

球の脈動による非線形音波の放射および衝撃波の発生

阪大基礎工 井上良紀 (Yoshinori Inoue)

阪大基礎工 石井伸也 (Shinya Ishii)

阪大基礎工 沖上富雄 (Tomio Okigami)

§ 1, はじめに

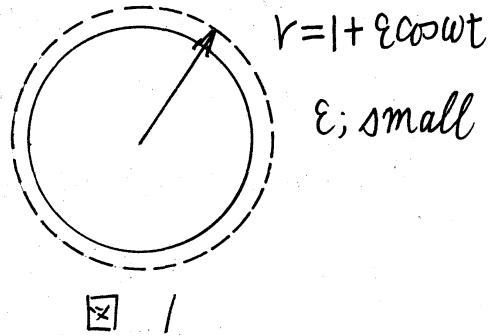
従来、音響学と言えは線形問題が中心であつたが、最近非線形性を考慮した非線形音響学が目ざましい発展を遂げつつある。特に、球の脈動により発生する音波の問題は、音響学における基本的なモデルであるだけに、Kelly と Nayfeh<sup>(1),(2)</sup> を始めとして、数多くの人々により取扱われている。特に、Kelly と Nayfeh<sup>(1),(2)</sup> の扱つた問題は、ゴルフボール状の球の脈動により発生する非線形音波と遠方場における衝撃波の形成を取り扱つており、三次元音響の一般的な場合の一つとして注目される。彼らは、くり込み (renormalization) と呼ばれる特異摂動法を用いて解析を行っている。しかし、彼らの解析では、くり込みの方法の使用正当性は明らかにされていない。また、くり込みの方法を極座標  $(r, \theta, \varphi)$  における  $r$  方向の速度  $v_r$  に適用して得られた座標変換を、 $\theta$  や  $\varphi$  方向の速度  $v_\theta, v_\varphi$  に直

簡単に

接適用しても特異性が除去できない。という問題も残っている。

我々は、三次元音波の発生機構のモデルとして最も簡単な場合である脈動する球(図1参照)

より放射される非線形音波を取り上げ、この問題に対するくり込みの方法の適用正当性と高次近似解を考察する。以下、§2では、球の近傍での解を、正則摂動展開により求める。§3では、球より十分離れた所での解についての種々の表現、およびその等価性について述べる。§4では、くり込みの正当性と第2近似解まで考慮したくり込み、および、球近傍の解と遠方での解との *matching* を行う。



§2, 球近傍の解

完全気体からなる非粘性流体の等エントロピー流を考える。さらに、流れの場は球対称であると仮定する。(速度  $\mathbf{v}$  を極座標表示した時、 $\mathbf{v} = (u(r,t), 0, 0)$ 。) 当然、流れは非回転的になる。そこで、 $u = \partial \psi / \partial r$  で定義される速度ポテンシャル  $\psi(r,t)$  を導入する。連続の式、運動方程式、断熱関係式から、次の3式を得る。

$$\Delta \hat{\Phi} - \frac{\partial^2 \hat{\Phi}}{\partial \hat{t}^2} = \frac{\partial}{\partial \hat{r}} \left[ \left( \frac{\partial \hat{\Phi}}{\partial \hat{r}} \right)^2 + \frac{n-1}{2} \left( \frac{\partial \hat{\Phi}}{\partial \hat{t}} \right)^2 \right] \quad (1)$$

+ ( $\hat{\Phi}$  に関して3次以上の項)

$$\hat{p} = \left[ 1 - (n-1) \left\{ \frac{\partial \hat{\Phi}}{\partial \hat{r}} + \frac{1}{2} \left( \frac{\partial \hat{\Phi}}{\partial \hat{t}} \right)^2 \right\} \right]^{\frac{1}{n-1}} \quad (2)$$

$$\hat{p} = \hat{p}^n \quad (3)$$

ただし、極座標( $r, \theta, \phi$ )を使用しているので、ラプラスアン $\Delta$ は、 $\Delta \Phi = \frac{1}{r} \frac{\partial^2}{\partial r^2} (r\Phi)$ となる。また、 $\sim$ のつりた量は、

$$\hat{r} = r/a, \quad \hat{t} = ct/a, \quad \hat{\Phi} = \Phi/cao, \quad \hat{p} = p/p_0, \quad \hat{p} = p/(p_0/c_0^2)$$

$a$ ; 球の基準半径  $n$ ; 比熱比

$c_0, p_0$ ; 流体静止時の音速, 圧力

により無次元化された量であることを示す。以下、 $\sim$ は省略する。

境界条件は、流体が球をつきぬけず、球表面にとどまることから、

$$\frac{\partial \Phi}{\partial r} = \frac{dr}{dt} \quad \text{at } r = 1 + \epsilon \cos \omega t \quad (4)$$

となる。これと、 $r \rightarrow +\infty$ で課せられる放射条件を考慮する。

以下の解析は、 $\epsilon \ll 1$ である弱非線形問題を取り扱う。

さて、(1)~(4)に、正則摂動展開

$$\Phi(r, t) = \sum_{n=0}^{\infty} \epsilon^n \Phi_n(r, t)$$

$$p(r, t) = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \epsilon^n p_n(r, t)$$

$$p(r, t) = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \epsilon^n p_n(r, t)$$

} (5)

を用いる。各式ごとに、 $\epsilon^n$ に関する等中の項にまとめて0と

置くことにより、次のような  $\Phi_n$  についての線形微分方程式、および、 $p_n, \rho_n$  の  $\Phi_n$  等による表示を得る。

$O(\varepsilon)$ ; (線形問題)

$$\Delta \Phi_1 - \frac{\partial^2 \Phi_1}{\partial t^2} = 0 \quad (6)$$

$$\frac{\partial \Phi_1}{\partial r} = -\omega \sin \omega t \quad \text{at } r=1 \quad (7)$$

$$\rho_1 = -\frac{\partial \Phi_1}{\partial t} \quad (8)$$

$$p_1 = n \rho_1 \quad (9)$$

$\Delta \Phi_1 = \frac{1}{r} \frac{\partial^2}{\partial r^2} (r \Phi_1)$  を考慮して、

$$\Phi_1 = -\frac{A}{r} \cos \varphi$$

$$\varphi = \omega(t-r+1) + \delta$$

$$\delta = \tan^{-1} \omega$$

$$A = \frac{\omega}{\sqrt{1+\omega^2}}$$

} (10)

