数理解析研究所講究録
第510巻 1984年 59-88

球と細長い物体のおそい運動

東大生研　成瀬 文雄　(Humio Naruse)

§1. 序

球と細長い物体が流体中でともにおそい運動をするときの流れは、ストークス近似で取扱うことができるが、この問題をストークス方程式の境界値問題として直接解くことは難しい場合が多い。その場合、細長い物体の中心線上にストークス源を分布させ、これらストークス源の強さおよび方向を未知関数とする積分方程式をストークス方程式より導出し、この積分方程式を解くことによって精度のよい解が得られる。

このような積分方程式を解くときの方法として、(I) 球による流れをストークス源による流れでおき換え、細長い物体の中心線上に分布しているストークス源との相互の干渉効果を考慮して解く方法、すなわち、球が比較的小さいときに適切な計算方法、(II) 球の外に1個のストークス源があるとき球上で流体が静止するという境界条件を満たすために要求さ

れる補正関数を導入し、これを積分方程式に組み込んで解く方法、すなわち、球が任意の大きさであるときに適切な方法の二つの方法が考えられる。

ここで、この問題に関するいままでの研究について述べよう。まず、球と有限の長さの細長い直線棒(横断面の形は円)によって構成される物体が前進するときの流れが、N. J. De Meste et al.[1] によって解析的に研究され、(II)の方法による積分方程式の近似解および物体に働く抵抗が $O(\varepsilon^2)$ ($\varepsilon=(\log l/b)^{-1}$, l は細長い物体の代表的長さ、b は横断面の大きさ)まで得られている。また、小さい球と細長いリング(任意の形の横断面)がおそい運動をするときの流れが、成瀬[2]によって(I)の方法で解析され、物体に働く力やトルクが積分方程式の厳密解として決定されている。さらに、無限に広がる流体中をべん毛(横断面の形が円)の波動運動により前進している微生物(頭部は球と仮定、以下同じ)のまわりの流れを、J. J. L. Higdon[3), 4)] は(II)の方法で、R. D. Dresdner et al.[5)]は(I)の方法で、積分方程式を数値的に解き、前進速度や効率を求めている。また、成瀬[6)]はべん毛(任意の形の横断面)の波動運動により微生物が壁に沿って前進する場合を、(I)の方法で積分方程式を近似的に解析し、前進速度や壁に近付く速度の式を得ている。さらに、J. J. L.

Higdon[7] は壁に頭部を固定された微生物が、べん毛(横断面の形は円)の波動運動により、どのような流れを誘起するかを(II)の方法で調べ、流量を決定している。

本論文では、おそい運動をしている球の外または内で、任意の横断面形をもつ細長い物体がおそい運動をしている場合を取扱う。まず、§2で、球の外または内にストークス源があるとき、球上で流体が静止しているという境界条件を満たすために要求される補正関数、および、上記ストークス源による流れがあるために球に働く力とトルクについて述べる。つぎに、§3では、この補正関数が組み込まれ、かつ、細長い物体の中心線上に分布されたストークス源を未知関数とする積分方程式を構成する。一般に、この種の積分方程式は厳密解を求めることが困難である場合が多い。しかし、細長い物体が細長いリングである場合には、厳密解が得られる。筆者は、いままでに、リングのみがあるとき[8]、一枚の壁とリング[9]、二つのリング[2]、小さい球とリング[2]などの場合について、厳密解を求めてきた。任意の大きさの球と細長いリングが運動しているときでも、リング面が球とリングの中心を通る直線に垂直である場合には、種々の場合に対し、厳密解を求めることができる。すなわち、§4～§6においては、球およびリングが、それぞれ、(i)リング面に垂直方向

に運動するとき、(ii) リング面に垂直な軸のまわりに回転するとき、(iii) リング面に平行な方向に運動するとき、の三つの場合について、§7では、球とリングの中心が一致し、かつ、リング面内にある軸のまわりにそれぞれが回転する場合について、厳密解を導出する。とくに、(i), (ii) の場合には、厳密解の式を具体的に計算し、球やリングに働く力、トルクの諸性質を明らかにする。

§2. 補正関数と球に働く力、モーメント

静止する球の外または内にストークス源があるときに、球上で流体が静止するという境界条件を満たすために要求される補正関数は、Oseen[10] によってつぎのように与えられている。図1に示されるように、半径 $\hat{a}$ の球が静止の状態にあり、その中心を座標軸の原点にとる。また、長さは代表的長さ l で、速度は代表的速度 U_0 で無次元化し、次元のある量には ^ をつけ、無次元の量は ^ をとって表わすことにする。球の外または内にある一点 X_j に強さ C_j のストークス源があるときの速度 $q_j(x)$, 圧力 $p(x)$ はつぎのように表わされる。

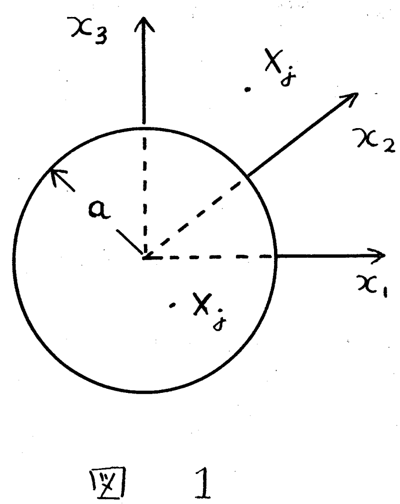


図 1

$$\left.\begin{aligned} q_j(x) &= \left[S_{jk}(x, X) + G_{jk}(x, X) \right] C_k \\ p(x) &= \left[p_k(x, X) + P_k(x, X) \right] C_k \end{aligned}\right\} \quad (1)$$

ここで、S_{jk}, p_k は X 点にあるストークス源が無限に広がる流体中にあるときの流れに関するもので、

$$\left.\begin{aligned} S_{jk}(x, X) &= -\delta_{jk}/\bar{r} - (x_j - X_j)(x_k - X_k)/\bar{r}^3 \\ p_k(x, X) &= -2(x_k - X_k)/\bar{r}^3, \qquad \bar{r} = \sqrt{(x_\ell - X_\ell)(x_\ell - X_\ell)} \end{aligned}\right\} \quad (2)$$

であり、$G_{jk}(x, X)$, $P_k(x, X)$ は球が存在するために必要な補正関数でつぎの形をもつ。

$$\left.\begin{aligned} G_{jk} =& \frac{a}{R}\frac{\delta_{jk}}{r^*} + \frac{a^3}{R^3}\frac{(x_j - X_j^*)(x_k - X_k^*)}{r^{*3}} + \frac{R^2 - a^2}{R}\left[\frac{X_j^* X_k^*}{a^3 r^*} - \frac{a}{R^2 r^{*3}}\left\{ X_j^*(x_k - X_k^*) \right.\right. \\ & \left.\left. + X_k^*(x_j - X_j^*) + \frac{2X_j^* X_k^*}{a^3}\frac{X_\ell^*(x_\ell - X_\ell^*)}{r^{*3}} \right\}\right] + (r^2 - a^2)\frac{\partial \phi_k}{\partial x_j} \\ P_k =& \frac{2a^3}{R^3}\frac{(x_k - X_k^*)}{r^{*3}} + 2\left(\phi_k + 2x_\ell \frac{\partial \phi_k}{\partial x_\ell} \right) \end{aligned}\right\} \quad (3)$$

ここで、

$$X_j^* = \frac{a^2}{X_j}, \quad r = \sqrt{x_\ell x_\ell}, \quad R = \sqrt{X_\ell X_\ell}, \quad R^* = \sqrt{X_\ell^* X_\ell^*}, \quad r^* = \sqrt{(x_\ell - X_\ell^*)(x_\ell - X_\ell^*)} \quad \cdots (4)$$

で、また、ϕ_k はストークス源が球の外にあるか、または、内にあるかによって異なり

(i) ストークス源が球の外にあるとき（以下 Case I とする）

$$\phi_k = \frac{R^2 - a^2}{2R^3}\left\{ \frac{3X_k}{a r^*} + \frac{a(x_k - X_k^*)}{r^{*3}} - \frac{2X_k X_\ell^*}{a}\frac{(x_\ell - X_\ell^*)}{r^{*3}} + \frac{3a}{R^*}\frac{\partial}{\partial X_k^*}\log\frac{r^* R^* + x_\ell X_\ell^* - R^{*2}}{r R^* + x_\ell X_\ell^*} \right\} \quad (5)$$

(ii) ストークス源が球の内にあるとき（以下 Case II とする）

$$\phi_k = \frac{R^2-a^2}{2R^3}\left\{\frac{3X_k}{aR^*} + \frac{a(x_k - X_k^*)}{r^{*3}} - \frac{2X_k X_\ell^*}{a}\frac{(x_\ell - X_\ell^*)}{r^{*3}} + \frac{3}{a}\frac{(r - R^*\cos\vartheta + r^*\cos\vartheta)(a^2 x_k - X_k x_\ell X_\ell^*)}{r r^* R^{*2}\sin^2\vartheta}\right\} \quad \cdots\cdots (6)$$

