.M.S., 43 (1974), 219-225.

11 I.Tamura : On the classification of sufficiently connected manifolds, J. Math. Soc. Japan, 20 (1968), 371-389.

12 C.T.C.Wall : Poincaré complexes I, Annals of Math., 86 (1967), 213-245.

13 C.Wissemann Hartmann : Spherical fibrations and manifolds, Math. Z., 177 (1981), 187-192.

14 K.Yamaguchi : On the self-homotopy equivalences of the wedge of certain complexes, to appear in Kodai Math. J. (1983).

15 ___________: Homotopy types of connected sums of spherical fibre spaces over spheres, preprint.