を得る。また、

$$u_1 \equiv \frac{\partial \Phi_1}{\partial r} = -\frac{A\omega}{r} \sin \varphi + \frac{A}{r^2} \cos \varphi \quad (11)$$

$$O(\varepsilon^2); \quad \Delta \Phi_2 - \frac{\partial^2 \Phi_2}{\partial t^2} = \frac{\partial}{\partial t} \left[ \left( \frac{\partial \Phi_1}{\partial r} \right)^2 + \frac{n-1}{2} \left( \frac{\partial \Phi_1}{\partial t} \right)^2 \right] \quad (12)$$

$$\frac{\partial \Phi_2}{\partial r} = -\frac{\partial^2 \Phi_1}{\partial r^2} \cos \omega t \quad \text{at } r=1 \quad (13)$$

$$\rho_2 = -\frac{\partial \Phi_2}{\partial t} - \frac{1}{2} \left( \frac{\partial \Phi_1}{\partial r} \right)^2 + \frac{2-n}{n} \left( \frac{\partial \Phi_1}{\partial t} \right)^2 \quad (14)$$

$$p_2 = n \rho_2 + \frac{n(n-1)}{2} \rho_1^2 \quad (15)$$

(12), (13) に (10) を代入し、放射条件を考慮して次の解を得る。

$$\begin{aligned}
\Phi_2 &= \frac{A^2}{r} [a(r) \sin 2\varphi + b(r) \cos 2\varphi + \omega^2/2] \\
a(r) &= \omega \left\{ -\frac{1}{2r} - \frac{n+1}{8} \omega S(4\omega r) + D_1 \right\} \\
b(r) &= \omega \left\{ \frac{n+1}{8} \omega \ln r - \frac{n+1}{8} \omega C(4\omega r) + D_2 \right\} \\
S(x) &= \operatorname{Si} x \cos x - \operatorname{Ci} x \sin x \\
C(x) &= \operatorname{Ci} x \cos x + \operatorname{Si} x \sin x \\
\operatorname{Si} x &= -\int_x^\infty \frac{\sin t}{t} dt \quad (\text{積分正弦関数}) \\
\operatorname{Ci} x &= -\int_x^\infty \frac{\cos t}{t} dt \quad (\text{積分余弦関数}) \\
D_1 &= \frac{1}{1+4\omega^2} \left[ -\frac{1}{\omega^2} - \frac{3}{2} + 3\omega^2 + \frac{n+1}{4} \omega \{ 2\omega C(4\omega) + (\frac{1}{2} - 2\omega^2) S(4\omega) \} \right] \\
D_2 &= \frac{1}{1+4\omega^2} \left[ -\frac{7}{2} \omega + \frac{n+1}{4} \omega \{ (\frac{1}{2} - 2\omega^2) C(4\omega) - 2\omega S(4\omega) \} \right]
\end{aligned} \tag{16}$$

第2近似解  $\varepsilon^2 \Phi_2$  は、非波動部分

$$\varepsilon^2 \bar{\Phi}_2 = \varepsilon^2 \frac{1}{2} \cdot \frac{\omega^4}{1+\omega^2} \cdot \frac{1}{r}$$

を含む。この項により誘起される速度は、

$$\varepsilon^2 \bar{u}_2 = \varepsilon^2 \frac{\partial \bar{\Phi}_2}{\partial r} = -\varepsilon^2 \frac{1}{2} \cdot \frac{\omega^4}{1+\omega^2} \cdot \frac{1}{r^2}$$

すなわち、脈動する球は、非線形効果により流体を吸引させる。半径  $r$  の球面を通して流れ込む実質流量は、

$$\varepsilon^2 2\pi \frac{\omega^4}{1+\omega^2}$$

である。しかし、質量流束  $\rho u$  を考えてみよう。

$$\rho u = 1 + \varepsilon \frac{\partial \Phi_1}{\partial r} + \varepsilon^2 \left\{ \frac{\partial \Phi_2}{\partial r} - \frac{\partial \Phi_1}{\partial r} \frac{\partial \Phi_1}{\partial t} \right\} + O(\varepsilon^3)$$

この  $\rho u$  の時間平均  $\bar{\rho u}$  を取ると、 $O(\varepsilon^2)$  の項内の非波動部分が打ち消し合い、 $\bar{\rho u} = 1 + O(\varepsilon^3)$  となる。すなわち、 $O(\varepsilon^3)$  の精度内での議論では、質量に関しては、流入も流出もない。球は、

うすい空気を吸い寄せ、濃い空気をはき出しているのである。

### §3. 遠方場での解

遠方場における第1近似解の種々の表現、およびそれらの等価性について述べる。

#### (i) Heaps<sup>[3]</sup>の解

先の§2での第1, 第2近似解の形より、第 $n$ 摂動解の $r \rightarrow \infty$ で卓越する項のみ考えよ。

$$\Phi_n(r, t) = (-1)^n \left( \frac{r+1}{4} \right)^{n-1} \frac{(\ln r)^{n-1}}{r} f_n(\varrho), \quad n \geq 2 \quad (17)$$

の形が推論でき、また、

$$\frac{\partial \Phi_n}{\partial r} = - \frac{\partial \Phi_n}{\partial t} \quad (18)$$

も言えるので、(12)は、

$$\Delta \Phi - \frac{\partial^2 \Phi}{\partial t^2} = \frac{n+1}{2} \cdot \frac{\partial}{\partial t} \left( \frac{\partial \Phi}{\partial t} \right)^2 + (\Phi \text{の高次の項}) \quad (19)$$

と書き換えることができる。(19)に(17)を代入し、 $\varrho$ の等中の項を0と置くことにより、 $f_n$ について次の関係式を得る。

$$f_n = \frac{-1}{n-1} \sum_{m=1}^{n-1} \frac{\partial f_m}{\partial t} \cdot \frac{\partial f_{n-m}}{\partial t}$$

これより、

$$\frac{\partial f_n}{\partial t} = \frac{(-1)^{n-1}}{\omega} (A\omega)^n \sum_{[m]} \frac{(-1)^{\frac{1}{2}(n-m)} m^{n-1}}{\left\{ \frac{1}{2}(n-m) \right\}! \left\{ \frac{1}{2}(n+m) \right\}!} \sin m\varrho \quad (20)$$

を得る。ここで、 $[m]$ は、 $1 \leq m \leq n$ で、かつ、 $(n-m)$ が偶数に存するすべての $m$ に関する和を取ることを意味する。(17), (18), (20)

及び、Bessel関数の展開公式

$$J_n(z) = \left(\frac{z}{2}\right)^n \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^m}{m!(n+m)!} \left(\frac{z}{2}\right)^{2m}$$

を用いて

$$u(r, t) = \varepsilon \frac{2A}{r} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{J_n(\chi n \ln r)}{\chi n \ln r} \sin n\varphi \quad \left. \vphantom{\sum_{n=1}^{\infty}} \right\} (21)$$

$$\chi = \varepsilon \frac{n+1}{2} \omega^2 A$$

を得る。

(ii) Blackstock<sup>[4]</sup> の解

基礎方程式(1)に対して、変数変換

$$y = \omega(t - r + 1) + \delta \quad \left. \vphantom{y} \right\} (22)$$

$$z = r$$

を行うと、

$$2\omega \frac{\partial^2 \Phi}{\partial y \partial z} - \frac{\partial^2 \Phi}{\partial z^2} + \frac{2}{z} \left( \omega \frac{\partial \Phi}{\partial y} - \frac{\partial \Phi}{\partial z} \right)$$

$$= -\omega \frac{\partial}{\partial y} \left[ \frac{n+1}{2} \omega^2 \left( \frac{\partial \Phi}{\partial y} \right)^2 - 2\omega \frac{\partial \Phi}{\partial y} \frac{\partial \Phi}{\partial z} + \left( \frac{\partial \Phi}{\partial z} \right)^2 \right] \quad (23)$$

$$u = \frac{\partial \Phi}{\partial r} = \frac{\partial \Phi}{\partial z} - \omega \frac{\partial \Phi}{\partial y} \quad (24)$$