で、ただし

$$\cos\vartheta = x_\ell X_\ell^* / rR^* \qquad (7)$$

である。(1) で表示されるような流れが球に及ぼす力およびモーメントについて考える。

(i) Case I のとき：

$r \gg 1$ のときの G_{jk}, P_k の振る舞いを調べる。すなわち、補正関数による流れが球の内部にどのような singularity (ストークス源、回転源など) があるときと同等の流れになるかを調べることによってつぎのように得られる[3]. 図2のように、$\mathbb{e}_r$ は r 方向の単位ベクトル、$\mathbb{e}_t$ を $\mathbb{e}_r$ に垂直な単位ベクトルとし、強さ $\mathbb{C}$ のストークス源を

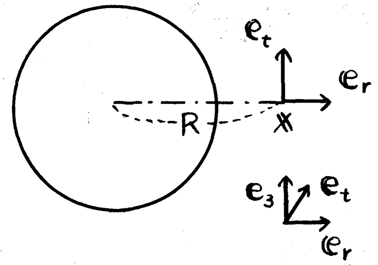


図 2

$$\mathbb{C} = C_r \mathbb{e}_r + C_t \mathbb{e}_t \qquad (8)$$

のように分解する。$\mathbb{e}_r$ 方向のストークス源 C_r のみが存在するときに、球に働く力 $\mathbb{F}$ およびモーメント $\mathbb{M}$ は、μ は粘性率を表わすとして、

$$\mathbb{F} = -8\pi\mu U_0 \ell C_r \left(3a/2R - a^3/2R^3 \right)\mathbb{e}_r, \quad \mathbb{M} = 0 \qquad (9)$$

で、$\mathbb{e}_t$ 方向のストークス源 C_t のみが存在するときには

$$\mathbb{F} = -8\pi\mu U_0 \ell C_t \left(3a/4R + a^3/4R^3 \right)\mathbb{e}_r, \quad \mathbb{M} = -8\pi\mu U_0 \ell^2 C_t \left(a^3/R^2 \right)\mathbb{e}_3 \qquad (10)$$

で与えられる。ここで、$\mathbb{e}_3$ は図2で示されるような $\mathbb{e}_r$, $\mathbb{e}_t$

に直交する単位ベクトルである。

(ii) Case II のとき：

ストークス源による流れを作っている微小な物体が一定の速度で動くようなときには、ストークス近似では、球の内部の流れは定常流と考えてよく、ストークス源に働く力やモーメントを打ち消すような力やモーメントが球に働くと考えられる。その結果、ストークス源を(8)のように分解するとき、球に働く力$\mathbb{F}$、モーメント$\mathbb{M}$は

$$\mathbb{F} = -8\pi\mu U_0 l\,(C_r \mathbf{e}_r + C_t \mathbf{e}_t),\quad \mathbb{M} = -8\pi\mu U_0 l^2 R\, C_t \qquad (11)$$

で与えられる。

§3. 細長い物体に対する積分方程式

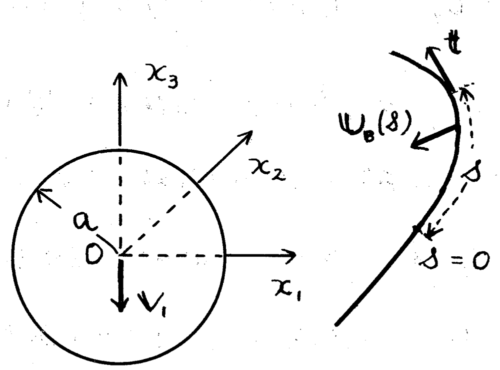


図 3

半径$\hat{a}$、速度$\hat{\mathbb{V}}_1$で動いている球の外または内で、任意の形の横断面（断面の大きさの尺度b）をもつ長さ$2l$の細長い物体が運動している場合を考え、一般の長さはlで、横断面はbで無次元化する。なお、仮定より$b/l \ll 1$と考える。図3のように、細長い物体をその中心線でおき換え、中心線上に強さ、方向とも未定のストークス源$C(s)\mathbf{l}'(s)$を分布させ、細長い物

体に働く力を代表させる。さて、$\mathbb{t}(s)$ を s における接線ベクトル、$\mathbb{i}(s)$，$\mathbb{j}(s)$ を $\mathbb{t}$ に直交し、かつ、お互いに直交する単位ベクトルとし、

$$C(s)\,\mathbb{l}'(s) = \frac{A(s)}{4}\mathbb{t} + \frac{I(s)}{2}\mathbb{i} + \frac{J(s)}{2}\mathbb{j} \tag{12}$$

とおくとき、$A(s)$，$I(s)$，$J(s)$ に対する積分方程式は，壁があるときの積分方程式（文献(9)の(14)式）と同一の形となっており。ただし、前述の式に現われる $\mathbb{q}''(s)$ は壁がある場合には、壁が存在するため s 点に誘起される速度であるが、現在の場合は球が存在するため s 点に誘起される速度と考えればよい。したがって、$A(s)$，$I(s)$，$J(s)$ に対する積分方程式

$$A\left(\lambda' - \frac{1}{2} - \log a_1\right)\mathbb{t} + \left[\left(\lambda' + \frac{1}{2} - \bar{b}_1(s) - \log a_1\right)I - C_1(s)\,J\right]\mathbb{i}$$

$$+ \left[-C_1(s)\,I + \left(\lambda' + \frac{1}{2} + \bar{b}_1(s) - \log a_1\right)J\right]\mathbb{j} + \mathbb{U}_B(s) - \mathbb{U}(s) = \mathbb{K}(s) + \mathbb{q}''(s) \tag{13}$$

が得られる。ここで $\lambda' = \log 2l/b$ であり，a_1，$\bar{b}_1(s)$，$C_1(s)$ は横断面の形によって決まる断面係数で，一般に s の関数であってよく、その求め方は Appendix に示す。また、$\mathbb{K}(s)$ は細長い物体上に存在するストークス源によって s 点に誘起される速度で

$$\mathbb{K}(s) = -\left\{\int_{s_0}^{s-\varepsilon_0} + \int_{s+\varepsilon_0}^{s_2}\right\} C(s')\left\{\frac{\mathbb{l}(s')}{R} + \frac{(\mathbb{l}(s')\cdot\mathbb{R})\mathbb{R}}{R^3}\right\}ds' - (A\mathbb{t} + I\mathbb{i} + J\mathbb{j})\log\varepsilon_0 \tag{14}$$

で表わされる。ただし、ε_0 は $1 \gg \varepsilon_0 \gg b/l$ の微小量，s_0，s_2 は細長い物体の両端の座標であり、$\mathbb{R}$ は s および s' 点の座標を x_j，X_j とおき、x_j 方向の単位ベクトルを $\mathbb{e}_j$ とおいて

$$\mathbb{R} = (x_\ell - X_\ell)\,\mathbb{e}_\ell \tag{15}$$

である。また、$\mathbb{q}''(s)$は、球が静止しているとき、$\int_2$の補正関数G_{jk}によってs点に誘起される速度で、

$$c(s)\,\mathbb{l}'(s) = c_k\,\mathbb{e}_k \tag{16}$$

でストークス源を表示するとき、

$$\mathbb{q}''(s) = \mathbb{e}_j \int_{s_0}^{s_2} G_{jk}(s, s')\, c_k(s')\, ds' \tag{17}$$

となる。ただし、G_{jk}は(3)〜(7)で、x_jとしてはs点の座標を、X_jとしてはs'点の座標を用いたのでよい。さらに、$\mathbb{U}_B(s)$は細長い物体のs点の速度であり、また、$\mathbb{U}(s)$は細長い物体が存在しないとしたときのs点の速度である。例えば、球が$-x_3$方向にV_1で動いているとき、$\mathbb{U}(s)$はつぎの式で与えられる。

$$\left.\begin{aligned} &\text{(i) Case I:} \quad \mathbb{U}(s) = -\frac{3aV_1}{4r^3}\left[\left(1-\frac{a^2}{r^2}\right)x_3 x_j\,\mathbb{e}_j + \left(r^2+\frac{a^2}{3}\right)\mathbb{e}_3\right] \\ &\text{(ii) Case II:} \quad \mathbb{U}(s) = -V_1\,\mathbb{e}_3 \end{aligned}\right\} \tag{18}$$

(13)を解いて、$A(s)$, $I(s)$, $J(s)$が決定されるとき、s点の単位長さ当り働く力$\mathbb{f}$は

$$\mathbb{f} = 8\pi\mu U_0\, C(s)\,\mathbb{l}'(s) = 2\pi\mu U_0 \left\{ A(s)\,\mathbb{t} + 2\left(I(s)\,\mathbb{i} + J(s)\,\mathbb{j} \right) \right\} \tag{19}$$

