数理解析研究所講究録
第 505 巻 1983 年 107-115

球面上の S^3-主バンドルのホモトピー同値類群

東工大理　笹尾　靖也 (Seiya Sasao)

位相空間Xから X へのホモトピー同値写像のホモトピー類はコンポジションを積として群をつくるから，この群を記号 $\mathcal{E}(X)$ で表わす。この群は一般に可換群でないので，その群の構造を決定することが困難である。多くの研究者によって，特別な性質をもった，あるいは具体的な空間についてこの群の構造の研究がおこなわれているが，本講も，空間 X が，S^n 上の S^3-主バンドルの全空間の場合に，$\mathcal{E}(X)$ の構造を考察することを目標とする。この場合には，群 S^3 が X に自由に作用しているので，この点を利用して考えようというのが特徴である。

$p: X \longrightarrow S^n$ を特性類を ξ $(\in \pi_{n-1}(S^3))$ とする S^3-主バンドルとしよう $(n \geqq 6)$。X が CW-分割：

$$X = S^3 \cup e^n \cup e^{n+3}, \quad A = S^3 \underset{\xi}{\cup} e^n$$

をもっていることは明らかである。他方，上記ファイバー空

間より次のファイバー空間が得られることはよく知られている。

$$p^X : X^X \longrightarrow S^{nX}$$

ここで一般にX^YはYからXへの連続写像の空間で，コンパクト—開位相を与えられたものである。X^XとS^{nX}の基点として，それぞれ，1_X及びpをえらぶことにする。このとき次の完全系列が得られる：

$$\pi_1(X^X, 1_X) \longrightarrow \pi_1(S^{nX}, p) \longrightarrow \pi_0(p^{X^{-1}}(p), 1_X) \longrightarrow \pi_0(X^X, 1_X) \longrightarrow \pi_0(S^{nX}, p)$$

ここで$p^{X^{-1}}(p)$は空間S^{3X}と同一視できるし，更にS^{3X}に次の積を導入する：

$$f * g(x) = f(g(x)\cdot x)\cdot g(x) \quad , \quad f, g \in \pi_0(S^{nX}, p)$$

するとこの積について，S^{3X}と$p^{X^{-1}}(p)$は半群として同型になるから$\pi_0(p^{X^{-1}}(p), 1_X)$と$\pi_0(S^{3X}, e)$は半群として同じである。一般に半群Gに対して，その正則元全体がつくる群をreg. Gとかくことにしよう。すると以上の考察より，上記完全系列は更に次の完全系列へと変身する。

$$\pi_1(X^X, 1_X) \longrightarrow \pi_1(S^{nX}, p) \longrightarrow \mathrm{reg.}[X, S^3] \longrightarrow \mathcal{E}(X) \longrightarrow \pi_0(S^{nX}, p)$$

したがって我々の問題は

(1) $\mathcal{E}(X) \longrightarrow \pi_0(S^{nX}, p)$ の像を決定する

(2) $\pi_1(S^{nX}, p) \longrightarrow \mathrm{reg.}[X, S^3]$ の像を決定する

の2つになる。しかし，このためには，それぞれの群や集合をよく知られた概念で表わさねばならない。

まず，$\pi_0(S^n \overset{X}{,} p)$を考えよう。次のファイバー空間のホモトピー完全系列を利用する。以下，本講では$\underline{n \geq 6}$と仮定する。ファイバー空間：$\underset{1 \vee 0}{\overset{\Downarrow}{S^n \vee S^{n+3}}} \longrightarrow \underset{p}{\overset{\Downarrow}{X}} \longrightarrow \underset{*}{\overset{\Downarrow}{S^{n\, S^3}}}$ は $X \to S^n$ の制限を$S^3 \longrightarrow S^n$ n 与えることで得られる。したがって，

$$ \dashrightarrow [S^4, S^n]_0 \to [S^n \vee S^{n+3}, S^n]_{1 \vee 0} \to [X, S^n]_p \to [S^3, S^n]_0 $$