遠方で、 $\Phi \approx e^{i\omega y}/r^0$  ( $i^2 = -1$ ) と想定し、(23)、(24)の支配的項を残すことにより、

$$\frac{\partial}{\partial z} (z u) = \frac{n+1}{2} \frac{\omega}{z} (z u) \frac{\partial (z u)}{\partial y} \quad (25)$$

を得る。(25)で、

$$w = z u$$

$$f = \frac{n+1}{2} \omega \ln z$$

と変数変換して.

$$\frac{\partial W}{\partial f} - w \frac{\partial W}{\partial y} = 0 \quad (26)$$

(26)より.  $w = w(y + fw)$  (27)

を. 得る.

(27)の境界条件の具体的な形を.  $r=1$ で.

$$W = -\varepsilon \omega A \sin(\omega t + \delta)$$

と与えらる.

$$W = -\varepsilon \omega A \sin \left\{ y - \frac{r+1}{2} \omega \ln r \varepsilon \omega A \sin(y + fw) \right\} \quad (28)$$

となる.

$w$ のexplicitな表現を.  $y$ に関するFourier級数

$$\left. \begin{aligned} W &= \sum_{n=1}^{\infty} B_n \sin n y \\ B_n &= \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} W \sin n y dy \end{aligned} \right\} (29)$$

の形で求める.

$$y = \zeta + \varepsilon \omega A f \sin \zeta$$

と変数変換し. (この時.  $w = -\varepsilon \omega A \sin \zeta$ )

Bessel関数の積分表示

$$J_n(z) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \cos(n\zeta - z \sin \zeta) d\zeta$$

および. Bessel関数の漸化公式

$$J_{n-1}(z) + J_{n+1}(z) = \frac{2n}{z} J_n(z)$$

を用いて.

$$w = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2(-1)^n J_n(n\varepsilon \omega A f)}{n f} \sin n y \quad (30)$$



を得る。(30)は、Heapsの解の(21)の表現と一致している。

さて、

$$\frac{\partial u}{\partial r} \approx -\frac{\omega}{r} \cdot \frac{\partial W}{\partial y} = -\frac{2\omega}{rf} \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n J_n(n\varepsilon\omega A f) \cos ny$$

となるが、Kapteyn展開

$$\sum_{n=1}^{\infty} J_n(nz) = \frac{z}{2(1-z)}$$

から、 $\cos ny = (-1)^n$  となる時刻に、 $f = f_s \equiv (\varepsilon\omega A)^{-1}$  ( $f = \frac{n+1}{2}\omega \ln r$ ) において、 $|\partial u / \partial r| = \infty$  となることが判る。だから、 $f > f_s$  では  $u$  は多価になり、 $f_s$  は衝撃波の発生する位置を示している。

また、これとは別に、(28)を満足する解として、

$$W = -\varepsilon\omega A \sin\{\omega(t-\eta+1)+\delta\} \quad (31)$$

の形を仮定してみよう。ただし、 $\eta$  はある  $r$  と  $t$  の関数である。(28)と(31)を比較して、

$$r = \eta - \varepsilon \frac{n+1}{2} \omega A \ln r \sin\{\omega(t-\eta+1)+\delta\} \quad (32)$$

の関係があれば、(31)は(28)の解となる。したがって、

$$u = -\frac{\varepsilon\omega A}{r} \sin\{\omega(t-\eta+1)+\delta\} \quad (33)$$

と表わされる厳密解を得る。これは、前述した線形解(11)式の遠方場における表示と比較した場合に、非線形効果が位相関数  $\eta$  の空間座標  $r$  を歪ませていることを示す。上記の解(31)、(32)は、くり込みの方法より得られる解と密接な関係がある。

## §4, くり込みの方法. および第2近似解

## (i) くり込みの方法

正則摂動展開を  $O(\varepsilon^3)$  まで行うことにより,  $r$  の十分大きい所で,

$$\begin{aligned}
 u = & -\frac{\varepsilon\omega A}{r} \left[ \sin\varphi - \varepsilon \frac{\nu+1}{4} \omega^2 A \left\{ \ln r \sin 2\varphi + B \sin(2\varphi+\beta) \right\} \right. \\
 & + \left. \left( \varepsilon \frac{\nu+1}{4} \omega^2 A \right)^2 \left\{ -\frac{(\ln r)^2}{2} (\sin\varphi - \sin 3\varphi) - \frac{B \ln r (\sin(\varphi+\beta) - \sin(3\varphi+\beta))}{2} \right\} \right. \\
 & \left. + O\left(\frac{1}{r}, \varepsilon \ln r / r^2, \varepsilon^2 / r, \varepsilon^3\right) \right] \quad (34)
 \end{aligned}$$

を得る。ここに,

$$\tan\beta = -D_1/D_2, \quad B = \frac{8}{\nu+1} \frac{\sqrt{D_1^2 + D_2^2}}{\omega}, \quad \varphi = \omega(t-r+1) + \delta$$

〜に関連した項は, Heaps の解を表わす。

まず, 〜に関連した項(遠方場における第1近似解)を考察する。大雑把に言, て,

$$\ln r > \left\{ \varepsilon \frac{\nu+1}{4} \omega^2 A \right\}^{-1}$$

の成り立つ  $r$  の領域では, 上記の級数の各項は,  $\varepsilon$  の昇中の方向に増加し, したが, て, この級数は uniformly valid でないことがわかる。すなわち, 少なくとも上記の領域に対して正則摂動展開が破綻し, 適当な特異摂動法を用いるのが一つの解決策となる。ここでは, 上記の問題にくり込みの方法を用いてみる。

$$r = \eta + \sum_{n=1}^{\infty} \varepsilon^n \bar{f}_n(\eta, t) \quad (35)$$

と変数変換し、 $\ln r$  の特異性を持つ項を消すように、 $\bar{f}_n(\eta, t)$  の関数形を決める。

Kelly と Nayfeh<sup>(1)(2)</sup> は、(34)の級数(~~~~の部分)の第1項と第2項のみを考慮して、

$$\bar{f}_1 = -\frac{\eta+1}{2} \omega A \ln \eta \sin\{\omega(t-\eta+1)+\delta\} \quad (36)$$

を得た。しかし、三次以上の項を考慮した時、少なくとも、 $\sum_{n=2}^{\infty} \epsilon^n \bar{f}_n$  の項が  $\bar{f}_1$  の項に比べ無視できることを証明しない限り、くり込みの方法の適用妥当性は言えない。