となり、細長い物体全体に流体が及ぼす力$\mathbb{F}_2$およびP点のまわりのモーメント$\mathbb{M}_2$は

$$\mathbb{F}_2 = \int_{s_0}^{s_2} \mathbb{f}\, ds \,, \qquad \mathbb{M}_2 = \int_{s_0}^{s_2} \mathbb{r}_0(s) \times \mathbb{f}\, ds \tag{20}$$

で与えられる。ここで、$\mathbb{r}_0(s)$ はP点より見たs点の位置ベクトルである。また、球に働く力およびモーメントは、Case I の場合には(9)、(10)を、Case II の場合には(11)を用いて、それぞれ、決定することができる。

(13)は一般には $\varepsilon = 1/\lambda$ の展開で解ける。すなわち、

$$A = \sum_{n=1}^{\infty} A_n \varepsilon^n , \quad I = \sum_{n=1}^{\infty} I_n \varepsilon^n , \quad J = \sum_{n=1}^{\infty} J_n \varepsilon^n \tag{21}$$

のように展開して、(13)に代入するとき、まず、A_1, I_1, J_1 が

$$A_1 \mathbb{t} + I_1 \mathbb{i} + J_1 \mathbb{j} = \mathbb{U}(s) - \mathbb{U}_B(s) \tag{22}$$

より決まる。つぎに、これらの値を $\mathbb{K}(s)$、$\mathbb{g}''(s)$ の A, I, J の所に代入して計算することによって、A_2, I_2, J_2 が求まる。以下、同じような方法で高次近似を決定することができる。しかし、本論文では、§3以降において、細長い物体としてリングを選び、リングと球が運動する場合に存在する(13)の厳密解を種々の場合について求める。

§4. リング面に垂直な運動

本節では、長さを無次元化する l として、リングの半径 ρ を選び、また、リングの横断面は任意の形でよいが、一様であると仮定する。このとき、b を適当に選び、(13)に現われる $\log a_1 = 0$ にすることができる。さらに、図4に示されるように、球の中心Oとリングの中心O′を結ぶ方向に x_3 軸をとり、

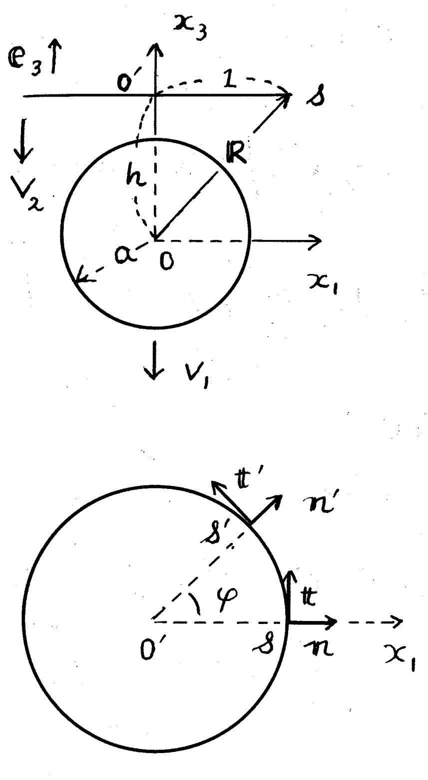


図 4

リングは x_1-x_2 面に平行な面内にある。なお、O と O′ の間の距離を h、$O's$ と $O's'$ のなす角を φ とし、また、$\mathbb{n}$, $\mathbb{t}$ は s 点における法線および接線ベクトルであるとする。

さて、球およびリングは V_1 および V_2 で $-x_3$ 方向に運動している場合を考える。このとき、リング上のストークス源は対称性から

$$c(s)\,\mathbb{i}'(s) = (I/2)\,\mathbb{e}_3 + (J/2)\,\mathbb{n} \qquad (23)$$

のようにおけ、I, J を定数と仮定しておい。また、(13) の $\mathbb{K}$ は (23) を (14) に代入して

$$\mathbb{K} = -2\log 2\, I\, \mathbb{e}_3 + (3-\log 2)\, J\, \mathbb{n} \qquad (24)$$

の如く得られる。なお、$\mathbb{U}_B$, $\mathbb{U}$ は、それぞれ

$$\mathbb{U}_B = -V_2\,\mathbb{e}_3\,, \qquad \mathbb{U} = -E_0 V_1\,\mathbb{e}_3 - G_0 V_1\,\mathbb{n} \qquad (25)$$

で与えられ、E_0, G_0 は

$$\text{Case I:}\quad E_0 = \frac{a}{4R^3}\left\{3(1+2h^2) - \frac{a^2(2h^2-1)}{R^2}\right\}, \quad G_0 = \frac{3ah}{4R^3}\left(1-\frac{a^2}{R^2}\right) \qquad (26)$$

$$\text{Case II:}\quad E_0 = 1\,, \quad G_0 = 0 \qquad (27)$$

となる。ただし $R=\sqrt{1+h^2}$ である。さらに、(17) に (23) を代入すると、$\mathbb{q}''(s)$ はつぎのような形となり、

$$q''(s) = (A_0 I + B_0 J)\mathbf{e}_3 + (C_0 J + D_0 I)\mathbf{n} \tag{28}$$

ここで

$$\left.\begin{aligned} A_0 &= \frac{1}{2}\int_0^{2\pi} G_{33}(\varphi)\,d\varphi \ , \quad B_0 = \frac{1}{2}\left[\int_0^{2\pi} G_{31}(\varphi)\cos\varphi\,d\varphi + \int_0^{2\pi} G_{32}(\varphi)\sin\varphi\,d\varphi\right] \\ C_0 &= \frac{1}{2}\left[\int_0^{2\pi} G_{11}(\varphi)\cos\varphi\,d\varphi + \int_0^{2\pi} G_{12}(\varphi)\sin\varphi\,d\varphi\right] \ , \quad D_0 = \frac{1}{2}\int_0^{2\pi} G_{13}(\varphi)\,d\varphi \end{aligned}\right\} \tag{29}$$

である。ただし、$G_{jk}(\varphi)$ は (3)～(7) の G_{jk} に

$$\left.\begin{aligned} &X_1 = \cos\varphi \ , \quad X_2 = \sin\varphi \ , \quad X_3 = h \ , \quad x_1 = 1 \ , \quad x_2 = 0 \ , \quad x_3 = h \ , \\ &X_1^* = \frac{a^2}{R^2}\cos\varphi \ , \quad X_2^* = \frac{a^2}{R^2}\sin\varphi \ , \quad X_3^* = \frac{a^2 h}{R^2} \ , \quad r = R = \sqrt{1+h^2} \ , \quad R^* = \frac{a^2}{R} \\ &r^* = \sqrt{1 + \frac{h^4}{a^4} + h^2\left(1-\frac{a^2}{R^2}\right)^2 - \frac{2a^2}{R^2}\cos\varphi} \end{aligned}\right\} \tag{30}$$

を代入して得られる φ の関数である。

(24)～(30) を (13) に代入して、$\mathbf{n}$ 方向および $\mathbf{e}_3$ 方向を、それぞれ、満足する式を解けば、I, J はつぎのように決まる。

$$\left.\begin{aligned} I &= \left[(V_2 - E_0 V_1)\left(S - \frac{5}{2} + \bar{b}_1(\mathbf{i}) - C_0\right) - G_0 V_1 \left(C_1(\mathbf{i}) + B_0\right)\right] \Big/ \Delta \\ J &= \left[(V_2 - E_0 V_1)\left(C_1(\mathbf{i}) + D_0\right) - G_0 V_1 \left(S + \frac{1}{2} - \bar{b}_1(\mathbf{i}) - A_0\right)\right] \Big/ \Delta \\ \Delta &= \left(S + \frac{1}{2} - \bar{b}_1(\mathbf{i}) - A_0\right)\left(S - \frac{5}{2} + \bar{b}_1(\mathbf{i}) - C_0\right) - \left(C_1(\mathbf{i}) + B_0\right)\left(C_1(\mathbf{i}) + D_0\right) \end{aligned}\right\} \tag{31}$$

ここで

$$S = \log(8\rho/b) \tag{32}$$

である。さて、リングに働く力 $\mathbb{F}_2$ は (19), (20), (23) より

$$\mathbb{F}_2 = 4\pi\mu U_0 L I \mathbf{e}_3 \tag{33}$$

で与えられる。ここで、$L = 2\pi\rho$ で、I は (31) で得られている。また、球に働く力は Case I のときには、(9), (10), (23)

を用いて、Case II のときは (11)、(23) を用いて

Case I: $$\mathbb{F}_1^{o} = \left[6\pi\mu\hat{V}_1\hat{a} - 2\pi\mu U_0 L\left\{\frac{3a}{2R^3}\left((2h^2+1)I+hJ\right)-\frac{a^3}{2R^5}\left((2h^2-1)I+3hJ\right)\right\}\right]\mathbb{e}_3 \quad \cdots(34)$$

Case II: $$\mathbb{F}_1^{i} = \left[6\pi\mu\hat{V}_1\hat{a} - 4\pi\mu U_0 L I\right]\mathbb{e}_3 \qquad (35)$$