は完全系列である。$[S^3, S^n]_0 = [S^4, S^n]_0 = 0$ だから，

(A) $\qquad [S^n \vee S^{n+3}, S^n]_{1\vee 0} \longleftrightarrow [X, S^n]_p$ （1対1対応）

が得られる。

$$f,\ g \in [S^n \vee S^{n+3}, S^n] = [S^n, S^n] \times [S^{n+3}, S^n]$$

だから $f = (m, \alpha)$ $g = (n, \beta)$ ，$m, n \in \mathbb{Z}$ としよう。このとき

$$f \triangledown g = (m, \alpha) \triangledown (n, \beta) = (m.n,\ m\beta + n\alpha)$$

で f と g の積をつくる。この積で $[S^n \vee S^{n+3}, S^n]$ が半群になることがわかる。

さて，我々の目標は $\mathcal{E}(X)$ にあるが，Xはそのコホモロジー環を考えると，写像 $X \xrightarrow{f} X$ は3次元とn次元で次数をもつことがわかるから，$d_3(f)$，$d_n(f)$でそれぞれの次数を表わそう。そしてその Kernel を $\mathcal{E}_+(X)$で表わすと次の自明な完全系列が得られる。

$$1 \longrightarrow \mathcal{E}_+(X) \longrightarrow \mathcal{E}(X) \xrightarrow{(d_3, d_n)} \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2$$

<u>命題1</u>. $\mathcal{E}(X) \longrightarrow \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2$ について次の事項が成立する。

(1) onto 写像である。<u>もし $2\xi = 0$</u> ならば。

(2) $1 \times \mathbb{Z}_2$ への onto 写像である。<u>それ以外の場合</u>

次に $\mathcal{E}_+(X)$ を考察する。次の <u>*diagram*</u> を考えよう。

$$
\begin{array}{ccccccccc}
1 & \longrightarrow & \pi_{n+3}(S^n) & \longrightarrow & \mathbb{Z}_2 \times \pi_{n+3}(S^n) & \longrightarrow & \mathbb{Z}_2 & \longrightarrow & 0 \\
 & & \uparrow & & \uparrow & & \uparrow & & \\
1 & \longrightarrow & \mathcal{E}_+(X) & \longrightarrow & \mathcal{E}(X) & \longrightarrow & \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2 & & \\
 & & \uparrow & & \uparrow & & \uparrow & & \\
1 & \longrightarrow & \mathrm{reg.}[X, S^3]_0 & \longrightarrow & \mathrm{reg.}[X, S^3] & \longrightarrow & \mathbb{Z}_2 & & \\
 & & \uparrow & & & & & & \\
 & & \pi_1({S^n}^X, p) & & & & & & \\
 & & \uparrow & & & & & & \\
 & & \pi_1(X^X, 1_X) & & & & & &
\end{array}
$$

<u>命題2</u>. $\mathcal{E}_+(X)$ の $\pi_{n+3}(S^n)$ への像について次のことがいえる。

(1) $2\xi = 0$ ならば

$$\pi_{n+3}(S^n) \supset \{\alpha \mid \xi \circ E^{-1}\alpha \in \{\tau \circ E\xi\}\} = G_\xi$$

(2) それ以外ならば

$$\pi_{n+3}(S^n) \supset \{\alpha \mid \xi_0 E^n\alpha = 0\} = G_\xi$$

ここでνは Blakers-Massey 写像：$S^6 \longrightarrow S^3$ である。

次に $[X, S^3]$ を考察しよう。$[X, S^3]$ の積の定義を考えてみると，$f \in [X, S^3]$ が $\mathrm{Veg.}[X, S^3]$ に入るためには，ある $g \in [X, S^3]$ があって

$$d_3(f)(d_3(g)+1) + d_3(g) = 0$$

が成立しなければならない。つまり

$$(d_3(f)+1)(d_3(g)+1) = 1$$

となって，$d_3(f) = 0 = d_3(g)$ 又は $d_3(f) = -2 = d_3(g)$ でなければならない。更に $d_3(f) = -2$ の場合を考えてみると次のことがわかる。