前に、第1近似解の厳密な表現として、

$$\begin{aligned} u &= -\frac{\epsilon \omega A}{r} \sin \bar{\varphi} \\ \bar{\varphi} &= \omega(t-\eta+1) + \delta \\ r &= \eta - \epsilon \frac{\eta+1}{2} \omega A \ln r \sin \bar{\varphi} \end{aligned} \quad (37)$$

を得た。(36)と(37)を比較した場合、その相異は、単に  $\ln r$  が、 $\ln \eta$  に置き換わっているだけであることがわかる。したがって、

$$\bar{f}_n = 0, \quad n \geq 2$$

が結論でき、第1近似解に関しては、くり込みの方法の正当性が示せた。

$$\frac{\partial u}{\partial r} = \frac{\partial u}{\partial \eta} \left( \frac{\partial r}{\partial \eta} \right)^{-1}$$

の関係が成立するので、 $\partial u / \partial \eta \neq 0$  である限り、 $\partial r / \partial \eta = 0$  を満足する時間と場所で  $\partial u / \partial r = \infty$  となり、これより遠方では  $u$  は多

価となる。すなわち、衝撃波の発生する位置は、

$$\frac{\partial r}{\partial \eta} = 1 + \varepsilon \frac{n+1}{2} \omega^2 A \ln \eta_s \cos\{\omega(t-\eta_s+1)+\delta\} + O(\varepsilon/\eta_s) = 0$$

を満たす  $\eta$  により、(37) により与えられる。

### (ii) くり込みの方法による第2近似解

(i) では、第1近似解(Heapsの解)に対してくり込みの方法を適用して、遠方場で有効な近似解を得ることができた。しかし、残りの級数(=に関連した部分)について調べてみると、低次の特異性が残っていることがわかる。これらの項を含めたくり込みも、次に考える。

= の級数の項が満足しなければならぬ関係式を求めよう。解の形を、

$$\begin{aligned} \Phi &= \sum_{n=1}^{\infty} \varepsilon^n \Phi_n \\ \Phi_n &= (-1)^n \left(\frac{n+1}{4} \ln r\right)^{n-1} \frac{f_n(\rho)}{r} \\ &\quad + \left(\frac{n+1}{4} \ln r\right)^{n-2} B \frac{g_n(\rho)}{r} + (\text{the other terms}) \end{aligned} \quad (38)$$

とおく。  $f_n$  は、(20) で与えられる。(38) を、基礎方程式(19)に代入し、(18) より次式を得る。

$$G_n = \frac{2}{n-2} \frac{\partial}{\partial t} \sum_{m=1}^{n-1} F_m G_{n-m} \quad n \geq 3 \quad (39)$$

ただし、

$$F_n = (-1)^{n+1} \frac{\partial f_n}{\partial t}, \quad G_n = \frac{\partial g_n}{\partial t}$$

(20) と (39) より、 $G_n(\varphi)$  は、具体的に次のように与えられる。

$$\left. \begin{aligned} G_2 &= -2\omega \sin(2\varphi + \beta) \\ G_3 &= -2\omega^3 A \{ \sin(\varphi + \beta) - 3 \sin(3\varphi + \beta) \} \\ G_4 &= 8\omega^5 A^2 \{ \sin(2\varphi + \beta) - 2 \sin(4\varphi + \beta) \} \\ G_5 &= \frac{\omega^7 A^3}{3} \{ 5^3 \sin(5\varphi + \beta) - 3^4 \sin(3\varphi + \beta) \\ &\quad + 3 \sin(\varphi + \beta) - \sin(\varphi - \beta) \} \end{aligned} \right\} (40)$$

(18) より、速度  $u(r)$  の第 2 近似解に依存する部分  $\underline{u}$  は、

$$\underline{u} = - \sum_{n=2}^{\infty} \varepsilon^2 \left( \varepsilon \frac{n+1}{4} \ln r \right)^{n-2} B \frac{G_n}{r} \quad (41)$$

で与えられる。

$u$  について、 $\angle$ り込み

$$r = \eta - \varepsilon \frac{n+1}{2} \omega A \ln \eta \sin \bar{\varphi} + \varepsilon^2 (n+1) \omega \ln \eta h(\bar{\varphi}) \quad (42)$$

を行う。その結果、

$$\begin{aligned} u &= -\frac{\varepsilon \omega A}{\eta} \sin \bar{\varphi} + \varepsilon^2 \frac{2\omega B}{\eta} \sin(2\bar{\varphi} + \beta) \\ &\quad + (\text{higher order terms}) \end{aligned}$$

となるように  $h(\bar{\varphi})$  を決定できるかどうか調べる。

$O(\varepsilon^3)$  問題；

$$\varepsilon^3 \frac{\partial \underline{u}_1}{\partial r} = -\frac{\varepsilon \omega A}{\eta} \sin \bar{\varphi} + \dots + \varepsilon^3 (n+1) \omega^3 A \frac{\ln \eta}{\eta} \omega \bar{\varphi} h(\bar{\varphi})$$

$$\varepsilon^2 \frac{\partial \underline{u}_2}{\partial r} = \varepsilon^2 \frac{2\omega B}{\eta} \sin(2\bar{\varphi} + \beta) + \dots$$

$$- \varepsilon^3 (n+1) \omega^3 A B \frac{\ln \eta}{\eta} \{ \sin(\bar{\varphi} + \beta) - \sin(3\bar{\varphi} + \beta) \} + \dots$$

$$\varepsilon^3 \frac{\partial \underline{u}_3}{\partial r} = \varepsilon^3 \frac{n+1}{2} \omega^3 A B \frac{\ln \eta}{\eta} \{ \sin(\bar{\varphi} + \beta) - 3 \sin(3\bar{\varphi} + \beta) \} + \dots$$

$\varepsilon^3$  の項の和が 0 という条件から、

$$h(\bar{\varphi}) = B \sin(2\bar{\varphi} + \beta)$$

が決まる。

高次の問題に対しては、Heapsの解のTaylor展開に対しては、(42)の最後の項の影響、 $\equiv$ に関連した項のTaylor展開に対しては、(42)の右辺第2項の影響を調べればよい。その結果、展開の $\varepsilon^4$ の項の和、および $\varepsilon^5$ の項の和が0になることを示せた。

### (iii) 球近傍の解と遠方場の解の matching

我々が着目している脈動している球と衝撃波の間の領域(流れの場)で一様に有効な近似解の表現を与えよう。

先のくり込みの結果を見てみよう。 $r$ と $\eta$ の関係は、

$$r = \eta - \varepsilon \frac{\eta+1}{2} \omega A \ln \eta \sin \bar{\varphi} + \varepsilon^2 (\eta+1) \omega B \ln \eta \sin(2\bar{\varphi} + \beta) \quad (43)$$

で与えられる。(43)から、 $r=1$ と $\eta=1$ 、 $r \rightarrow \infty$ と $\eta \rightarrow \infty$ が対応していることに注意されたい。さらに、 $\eta$ が1に近い球近傍の領域では、第2項、第3項は非常に小さく、従って、球近傍の領域でも、(43)の変換を使用してよい近似解を与えるであろう。ただし、球近傍においては、遠方場で省略できる項も、省略せず残しておかなければならない。