で求めることができる。

いま、$h=0$ のときには、$G_{13}=G_{31}=G_{32}=0$ であるから、$B_0=D_0=0$ となり、(31) の表示には、A_0, C_0 のみが現われる。さらに、リングの横断面の形が $\boldsymbol{i}$ 方向（すなわち、$\mathbb{e}_3$ 方向）に関して対称である場合を考えよう。このとき、$h=0$、$C_1(\boldsymbol{i})=0$ が成立し、(31) の I は

$$I = (V_2 - E_0 V_1)/(S + \tfrac{1}{2} - \bar{b}_1(\boldsymbol{i}) - A_0) \qquad (36)$$

のような簡単な形となる。ここで、E_0 は (26)、(27) で $h=0$ とおけばよい。さて、力の式 (33)~(35) を決定するためには、(29) で A_0 だけを計算すれば十分である。この A_0 は (3)~(7) の G_{33} に $h=0$ とおいた (30) を代入して、Case I $(0<a<1)$、Case II $(1<a<\infty)$ いずれの場合も、つぎの形で表示される。

$$A_0 = \frac{2a}{1+a^2}\left[\left\{1+\frac{3(1-a^2)^2}{4a^4}\right\}K(k)+\left\{\frac{1}{2}-\frac{3(1-a^4)}{4a^4}\right\}E(k)\right] \qquad (37)$$

ただし、$K(k)$, $E(k)$ は第1種および第2種の完全楕円積分であり

$$k = 2a/(1+a^2) \qquad (38)$$

である。$a \ll 1$, $|a-1| \to 0$, $a \gg 1$ のときの A_0 の展開形は

$$a \ll 1 : \qquad A_0 = a\pi \left(\frac{3}{4} + \frac{1}{2}a^2 + \frac{9}{32}a^4 + \cdots \right) \tag{39}$$

$$\left.\begin{aligned} |a-1| \to 0 : \quad & A_0 = \Lambda + \frac{1}{2} - 3k' + \left(3\Lambda - \frac{51}{8}\right)k'^2 + \cdots \\ & \Lambda = \log 4/k', \quad k' = \sqrt{1-k^2} = |a^2-1|/(1+a^2) \end{aligned}\right\} \tag{40}$$

$$a \gg 1 : \qquad A_0 = \frac{3\pi}{a}\left(1 - \frac{4}{3a^2} + \frac{3}{2a^4} - \frac{3}{2a^6} + \cdots \right) \tag{41}$$

いま、$A_0 = 3a\pi/4$ とおけば、球が小さいと仮定し、球による流れをストークス源による流れでおき換えたときの結果[2]と一致する。また、$A_0 = \Lambda + \frac{1}{2}$ とおけば、リングの各素片が、平面壁の付近で壁に平行に運動している2次元物体（同一の断面形をもつ）の1部をなすとして計算される結果[11]と一致する。なお、$a \gg 1$ のときの初項が $A_0 = 3\pi/a$ であることを利用すれば、球の中心で微小な3次元物体が運動するときの抵抗の式

$$\mathbb{F} = \mathbb{F}_0 \Big/ 1 - \frac{3F_0}{8\pi\mu\hat{V}_0\hat{a}} \tag{42}$$

が得られる。ここで、$\mathbb{F}_0$ は任意の3次元物体が $\hat{V}_0$ の速度で、無限に広がる流体中を運動するときの物体に働く力であり、$\mathbb{F}$ はこの物体が半径 $\hat{a}$ の球の中心で同じ運動をするときに働く力を表わす。また $F_0 = |\mathbb{F}_0|$ である。

図5に、A_0 が、a（Case I の場合）または $1/a$（Case II の場合）に対し、どのように変化するかが示されている。ここで、実線はリングが球の外部にあるとき、点線はリングが球の内部

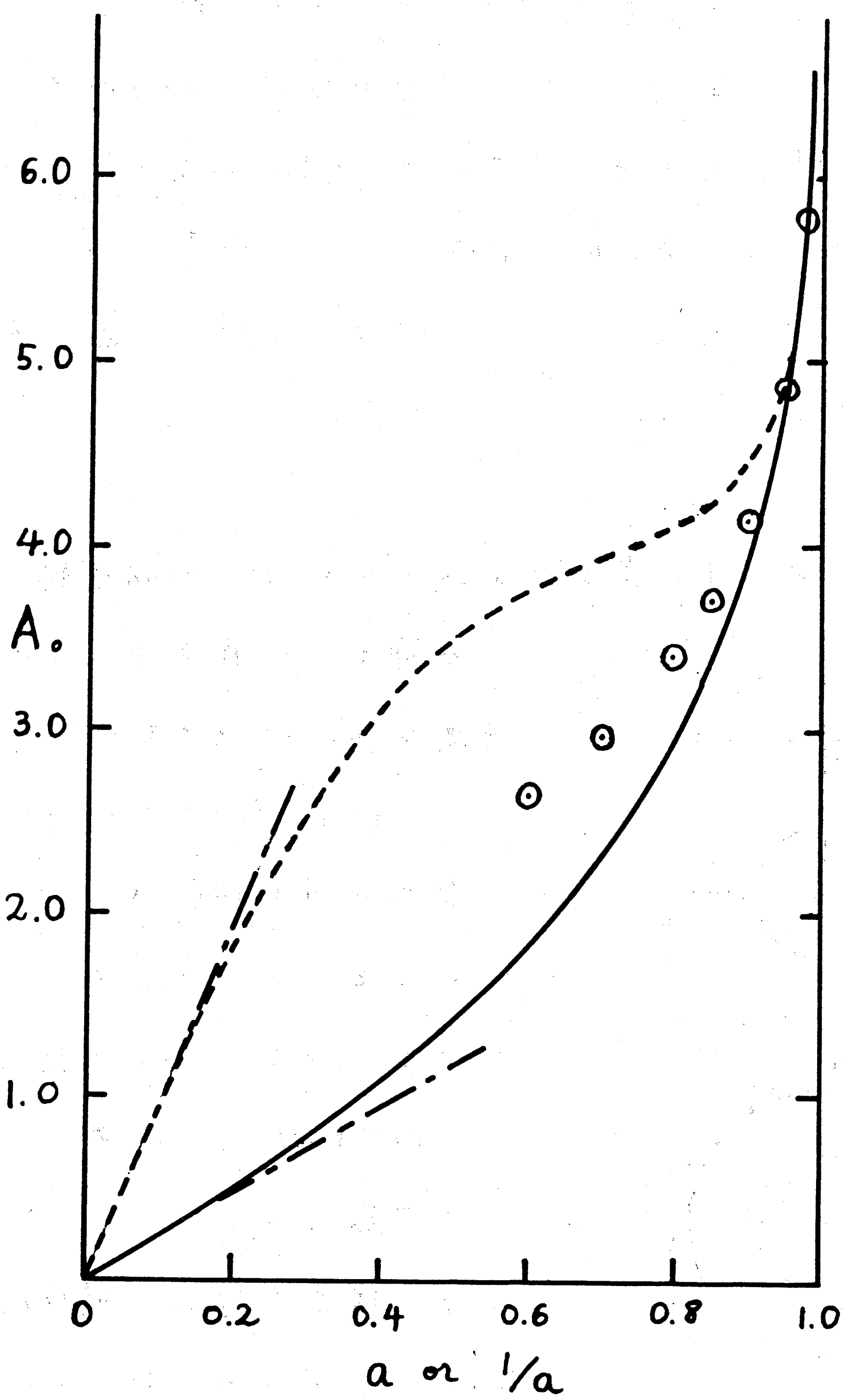


図 5

にあるときを示す。また、⊙は $\lambda+\frac{1}{2}$ で、A_0 がこれに近ければ、リングの各素片が2次元物体の1部として行動していると見なしてよい。なお、鎖線はそれぞれの曲線に対する原点での接線を表わす。すなわち、鎖線と A_0 が近ければ、Case II ではリングは3次元的に行動していると考えられ、また、Case I では球をストークス源でおき換える近似が良好であることを示している。