~~命題3.~~ $f \in [X, S^3]$ のとき，更に $f \in \mathrm{Veg.}[X, S^3]$ となる必要十分な条件は，

もし $2\xi = 0 = \nu_0 E^3\xi$ なら $d_3(f) = 0$ 又は -2，

それ以外ならば $d_3(f) = 0$

そこで $\mathrm{Veg.}[X, S^3]$ の元で $d_3(f) = 0$ となるものの部分群を $\mathrm{Veg.}[X, S^3]_0$ とかくわけである。(4ページの図)

ところで $[X, S^3]_0$ をまず考えてみる。$[X, S^n]_p$ と同様にして，次の完全系列が得られる。

$$[EX, S^3] \longrightarrow [S^4, S^3] \longrightarrow [S^n \vee S^{n+3}, S^3] \longrightarrow [X, S^3]_0 \longrightarrow 0$$

ここで最後の矢印は準同型になっていることを注意する。

つまり $[X, S^3]_0 = \mathrm{reg}_0[X, S^3]_0$ が成り立つわけである。従って $[S^4, S^3] \longrightarrow [S^n, S^3] \times [S^{n+3}, S^3]$ の像がわかれば $\mathrm{reg}_0[X, S^3]_0$ が得られることになる。

命題4. $x \in [S^4, S^3]$ の像は $(x \circ E\xi \times x \circ J(\xi))$ である。

最後に $\pi_1(X^X, 1_X) \longrightarrow \pi_1(S^{n^X}, p)$ の像を決定しなければならない。

命題5. $\pi_1(S^{n^X}, p) \cong \mathbb{Z}_2$

このことは次の完全系列を考えれば明らかであろう。

$$\begin{array}{ccccccc}
\pi_1(S^{n^{S^3}}, *) & \longrightarrow & \pi_1(S^{n^{S^n \vee S^{n+3}}}, 1 \vee 0) & \longrightarrow & \pi_1(S^{n^X}, p) & \longrightarrow & \pi_0(S^{n^{S^3}}, *) \\
\wr\| & & \wr\| & & & & \wr\| \\
0 & & \pi_{n+1}(S^n) \oplus \pi_{n+4}(S^n) & & & & 0 \quad (n \geq 6)
\end{array}$$

したがって準同型写像 $\pi_1(X^X, 1_X) \xrightarrow[p_*^X]{} \pi_1(S^{n^X}, p)$ はゼロ写像か onto 写像かのいずれかである。そこで次の図を考えよう。

$$\begin{tikzcd}
 & \pi_n(S^3) & & \\
 & \mathbb{Z}_2[\eta] \cong \pi_{n+1}(S^n) \arrow[u, "\partial = \xi \circ E^{-1}"] & \pi_1(X^X, 1_X) \arrow[r, "p_*^X"] \arrow[d, "r_*"] & \pi_1(S^{n^X}, p) \cong \mathbb{Z}_2 \arrow[d, "r_*", "\cong"'] \\
 & \pi_{n+1}(X) \arrow[u, "p_*"] \arrow[r, "①"] & \pi_1(X^A, i_A) \arrow[r, "p^A_*", "③"'] \arrow[d, "①"] & \pi_1(S^{n^A}, p_A) \cong \mathbb{Z}_2 \\
\pi_{n+1}(S^3) \arrow[ur, "i_{3*}"] \arrow[r, "②"'] & \pi_1(S^{3^A}, *) \arrow[ur, Rightarrow, "③"'] \arrow[d, "②"] \arrow[r, Rightarrow, "\cong"'] & \pi_1(X^{S^3}, i_3) \cong \mathbb{Z}_2[\eta] \arrow[d, "①"] & \\
 & \mathbb{Z}_2[\eta] \cong \pi_1(S^3, *) \arrow[d, "②"] & \pi_n(X) \ni i_3 \cdot \eta \cdot E\xi \quad (\text{B-B Th}) & \\
 & \eta \circ E\xi \in \pi_n(S^3) \arrow[ur, Rightarrow] & &
\end{tikzcd}$$

"p_*^X が onto ⇒ p_*^A が onto" 又は "p_*^A がゼロなら p_*^X もゼロ" がいえるから、われわれは p_*^A を考える。このとき次のことがいえる。(上図を参考にして)