#### 1) 第1近似解

$$\left. \begin{aligned} \varepsilon u_1 &= -\frac{\varepsilon A}{2} (\omega \sin \bar{\varphi} - \omega \bar{\varphi} / \eta) + O(\varepsilon^2) \\ r &= \eta - \varepsilon \frac{\eta+1}{2} \omega A \ln \eta \sin \bar{\varphi} + O(\varepsilon^2) \end{aligned} \right\} (14)$$

2) 修正された近似解 (第1近似解 + 第2近似解)

$$u = \varepsilon u_1 + \varepsilon^2 u_2 + O(\varepsilon^3) = \varepsilon \frac{\partial \Phi_1}{\partial r} + \varepsilon^2 \frac{\partial \Phi_2}{\partial r} + O(\varepsilon^3) \quad (45)$$

ただし、 $u_1$  は (11)、 $\Phi_2$  は (16) で与えられる。

(45) に (43) を代入し、 $\varepsilon$  の中ごとに整理して、次式を得る。

$$\begin{aligned} u = & -\frac{\varepsilon A}{\eta} (\omega \sin \bar{\varphi} - \omega \bar{\varphi} / \eta) \\ & + \varepsilon^2 \left[ \frac{\partial \Phi_2}{\partial r} \Big|_{r=\eta} - \frac{n+1}{4} \omega^3 A^2 \frac{\ln \eta}{\eta} \sin 2\bar{\varphi} \right. \\ & \left. - (n+1) \omega A^2 \frac{\ln \eta}{\eta^2} \sin \bar{\varphi} (\omega \sin \bar{\varphi} - \omega \bar{\varphi} / \eta) \right] + O(\varepsilon^3) \quad (46) \\ r = & \eta - \varepsilon \frac{n+1}{2} \omega A \ln \eta \sin \bar{\varphi} + \varepsilon^2 (n+1) \omega B \ln \eta \sin (2\bar{\varphi} + \beta) \end{aligned}$$

(44)、(46) による計算結果を、図2～図7に示す。

また、密度  $\rho$  や圧力  $p$  は、(8)、(9)、(14)、(15) より、

$$\rho \simeq 1 - \frac{\partial \Phi}{\partial t} \simeq 1 + u$$

$$p \simeq 1 + n(\rho - 1) = 1 + n u$$

より、 $u$  と同様のくり込みで計算できる。

## §5, まとめ

以上、球表面から放射される正弦波が、非線形効果によりいわゆる‘突、立ち’を起こし、遠方場に衝撃波を形成する問題を取り扱った。我々は、§3で、Blackstockのimplicitな解の表現から、一つのexplicitな解の表現を得た。この結果から、第1近似解に対しては、くり込みの方法の有効性を容易に実証することができた。しかし、この手順は高次近似解に

対してはうまく行きそうにない。現時点においては、高次近似解を実際に求めることのできる唯一の方法はくり込みの方法である。しかし、その適用正当性を高次近似解に対しては証明することはできなかつたが、強く支持する結果は§4で示した。

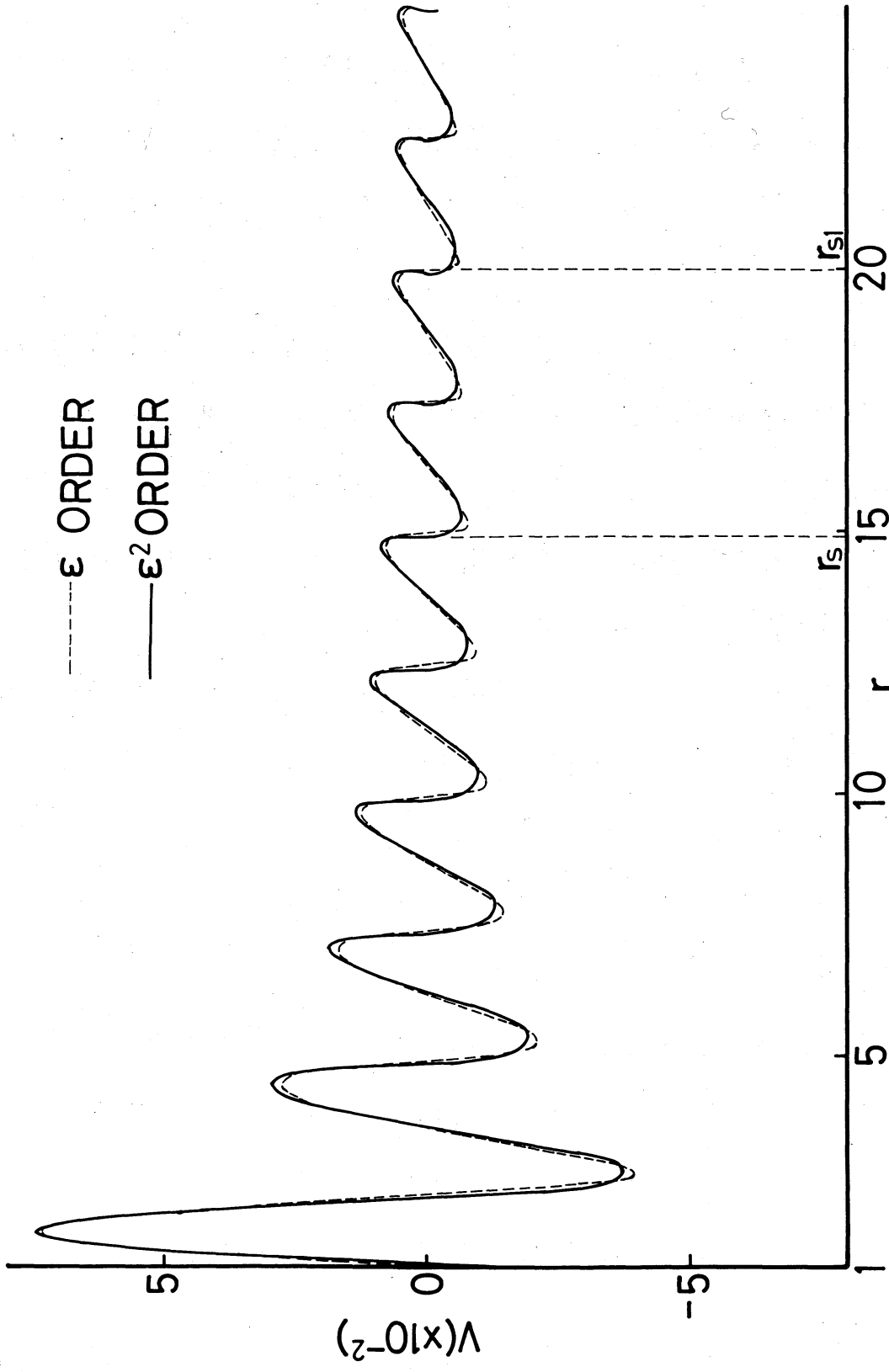
図から直ちにわかることは、波形に関しては、第2近似解の及ぼす修正効果は比較的小さいのに対して、衝撃波の発生位置に関しては、第2近似解による修正効果は場合により比較的大きくなる。それは、後者に対しては、 $\varepsilon$ と共に $\omega$ が大きき結果に影響するためであると思われる。