§5. リング面に直交する軸のまわりの回転運動

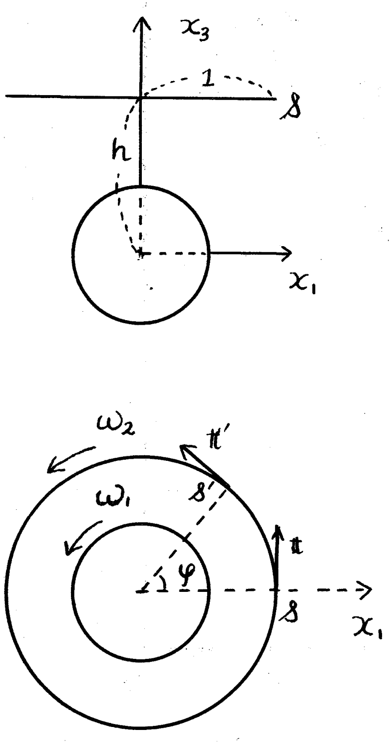


図 6

本節では、角速度は ω_0、長さは P、速度は $\omega_0 P$ で無次元化し、図6のように、球は ω_1 で、リングは ω_2 で x_3 軸の回りに回転しているとする。このとき、リング上のストークス源に対し、つぎの形を仮定し、

$$c(s)\mathbf{l}'(s) = (A/4)\,\mathbf{t} \qquad (43)$$

Aを定数と考えて、$\mathbb{K}$, $\mathbf{l}''$ を計算すれば、積分方程式の厳密解が見出される。すなわち、(13)に現われる $\mathbb{K}$, ω_0, $\mathbf{U}$ は前節と同様にして、

$$\mathbb{K} = (-2\log 2 + 3/2)\; A\,\mathbf{t} \qquad (44)$$

$$\mathbb{U}_B = \omega_2 \mathbb{t} \quad , \qquad \mathbb{U} = E_1 \omega_1 \mathbb{t} \qquad (45)$$

ただし、E_1 は

$$\text{Case I} : \quad E_1 = a^3/R^3 \quad , \qquad \text{Case II} : \; E_1 = 1 \qquad (46)$$

で与えられる。また、(17) に (43) を代入して

$$\mathbb{q}''(s) = F_0 A \mathbb{t} \qquad (47)$$

が得られる。ここで、F_0 は

$$F_0 = -\frac{1}{4}\int_0^{2\pi} \{ G_{21}(\varphi)\sin\varphi - G_{22}(\varphi)\cos\varphi \} d\varphi \qquad (48)$$

であり、$G_{jk}(\varphi)$ は (3)～(7) の G_{jk} に (30) を代入して得られる φ の関数である。いま、(44)～(48) を (13) に代入すれば、A はつぎのように求まる。

$$A = -(\omega_2 - E_1\omega_1) / (S - 2 - F_0) \qquad (49)$$

また、リングの s 点の単位長さに働く力 $\mathbb{f}$ およびリングに働くトルク $\mathbb{M}_2$ は

$$\mathbb{f} = 2\pi\mu\rho\,\omega_0 A \mathbb{t} \quad , \qquad \mathbb{M}_2 = -2\pi\mu\rho^2\omega_0 L A \mathbb{t} \qquad (50)$$

のように決定される。なお、A に現われる E_1 は (46) で与えられている。つぎに球に働くトルク $\mathbb{M}_1$ について考える。

(i) Case I のとき

リング上のストークス源の存在のために球に働くトルクは (10)、(43) から

$$-2\pi\mu\rho^2\omega_0 L (a^3/R^3) A \mathbb{e}_3 \qquad (51)$$

となるから、球に働く全トルク $\mathbb{M}_1^o$ は、ω_1 で回転するために生ずるトルクを加えて、つぎのように与えられる。

$$\mathbb{M}_1^o = -4\pi\mu P^2 \omega_0 L \left[a^3\omega_1 - \frac{\pi a^3}{2R^3} \frac{(\omega_2 - \frac{a^3}{R^3}\omega_1)}{(S-2-F_0)} \right] \mathbb{e}_3 \qquad (52)$$

(ii) Case II のとき

リング上のストークス源の存在により球に働くトルクは(11)より $-\mathbb{M}_2$ であることが分るから、球に働く全トルク $\mathbb{M}_1^i$ は

$$\mathbb{M}_1^i = -4\pi\mu P^2 \omega_0 L \left[a^3\omega_1 - \frac{\pi}{2} \frac{(\omega_2 - \omega_1)}{(S-2-F_0)} \right] \mathbb{e}_3 \qquad (53)$$

で与えられる。

(49) ~ (53) に現われる F_0 は (48) より決定できるが、Case I ($R > a > 0$)、Case II ($\infty > a > R$)、いずれの場合も

$$F_0 = \left(\frac{2}{k^2} - 1 \right) k K(k) - \frac{2}{k} E(k) \qquad (54)$$

で表わされる。ここで

$$k = 2aR \Big/ \sqrt{(R^2+a^2)^2 + h^2(R^2-a^2)^2} \qquad (55)$$

である。さて (54) は k のみの関数であるから、Case I および Case II において、k が同一であれば F_0 は同じ値となる。このような例として、つぎの場合が考えられる。いま、球外および球内にあるリングが $x_1 - x_3$ 面と交る点を P および P′ とするとき、P′ が P の鏡像であれば、両方のリングの k は同一となる。また、$a \ll R$, $|a-R| \to 0$, $a \gg R$ のときの F_0 の展開形は

$$a \ll R: \quad F_0 = \frac{\pi a^3}{2R^6}\left[1 + \frac{3a^2h^2}{R^4} + \frac{3}{8}\frac{a^4}{R^8}(1-4h^2)^2 + \frac{15a^6h^2}{2R^{15}}(3-8h^2-4h^4) + \cdots\right] \tag{56}$$

$$|R-a| \to 0: \quad F_0 = \Lambda - 2 + \frac{3}{4}(\Lambda - 1)k'^2 + \cdots \tag{57}$$

$$\Lambda = \log 4/k', \qquad k' = \frac{R\,|R^2-a^2|}{\sqrt{(R^2+a^2)^2 + h^2(R^2-a^2)^2}} \tag{58}$$

$$a \gg R: \quad F_0 = \frac{\pi}{2}\frac{1}{a^3}\left[1 + \frac{3h^2}{a^2} + \frac{3}{8a^4}(1-4h^2)^2 + \frac{5h^2}{8a^6}(3-4h^2)^2 + \cdots\right] \tag{59}$$

となる。いま、$F_0 = \pi a^3/2R^6$ とおけば、球が小さいとし、球による流れをストークス源でおき換えたときの結果[2]と一致し、$F_0 = \Lambda - 2$ ととれば、リングの各素片に働く力は、平面壁の近傍で、壁に平行におかれた2次元物体（同一の横断面形をもつ）が軸方向に運動するときの同物体の同一長さの素片が受ける力[1]と一致する。図7に、$h=0$ の場合について、F_0が、a（Case Iの場合）または $1/a$（Case IIの場合）に対し、どのように変るかが示されている。前述のように、球の内と外にあるリングが鏡像の位置にあるとき（a と $1/a$ が等しいとき）、F_0は等しいから、Case Iの場合とCase IIの場合の F_0は、図のように、一つの曲線で表わされる。また、⊙は $\Lambda-2$ の値で、F_0がこれに近ければ、リングの各素片は2次元物体の1部として、行動していると見なしてよい。