命題6 $\xi \circ \eta \neq 0$ とする。

(1) $\eta_0 E\xi \notin \{\xi\eta\}$ ならば p_*^A はゼロである。なぜならば $\pi_1(X^A, i_A) \longrightarrow \pi_1(X^{S^3}, i_3)$ が onto だから。

(2) $\eta_0 E\xi = 0$ ならば p_*^A はゼロである。こんどは $\pi_1(S^{3A}, *) \longrightarrow \pi_1(X^A, i_A)$ が onto だから。

(3) $\eta_0 E\xi = \xi \circ \eta$ (i.e. $\eta_0 E\xi \neq 0$ で $\eta_0 E\xi \in \{\xi\eta\}$) のとき p_*^A は onto である。なぜならば、$\pi_1(X^A, i_A)$ の元で $\pi_1(S^{3A}, *) \to \pi_1(X^A, i_A)$ の像に入らないものがあるから。

次に $\xi \circ \eta = 0$ としよう。このとき $\pi_{n+1}(X)$ の元 η_X で $p_*(\eta_X) = \eta$ $(\in \pi_{n+1}(S^n))$ となるものがある。そこで $\pi_{n+1}(X) \longrightarrow \pi_{n+1}(X^A, i_A)$ による η_X の像を $\hat{\eta}_*$ とかくことにする。

命題7 $\hat{\eta}_X$ は $\pi_1(X^X, 1_X) \longrightarrow \pi_1(X^A, i_A)$ の像に含まれるのは Whitehead product $[\eta_X, i_3]$ $(\in \pi_{n+3}(X))$ がゼロのときに限る。

注: $[\eta_X, i_3]$ は η_X のとり方に無関係に定まる。η_X の比値は $p_*(\eta_X) = \eta$ のみである。

結局上記命題7を使って次の命題が得られる。

命題8　$\xi\eta=0$ とする。

(1)　$[\iota_3, \eta]=0$ なら $P^\times_*$ は onto である。

(2)　$[\iota_3, \eta]\neq 0$ なら $P^\times_*$ はゼロである。

これらを合せて，最終的な結果として次の命題が得られる。

命題9　$\pi_1(X^\times, 1_X) \longrightarrow \pi_1(S^{n\times}, p)$ について。

(1)　$\xi\eta=0=[\iota_3, \eta] \Longrightarrow$ onto である。

(2)　$\xi\eta=0\neq[\iota_3, \eta] \Longrightarrow$ ゼロである。

(3)　$\xi\eta\neq 0 \Longrightarrow$ ゼロである。　但し $\eta\circ E\xi=\xi\circ\eta$ を除く。

注意　$0\neq\xi\circ\eta=\eta\circ E\xi$ の場合が結局未解決の場合として残った。

具体的なnについての計算は，結局，球面のホモトピー群についての知識によりきまるので一般的には困難である。たとえば $n=7$ の場合に J.W. Rutter 氏の完全な結果があるが，われわれの一般的結果から得られるものと，そのレベルでは一致している。われわれの方法は一般的であるために extension の形を決定するのが困難であるが，J.W. Rutter 氏の場合は $n=7$ の特殊性を充分に使うことで，extension も完全に決定しているわけである。なお，これは一説にR氏もわれわれの場合をすでに考えられたとのことであるが，なにか条件付きとのことであった。

Rutter氏や三村－渡辺氏の方法はBarcus－Barrettの方法を用いるもので，われわれの方法とは違っている。われわれの方法に，更にBarcus－Barrettの方法を組み合せれば，条件付きであるが，ある場合にはextensionの形を部分的に決めることはできる。できればわれわれの定理におけるextensionの形も完全に決定したいものである。

以上

参考文献

1. Barcus .W.D and M.G.Barratt, Onthe homotopy classification of the extensions of a fixed map. Tran. Amer. Math. Soc., 88,(1958),57-74.
2. J.W.Rutter, The group of self-homotopy equivalences of principal three bundles over the seven sphere. Math. Camb. phil. Soc.,84(1978),303-311.