今後の課題としては、 $\eta$ や $\nu$ の存在するより一般的な問題についても有効であるようなくり込みを考へることが上げられる。

#### 参考文献

- [1] S. G. Kelly and A. H. Nayfeh; J. Sound Vib. 72 (1), 25 (1980)
- [2] S. G. Kelly and A. H. Nayfeh; J. Sound Vib. 79 (1), 145 (1981)
- [3] H. S. Heaps; J. Acoust. Soc. Am. 34, 355 (1962)
- [4] D. T. Blackstock; J. Acoust. Soc. Am. 36, 217 (1966)





$\epsilon=0.05, \gamma=1.4, \omega=2.5, t=0$

図2, 波形と衝撃波の位置(1)

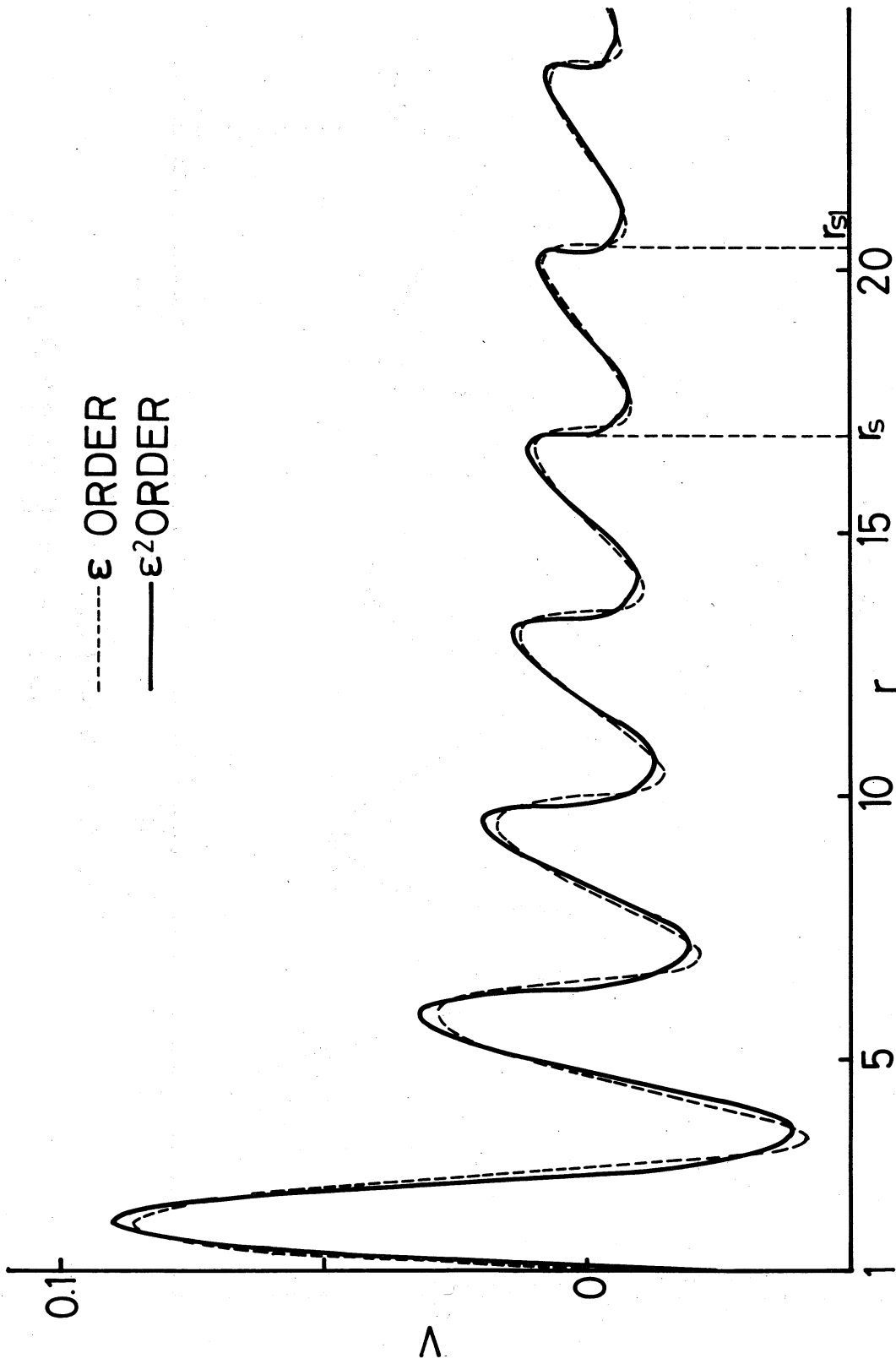
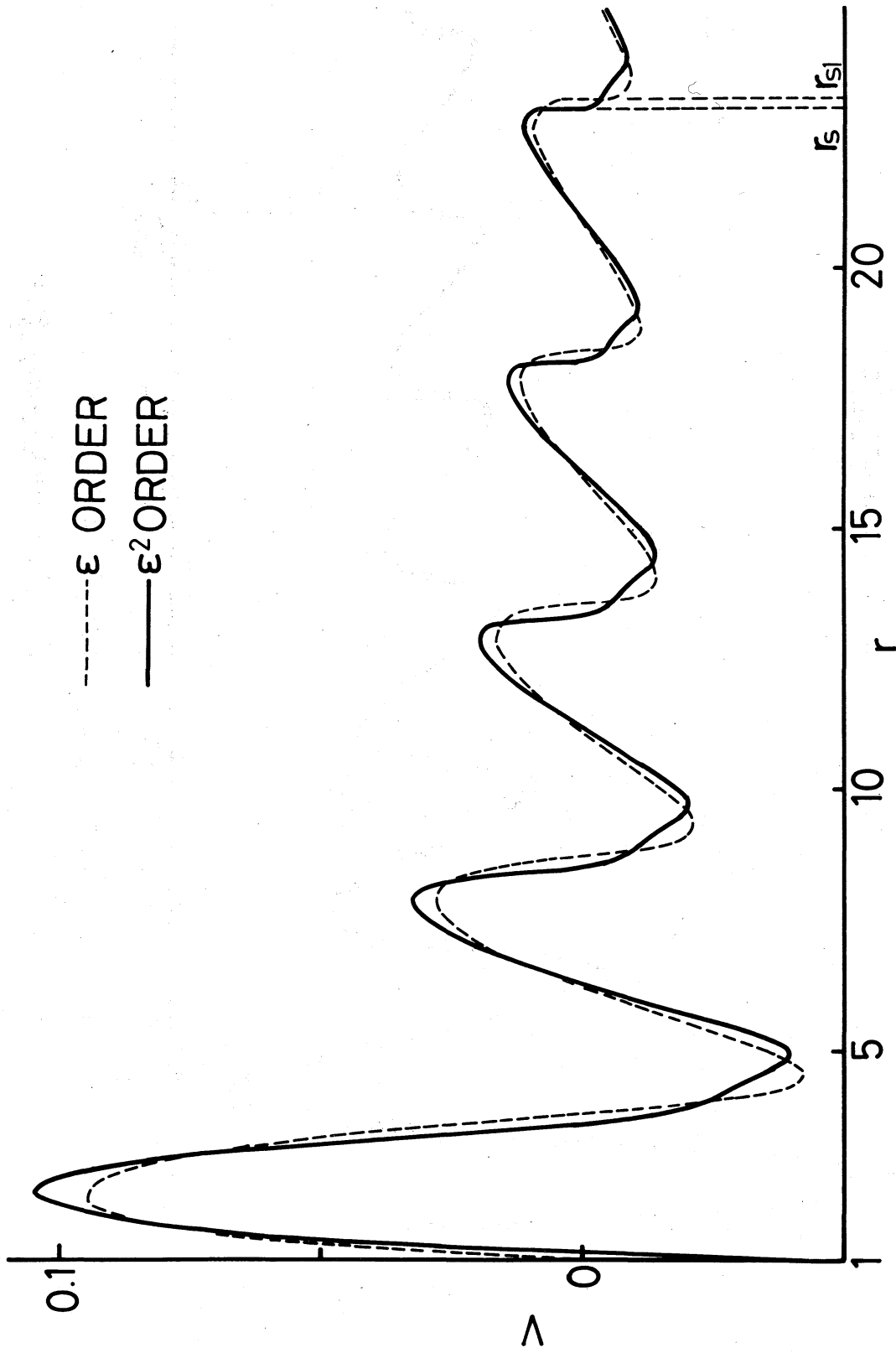
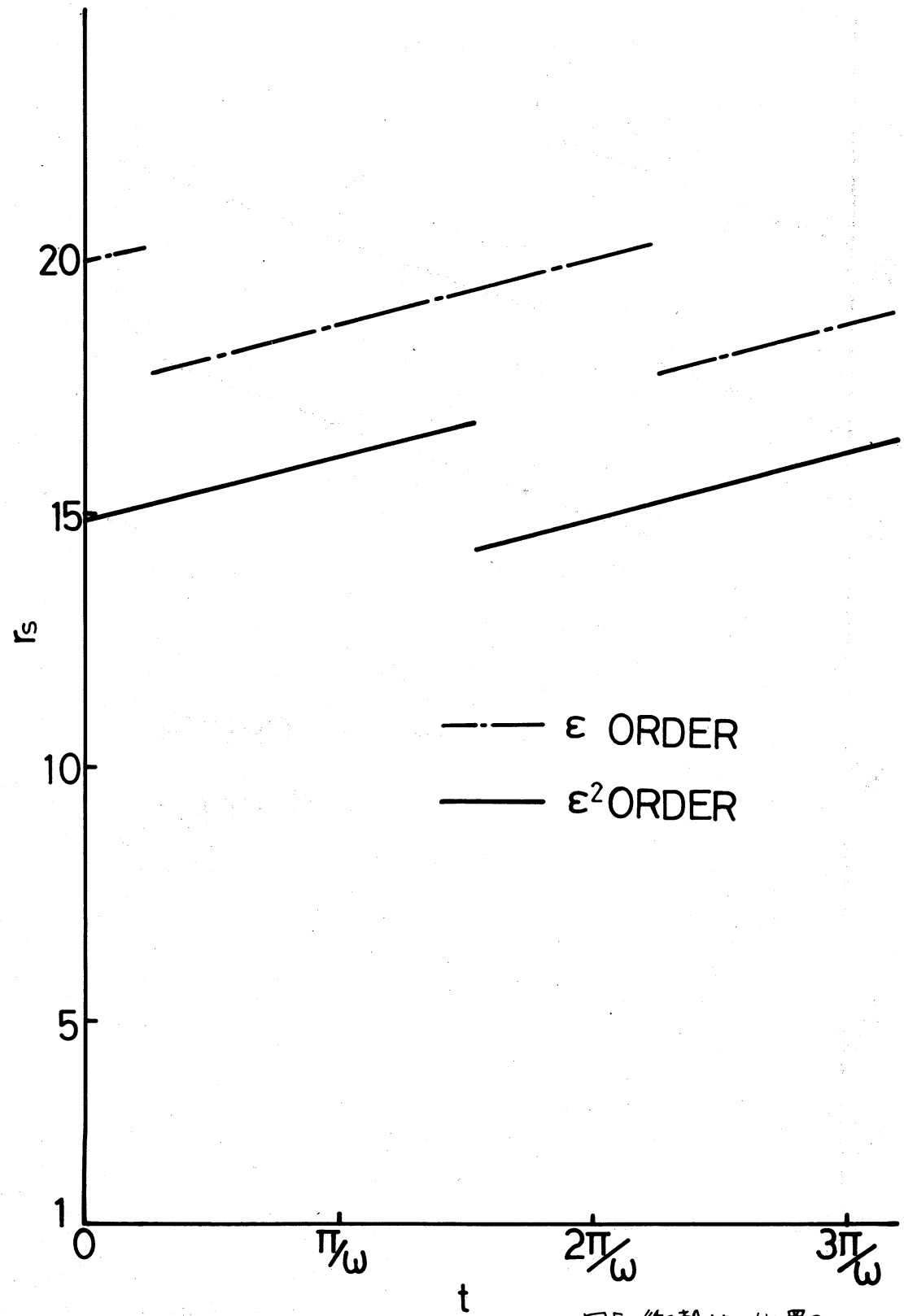