§6. リング面に平行な運動

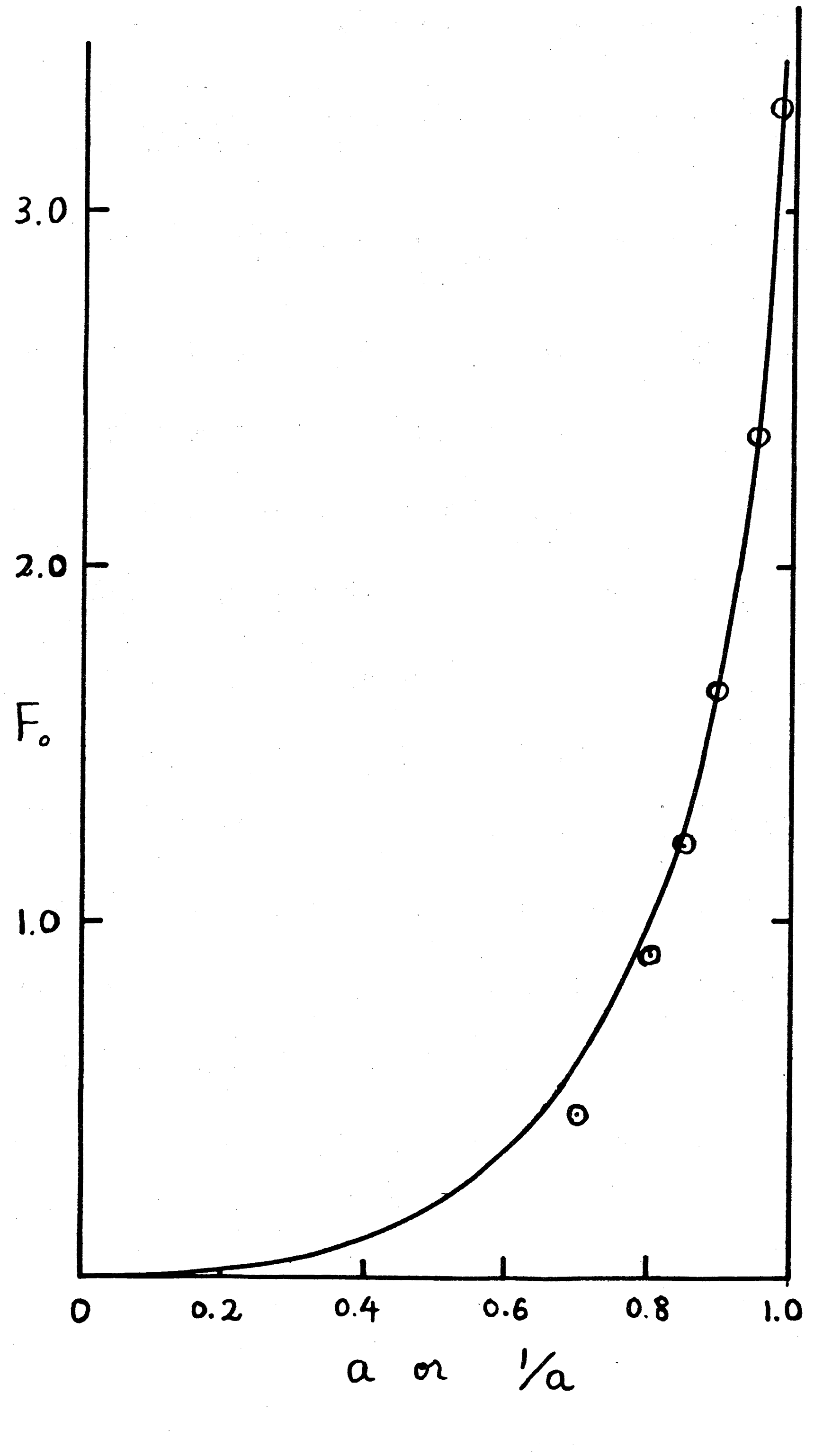


図 7

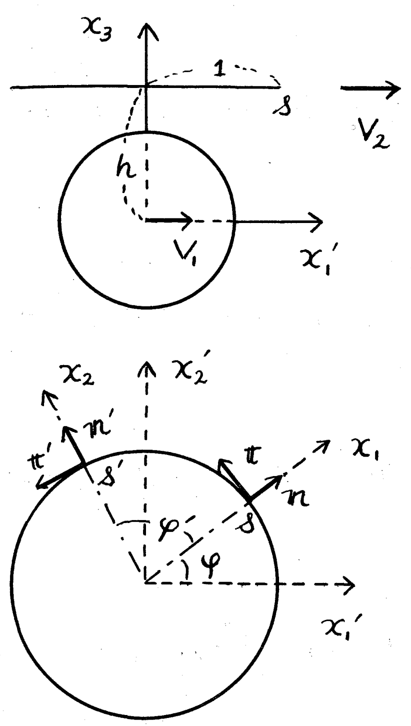


図　8

本節では、図8に示されるように、球およびリングが、V_1 および V_2 の速度で、リング面に平行な方向、すなわち、x_1' 方向に運動している場合を考える。このとき、リング上のストークス源をつぎの形に仮定すれば、積分方程式を厳密に満たす解が得られる。

$$C(s)\,\mathbf{i}'(s) = -\sin\varphi\,\frac{\bar{A}}{4}\mathbf{t} + \cos\varphi\left(\frac{\bar{I}}{2}\mathbf{n} + \frac{\bar{J}}{2}\mathbf{e}_3\right) \qquad (60)$$

ここで、$\bar{A}$, $\bar{I}$, $\bar{J}$ は s によらない定数で、φ は図8で示されているように $O's$ と x_1' 軸との間の角である。(13) に現われる $\mathbb{K}$、$\mathbb{U}_B$、$\mathbb{U}$ は、前節と同様にして

$$\mathbb{K} = -\sin\varphi\left[\left(-2\log 2 + \frac{3}{2}\right)\bar{A} - 2\bar{I}\right]\mathbf{t} + \cos\varphi\left[(-2\log 2 + 1)\bar{I} - \bar{A}\right]\mathbf{n} + \cos\varphi\,(-2\log 2 + 2)\bar{J}\mathbf{e}_3 \qquad \cdots (61)$$

$$\mathbb{U}_B = V_2\,(\cos\varphi\,\mathbf{n} - \sin\varphi\,\mathbf{t}) \qquad (62)$$

$$\mathbb{U} = V_1\,(\sin\varphi\,E_2\,\mathbf{t} + \cos\varphi\,G_2\,\mathbf{n} + \cos\varphi\,F_2\,\mathbf{e}_3) \qquad (63)$$

の形となり、E_2, G_2, F_2 は

$$\left.\begin{aligned}
&\text{Case I}:\ E_2 = -\frac{a}{4R}\left(3 + \frac{a^2}{R^2}\right),\quad G_2 = \frac{a}{4R}\left\{3 + \frac{a^2}{R^2} + \frac{3}{R^2}\left(1 - \frac{a^2}{R^2}\right)\right\},\quad F_2 = \frac{3ah}{4R^3}\left(1 - \frac{a^2}{R^2}\right)\\
&\text{Case II}:\qquad E_2 = -1,\quad G_2 = 1,\quad F_2 = 0
\end{aligned}\right\} (64)$$

で与えられる。ここで、$O's$ の方向を x_1 軸、これに直角に x_2 軸をとり、$O's$ と $O's'$ とがなす角を φ' とし、(17) に (60) を代入

すれば、(13) に現われる $q''(s)$ として

$$q''(s) = \cos\varphi\,(A_0\bar{A} + B_0\bar{I} + C_0\bar{J})\,\mathbf{m} - \sin\varphi\,(D_0\bar{A} + E_0\bar{I} + F_0\bar{J})\,\mathbf{t} + \cos\varphi\,(G_0\bar{A} + H_0\bar{I} + I_0\bar{J})\,\mathbf{e}_3 \quad \cdots (65)$$

が得られる。ここで、

$$\left.\begin{aligned}
&A_0 = \frac{1}{4}\int_0^{2\pi} \sin\varphi'\left(G_{11}(\varphi')\sin\varphi' - G_{12}(\varphi')\cos\varphi'\right)d\varphi', \quad B_0 = \frac{1}{2}\int_0^{2\pi} G_{11}(\varphi')d\varphi' - 2A_0, \quad C_0 = \frac{1}{2}\int_0^{2\pi} G_{13}(\varphi')\cos\varphi' d\varphi' \\
&D_0 = \frac{1}{4}\int_0^{2\pi} \cos\varphi'\left(G_{22}(\varphi')\cos\varphi' - G_{21}(\varphi')\sin\varphi'\right)d\varphi', \quad E_0 = \frac{1}{2}\int_0^{2\pi} G_{22}(\varphi')d\varphi' - 2D_0, \quad F_0 = \frac{1}{2}\int_0^{2\pi} G_{23}(\varphi')\sin\varphi' d\varphi' \\
&G_0 = \frac{1}{4}\int_0^{2\pi} \sin\varphi'\left(G_{31}(\varphi')\sin\varphi' - G_{32}(\varphi')\cos\varphi'\right)d\varphi', \quad H_0 = \frac{1}{2}\int_0^{2\pi} G_{31}(\varphi')d\varphi' - 2G_0, \quad I_0 = \frac{1}{2}\int_0^{2\pi} G_{33}(\varphi')\cos\varphi' d\varphi'
\end{aligned}\right\} (66)$$

ここで、$G_{jk}(\varphi')$ は (3)～(7) の G_{jk} に、(30) の φ を φ' に変更した式を代入して得られる φ' の関数である。

さて、(60)～(66) を (13) に代入すれば、$\bar{A}$, $\bar{I}$, $\bar{J}$ がつぎのように決定される。

$$\left.\begin{aligned}
&\bar{A} = \{(-V_2 - E_2V_1)A_{11} + (-V_2 + G_2V_1)A_{21}\}/\Delta, \quad \bar{I} = \{(-V_2 - E_2V_1)A_{12} + (-V_2 + G_2V_1)A_{22}\}/\Delta \\
&\bar{J} = \{(-V_2 - E_2V_1)A_{13} + (-V_2 + G_2V_1)A_{23}\}/\Delta
\end{aligned}\right\} (67)$$

ここで、

$$\left.\begin{aligned}
\Delta =\ & (S - 2 - D_0)(S - \tfrac{1}{2} - \bar{b}_1(i) - B_0)(S - \tfrac{3}{2} + \bar{b}_1(i) - I_0) + F_0(1 - A_0)(C_1(i) + H_0) + G_0(2 - E_0)(C_1(i) + C_0) \\
& - (S - 2 - D_0)(C_1(i) + C_0)(C_1(i) + H_0) - (S - \tfrac{3}{2} + \bar{b}_1(i) - I_0)(1 - A_0)(2 - E_0) - (S - \tfrac{1}{2} - \bar{b}_1(i) - B_0)F_0G_0 \\
A_{11} =\ & (S - \tfrac{1}{2} - \bar{b}_1(i) - B_0)(S - \tfrac{3}{2} + \bar{b}_1(i) - I_0) - (C_1(i) + C_0)(C_1(i) + H_0) \\
A_{12} =\ & -\left[(1 - A_0)(S - \tfrac{3}{2} + \bar{b}_1(i) - I_0) - G_0(C_1(i) + C_0)\right] \\
A_{21} =\ & -\left[(2 - E_0)(S - \tfrac{3}{2} + \bar{b}_1(i) - I_0) - F_0(C_1(i) + H_0)\right]
\end{aligned}\right\} (68)$$

$$\left.\begin{aligned} &A_{22} = (S-2-D_0)\left(S-\tfrac{3}{2}+\overline{b}_1(i)-I_0\right)-F_0G_0\,, \quad A_{13} = G_0\left(S-\tfrac{1}{2}-\overline{b}_1(i)-B_0\right)-(1-A_0)(C_1(i)+H_0) \\ &A_{23} = (C_1(i)+H_0)(S-2-D_0)-G_0(2-E_0) \end{aligned}\right\} \quad (69)$$

なお、$A_0, \cdots, I_0$は(66)で、E_2, G_2は(64)で与えられている。

$\overline{A}$, $\overline{I}$, $\overline{J}$が上式によって求まれば、リングに働く力$\mathbb{F}_2$およびトルク$\mathbb{M}_2$は、(19), (20), (60)を用いて

$$\mathbb{F}_2 = \pi\mu U_0 L(\overline{A}+2\overline{I})\,\mathbb{e}_1' \quad (70)$$

$$\mathbb{M}_2 = -2\pi\mu U_0 \rho L \overline{J}\,\mathbb{e}_2' \quad (71)$$

で与えられる。ここで、$\mathbb{e}_1'$および$\mathbb{e}_2'$は、それぞれ、x_1'方向およびx_2'方向の単位ベクトルである。

つぎに、球に働く力およびモーメントについて考えよう。リング上にあるストークス源が原因となり、球に加わるモーメントおよび力は(9)～(11)および(60)を用いて計算できる。この力やモーメントに、球自身の運動による力を加えて、

Case I: 球に働く力$\mathbb{F}_1^{o}$およびモーメント$\mathbb{M}_1^{o}$

$$\left.\begin{aligned} &\mathbb{F}_1^{o} = -\mu U_0 L\left[\!\left[\, 3aV_1+\pi\left[\frac{2}{R^2}\left(\frac{3}{2}\frac{a}{R}-\frac{1}{2}\frac{a^3}{R^3}\right)(\overline{I}+h\overline{J})+\left(\frac{3}{4}\frac{a}{R}+\frac{1}{4}\frac{a^3}{R^3}\right)\left\{\overline{A}+\frac{2h}{R^2}(h\overline{I}-\overline{J})\right\}\right]\right]\!\right]\mathbb{e}_1' \\ &\mathbb{M}_1^{o} = -\pi\mu\rho U_0 L\,\frac{a^3}{R^3}\left\{h\overline{A}+2(h\overline{I}-\overline{J})\right\}\mathbb{e}_2' \end{aligned}\right\} \quad (72)$$

Case II: 球に働く力$\mathbb{F}_1^{i}$およびモーメント$\mathbb{M}_1^{i}$

$$\left.\begin{aligned} &\mathbb{F}_1^{i} = -\mu U_0 L\left[3aV_1+\pi(\overline{A}+2\overline{I})\right]\mathbb{e}_1' \\ &\mathbb{M}_1^{i} = 2\pi\mu U_0 \rho L\overline{J}\,\mathbb{e}_2' \end{aligned}\right\} \quad (73)$$

で、それぞれ、与えられる。

いま、$h=0$ のときには、$G_{13}=G_{31}=G_{23}=G_{32}=0$ であるから、(68), (69) に現われる $C_0=F_0=G_0=H_0=0$ となり、これらの式は若干簡単になる。とくに、$h=0$, $C_1(i)=0$ のときには、(67) の $\bar{J}=0$ となり、したがって、(71)~(73) の $\mathbb{M}_2$, $\mathbb{M}_1^o$, $\mathbb{M}_1^i$ はいずれも 0 となる。

§7. リング面内にある軸のまわりの回転

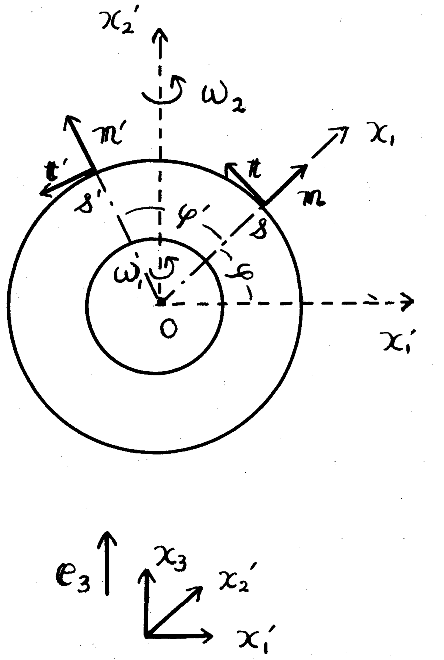


図 9

本節では図9に示されるように、球とリングの中心が一致し、この中心を通り、リング面内にある x_2' 軸のまわりに、球は ω_1 で、リングは ω_2 で回転している場合を考える。このとき、リング上のストークス源をつぎの形に仮定すれば、§6のときと同様に、積分方程式を厳密に満たす解が得られる。

$$c(s)\boldsymbol{l}'(s) = -\sin\varphi\,\frac{\bar{A}}{4}\boldsymbol{t} + \cos\varphi\left(\frac{\bar{I}}{2}\boldsymbol{e}_3 + \frac{\bar{J}}{2}\boldsymbol{n}\right) \qquad (74)$$

ここで、$\bar{A}, \bar{I}, \bar{J}$ は s によらない定数で、φ は図9で示されるように Os と Os' のなす角である。

(13) に現われる $\mathbb{K}$ は、(61) の $\bar{J}$、$\bar{I}$ を入れ替えた形で

$$\mathbb{K} = -\sin\varphi\left[\left(-2\log 2+\tfrac{3}{2}\right)\bar{A}-2\bar{J}\right]\mathbb{t}+\cos\varphi\left[(-2\log 2+1)\bar{J}-\bar{A}\right]\mathbb{n}+\cos\varphi\,(-2\log 2+2)\,\bar{I}\,\mathbb{e}_3 \quad (75)$$

となる。また、$\mathbb{U}_B$, $\mathbb{U}$ は

$$\mathbb{U}_B = -\cos\varphi\ \omega_2\,\mathbb{e}_3 \quad (76)$$

$$\mathbb{U} = -E_3\,\omega_1\cos\varphi\,\mathbb{e}_3 \quad (77)$$

の形となり、E_3 は

$$\text{Case I}:\quad E_3 = a^3 \quad,\quad \text{Case II}:\quad E_3 = 1 \quad (78)$$

で与えられる。ここで、§6 の場合と同様に、$O\mathcal{S}$ の方向を x_1 軸、これに直角に x_2 軸をとり、$O\mathcal{S}$ と $O\mathcal{S}'$ のなす角を φ' とし、(17) に (74) を代入すれば、(13) に現われる $\mathcal{G}''(\mathcal{S})$ として (65) 式で $\bar{J}$, $\bar{I}$ を交換した式が得られるが、$h=0$ であることを考慮すれば

$$\mathcal{G}''(\mathcal{S}) = \cos\varphi\,(A_0\bar{A}+B_0\bar{J})\,\mathbb{n}-\sin\varphi\,(D_0\bar{A}+E_0\bar{J})\,\mathbb{t}+\cos\varphi\,I_0\bar{I}\,\mathbb{e}_3 \quad (79)$$

となる。ここで、A_0, B_0, D_0, E_0, I_0 は (66) で与えられている。

いま、(75) ～ (79) を (13) に代入すれば、$\bar{A}$, $\bar{I}$, $\bar{J}$ はつぎのように決定される。

$$\bar{A} = \frac{(\omega_2-E_3\omega_1)A_{21}}{\Delta}\ ,\quad \bar{I} = \frac{(\omega_2-E_3\omega_1)A_{22}}{\Delta}\ ,\quad \bar{J} = \frac{(\omega_2-E_3\omega_1)A_{23}}{\Delta} \quad (80)$$

ここで

$$\left.\begin{aligned}
\Delta &= (s-2-D_0)\left(s-\tfrac{3}{2}-\bar{b}_1(\mathbb{i})-I_0\right)\left(s-\tfrac{1}{2}+\bar{b}_1(\mathbb{i})-B_0\right)-C_1^2(\mathbb{i})(s-2-D_0)\\
&\qquad -(2-E_0)(1-A_0)\left(s-\tfrac{3}{2}-\bar{b}_1(\mathbb{i})-I_0\right)\\
A_{22} &= (s-2-D_0)\left(s-\tfrac{1}{2}+\bar{b}_1(\mathbb{i})-B_0\right)-(1-A_0)(2-E_0)\\
A_{21} &= -(2-E_0)\,C_1(\mathbb{i})\ ,\qquad A_{23} = C_1(\mathbb{i})\,(s-2-D_0)
\end{aligned}\right\} \quad (81)$$