図3, 波形と衝撃波の位置(2)



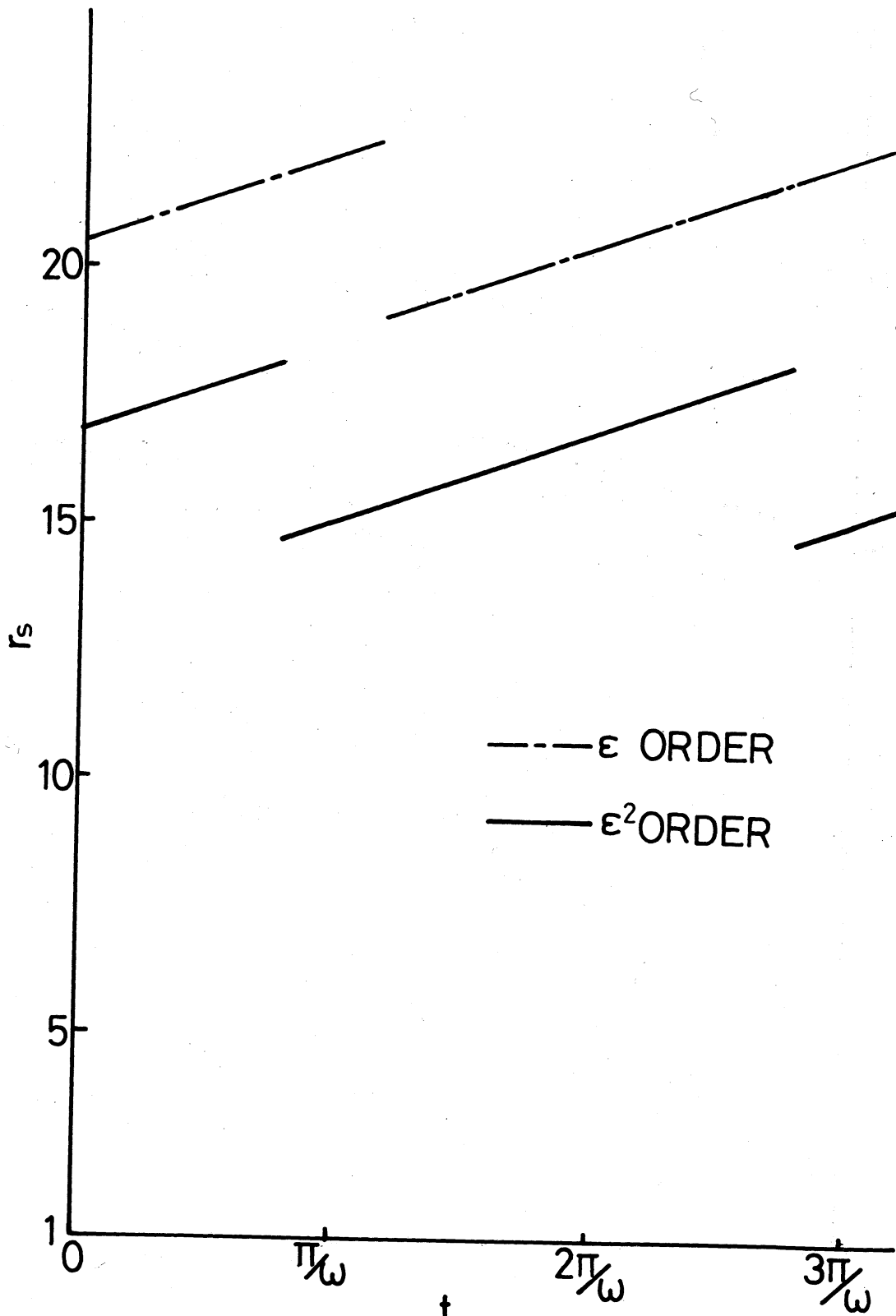
$\epsilon=0.2, \gamma=1.4, \omega=1.3, t=0$

図4, 波形と衝撃波の位置(3)



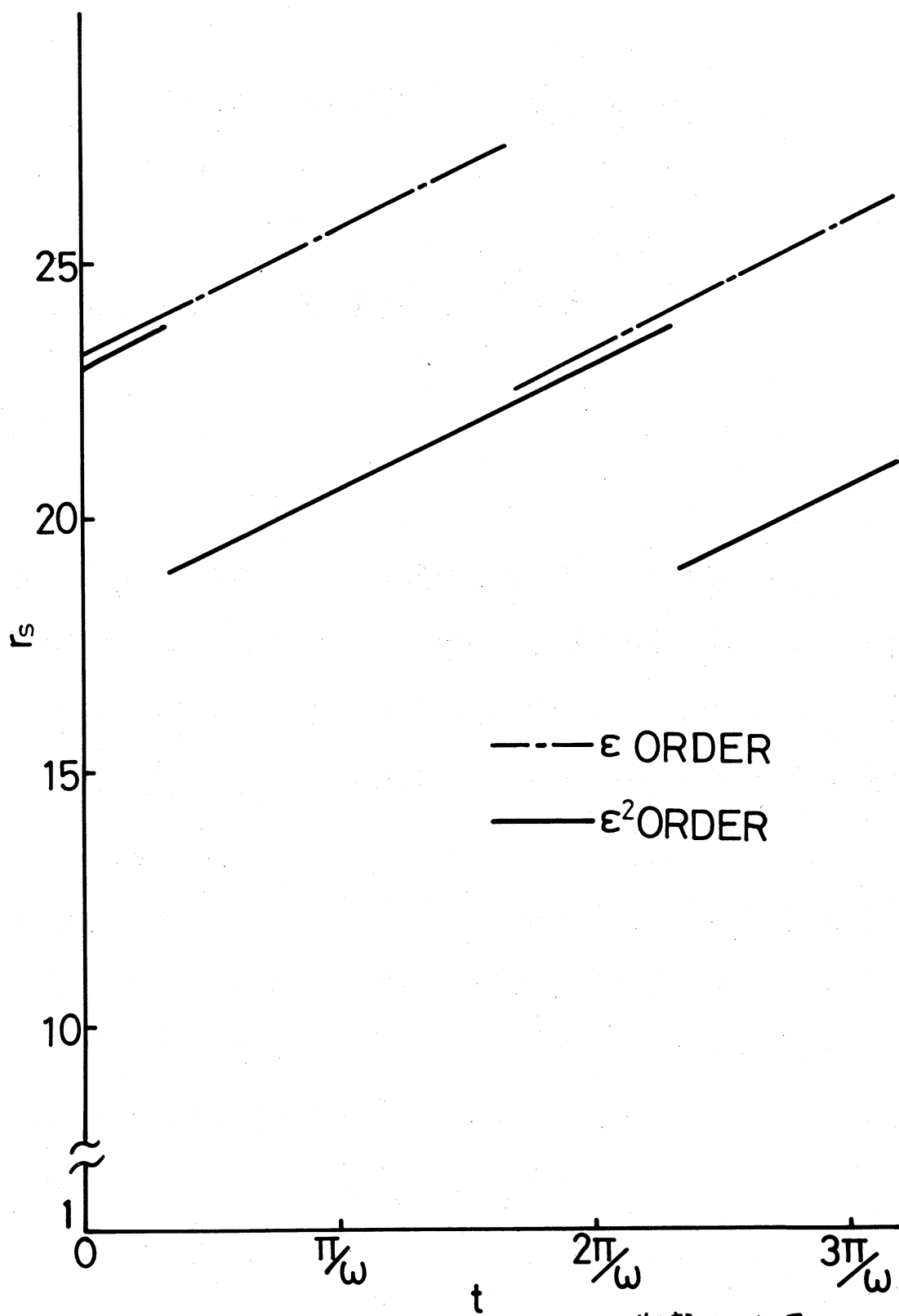
$\epsilon=0.05, \gamma=1.4, \omega=2.5$

図5. 衝撃波の位置の時間変動(1)



$\epsilon=0.1, \gamma=1.4, \omega=1.8$

図6, 衝撃波の位置の時間変動(2)



$$\epsilon=0.2, \gamma=1.4, \omega=1.3$$

図7, 衝撃波の位置の  
時間変動(9)