なお、E_3 は (78) で、A_0、B_0、D_0、E_0、I_0 は (66) で与えられている。したがって、§6 でこれらの値が計算されていれば利用できる。

つぎに、(19)、(20)、(75) から、リングに働く力 $\mathbb{F}_2$ およびトルク $\mathbb{M}_2$ は、$\bar{A}$、$\bar{I}$、$\bar{J}$ を用いて

$$\mathbb{F}_2 = \pi\mu\omega_0\rho L(\bar{A}+2\bar{J})\mathbf{e}_1', \qquad \mathbb{M}_2 = -2\pi\mu\omega_0\rho^2 L\,\bar{I}\,\mathbf{e}_2' \tag{82}$$

で与えられる。また、球に働く力およびモーメントは、リング上にあるストークス源の存在のために働く力およびモーメントに、リングがないときに球に働くモーメントを加えて、

Case I：球に働く力 $\mathbb{F}_1^o$ およびモーメント $\mathbb{M}_1^o$

$$\left.\begin{aligned} \mathbb{F}_1^o &= -\pi\mu\omega_0\rho L\left\{a(3-a^2)\bar{J} + \frac{a}{4}(3+a^2)\bar{A}\right\}\mathbf{e}_1' \\ \mathbb{M}_1^o &= -8\pi\mu\hat{a}^3\omega_0\left(\omega_1 - \frac{\pi}{2}\bar{I}\right)\mathbf{e}_2' \end{aligned}\right\} \tag{83}$$

Case II：球に働く力 $\mathbb{F}_1^i$ およびモーメント $\mathbb{M}_1^i$

$$\left.\begin{aligned} \mathbb{F}_1^i &= -\pi\mu\omega_0\rho L(\bar{A}+2\bar{J})\mathbf{e}_1' \\ \mathbb{M}_1^i &= -8\pi\mu\rho^3\omega_0\left(a^3\omega_1 - \frac{\pi}{2}\bar{I}\right)\mathbf{e}_2' \end{aligned}\right\} \tag{84}$$

で与えられる。

とくに、$C_1(\boldsymbol{i})=0$ のとき、(80)、(81) の $\bar{A}$、$\bar{I}$、$\bar{J}$ は

$$\bar{A}=0, \quad \bar{I}=(\omega_2-E_3\omega_1)\Big/\left(S-\frac{3}{2}-\bar{b}_1(\boldsymbol{i})-I_0\right), \quad \bar{J}=0 \tag{85}$$

となる。このとき、$\mathbb{F}_2=\mathbb{F}_1^o=\mathbb{F}_1^i=0$ であり、$\mathbb{M}_2$、$\mathbb{M}_1^o$、$\mathbb{M}_1^i$ は (82)〜(84) の $\bar{I}$ に (85) を代入すればよい。

§8. 結言

細長いリング（横断面の形は任意であるが、一様である）のリング面が球とリングの中心を結ぶ線に垂直であるときを選び、球およびリングが直進運動または回転運動をする4つの場合に対し、積分方程式の厳密解を導出した。とくに、球とリングが、(i) リングが球を二等分する面内にあり、かつ、この面に垂直な方向に運動するとき、(ii) リング面に垂直な軸のまわりに回転するとき、に対し、厳密解を具体的に計算し、球やリングに働く力やトルクの特徴を明らかにした。

その結果、リングの運動に及ぼす球壁の影響について、つぎのようなことが分った。

〔I〕 リングが小さい場合には、微小な3次元物体の運動と同一の壁効果を受け、また、リングが球壁に近付く場合には、リングの各素片は平面壁の近くを壁に平行に運動する2次元物の1部のように振る舞う。上述の間の領域が、細長い物体独特の壁効果を受ける。

〔II〕 リングの半径を一定にして考えれば、垂直運動のときの方が、回転運動のときよりも著しい壁効果を受ける。また、壁に近いときには、回転運動の方が垂直運動よりも2次元性がよい。

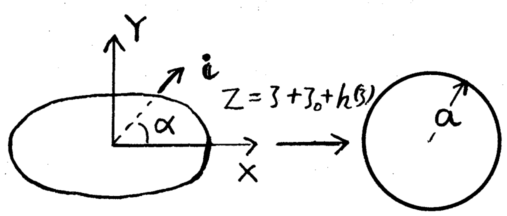
〔III〕 リングが球外で運動している場合と球内で運動してい

る場合を比べるため、両者のリングが鏡像の位置関係にあるときを選んで比較しよう。このとき、回転運動の場合には、両方のリングに及ぼす球壁の影響は同一であり、また、垂直運動の場合には、球内で運動しているときが、球外で運動しているときよりも大きい壁効果を受ける。

(IV) リングが小さい場合の抵抗の式から、微小な3次元物体が球の中心を運動するときの抵抗の式(42)が得られる。

Appendix: 断面係数 a_1, $\bar{b}_1(\boldsymbol{i})$, $c_1(\boldsymbol{i})$ について

細長い物体の横断面の形によって決まる断面係数は、2次元物体の断面から決定される断面係数と、断面の形が同一であれば全く同じであり、つぎのように求めることができる。[8), 11)]



Z－面　　ζ－面

Z面上で与えられている横断面の形が、写像関数：

$Z = \zeta + \zeta_0 + h(\zeta)$ $(\zeta \to \infty:\ h(\zeta) \to 0)$

でζ面の半径 a の円に写像されるとき、a_1, $\bar{b}_1(\boldsymbol{i})$, $c_1(\boldsymbol{i})$ は次式で与えられる。

$$a_1 = a,\quad \bar{b}_1(\boldsymbol{i}) = -(\gamma/2)\cos(\beta + 2\alpha),\quad c_1(\boldsymbol{i}) = (\gamma/2)\sin(\beta + 2\alpha)$$

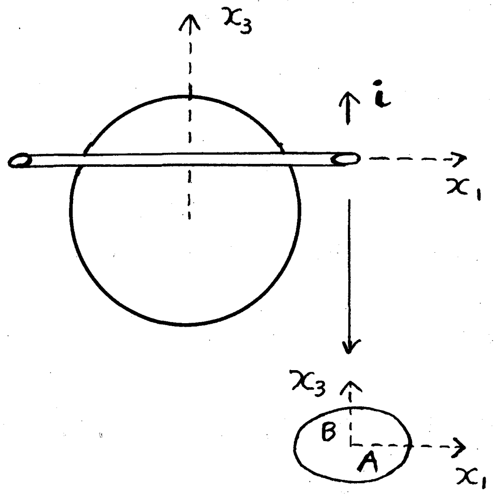
ここで

$$\gamma e^{i\beta} = \frac{1}{2\pi a}\int_0^{2\pi} \frac{\bar{h}(ae^{-i\theta}) - ae^{-i\theta}h'(ae^{i\theta})}{e^{i\theta}\{1 + h'(ae^{i\theta})\}}\, d\theta$$

ただし、α は $\boldsymbol{i}$ と X 軸のなす角，$\bar{h}(\bar{\zeta})$ は $h(\zeta)$ の共軛複素関

数、 $h'(\zeta) = dh/d\zeta$ である。

例えば、§4 の (31)、(36) に現われる断面係数を計算する



ときには、まず、Z面のX方向を x_1 方向に、また、Y方向を x_3 方向に一致させ、写像関数を決定し、γ, β を決める。i は x_3 方向にとられているから、Z-面で i はY軸と一致する。したがって、$a, \bar{b}_1(i)$, $c_1(i)$ を決めるときに $\alpha = \pi/2$ ととればよい。

とくに，横断面の形が上図のような楕円であるときには，

$$a = \frac{A+B}{2}, \quad \bar{b}_1(i) = \frac{1}{2}\frac{(A-B)}{(A+B)}, \quad c_1(i) = 0$$

となる。また，§4 で $\log a_1 = 0$ にとってあるのは $b = a$ ととってあることによる。

上記の断面係数は断面の形が楕円，円弧形，正n星形，矩形，二等辺三角形，楔形，菱形，レンズ形などである場合に計算されている。

文献

1). N.J. Mester and D.F. Katz : J. Fluid Mech. **64** (1974), 817

2) 成瀬文雄：京都大学数理解析研究所講究録 360 (1979), 88

3) J. J. L. Higdon : J. Fluid Mech. **90** (1979), 685

4) J. J. L. Higdon : J. Fluid Mech. **94** (1979), 331

5) R.D. Dresdner, D.F. Katz and S.A. Berger : J. Fluid Mech. **97** (1980), 591

6) 成瀬文雄：京都大学数理解析研究所講究録 476 (1983), 162

7) J. J. L. Higdon : J. Fluid Mech. **94** (1979), 306

8) 成瀬文雄：京都大学数理解析研究所講究録 302 (1977), 58

9) 成瀬文雄：京都大学数理解析研究所講究録 335 (1978), 42

10) C.W. Oseen : Hydrodynamik, Leipzig : Akad. Verlag (1927)

11) 成瀬文雄：京都大学数理解析研究所講究録 234 (1975), 4