数理解析研究所講究録
第514巻 1984年 231-257

非線形方程式のBifurcation Pointsの計算方法について

徳島大工 山本 範夫 (Norio Yamamoto)

§1. 序

我々は，非線形方程式のbifurcation points を正確に求める方法を提案する。そして，我々が，[14]で提案した周期解のbifurcation points を求める方法が，今回の方法と本質的に同じになることを示す。我々は，さらに，周期解がHopf分岐をおこす点を計算する方法を提案する。

§2. 非線形方程式 $F(x,B)=0$ の場合

$(\hat{x},\hat{B})\in\Omega$ を，n次元の非線形方程式

(2.1) $$F(x,B)=0 \qquad (B\text{はパラメータ})$$

をみたし，かつ

(2.2) $$n-1=\operatorname{rank}F_x(\hat{x},\hat{B})=\operatorname{rank}(F_x(\hat{x},\hat{B}),F_B(\hat{x},\hat{B}))$$

を満足する点とする。ただし，$F(x,B)$ は，(x,B)-空間のある領域Ωで，(x,B)に関して2回連続微分可能であり，

$F_x(x,B)$ は，$F(x,B)$ の x に関するJacobian行列であり，$F_B(x,B)$ は，$F(x,B)$ の B に関する偏導関数である。我々は，この $(\hat{x},\hat{B})$ を，方程式(2.1)の"bifurcation point"と呼ぶことにする。話を簡単にするために，我々は，

(2.3) $$n-1=\operatorname{rank} F_x(\hat{x},\hat{B})=\operatorname{rank} F_0(\hat{x},\hat{B})$$

を仮定する。ここで，$F_0(\hat{x},\hat{B})$ は，$F_x(\hat{x},\hat{B})$ の第1列を取り除いた $n\times(n-1)$ 行列とする。一方，線形代数の結果より，ある自然数 j $(1\leqq j\leqq n)$ が存在して

(2.4) $$n=\operatorname{rank}(F_x(\hat{x},\hat{B}),e_j)=\operatorname{rank}(F_0(\hat{x},\hat{B}),e_j)$$

が成り立つ。ただし，e_j は，$e_j=(0,\cdots,0,\underset{j}{1},0,\cdots,0)^T$ なる n 次元ベクトルである。ここで，$(\cdots)^T$ は，ベクトル $(\cdots)$ の転置ベクトルをあらわす。仮定(2.2)，(2.3)より，方程式

(2.5) $$\begin{cases} F_x(\hat{x},\hat{B})h_2+F_B(\hat{x},\hat{B})=0, \\ h_2^1=0 \end{cases} \qquad \left(h_2=(h_2^1,h_2^2,\cdots,h_2^n)^T\right)$$

は，ただ1つの解 $\hat{h}_2$ をもつ。したがって，bifurcation point $(\hat{x},\hat{B})$ を求めるために，我々は，パラメータ β を導入して，つぎの方程式

(2.6) $$W(z)=\begin{pmatrix} F(x,B)-\beta e_j \\ F_x(x,B)h_1 \\ F_x(x,B)h_2+F_B(x,B) \\ h_1^1-1 \\ h_2^1 \end{pmatrix}=0$$

について考える。ただし，$z=(x,h_1,h_2,B,\beta)^T$，$x=(x_1,\cdots,x_n)^T$，$h_i=(h_i^1,h_i^2,\cdots,h_i^n)^T$ $(i=1,2)$．方程式 (2.6) は，解 $\hat{z}=(\hat{x},\hat{h}_1,\hat{h}_2,\hat{B},0)^T$ をもつ。ここで，$\hat{h}_1$ は，方程式

$$(2.7)\qquad \begin{cases} F_x(\hat{x},\hat{B})h_1=0, \\ h_1^1-1=0 \end{cases} \qquad \left(h_1=(h_1^1,h_1^2,\cdots,h_1^n)^T\right)$$

の解であり，$\hat{h}_2$ は，(2.5) の解である。仮定より，$W(z)$ は，z に関して連続微分可能となり，$W'(z)$ を，$W(z)$ の z に関する Jacobian 行列とすれば，解 $\hat{z}$ に対して

$$(2.8)\qquad \det W'(\hat{z})$$

$$=\begin{vmatrix} F_x(\hat{x},\hat{B}) & O & O & F_B(\hat{x},\hat{B}) & -e_j \\ F_{xx}(\hat{x},\hat{B})\hat{h}_1 & F_x(\hat{x},\hat{B}) & O & F_{xB}(\hat{x},\hat{B})\hat{h}_1 & 0 \\ F_{xx}(\hat{x},\hat{B})\hat{h}_2+F_{Bx}(\hat{x},\hat{B}) & O & F_x(\hat{x},\hat{B}) & F_{xB}(\hat{x},\hat{B})\hat{h}_2+F_{BB}(\hat{x},\hat{B}) & 0 \\ 0\,0\cdots0 & 1\,0\cdots0 & 0\,0\cdots0 & 0 & 0 \\ 0\,0\cdots0 & 0\,0\cdots0 & 1\,0\cdots0 & 0 & 0 \end{vmatrix}$$

$$=\begin{vmatrix} 0 & F_0(\hat{x},\hat{B}) & 0 & O & 0 & O & 0 & -e_j \\ (\hat{\#}) & G_0(\hat{x},\hat{h}_1,\hat{B}) & 0 & F_0(\hat{x},\hat{B}) & 0 & O & (\hat{\star}) & 0 \\ (\hat{\#\#}) & H_0(\hat{x},\hat{h}_2,\hat{B}) & 0 & O & 0 & F_0(\hat{x},\hat{B}) & (\hat{\star\star}) & 0 \\ 0 & 0\cdots0 & 1 & 0\cdots0 & 0 & 0\cdots0 & 0 & 0 \\ 0 & 0\cdots0 & 0 & 0\cdots0 & 1 & 0\cdots0 & 0 & 0 \end{vmatrix}.$$

ただし，

$$\left\{ (\hat{\#})=\{F_{xx}(\hat{x},\hat{B})\hat{h}_1\}\hat{h}_1, \right.$$

$$(2.9)\quad \begin{cases} (\widehat{\#\#}) = \{F_{xx}(\hat{x},\hat{B})\hat{h}_2 + F_{Bx}(\hat{x},\hat{B})\}\hat{h}_1, \\ (\hat{☆}) = F_{xB}(\hat{x},\hat{B})\hat{h}_1 + \{F_{xx}(\hat{x},\hat{B})\hat{h}_1\}\hat{h}_2, \\ (\widehat{☆☆}) = F_{xB}(\hat{x},\hat{B})\hat{h}_2 + F_{BB}(\hat{x},\hat{B}) + \{F_{xx}(\hat{x},\hat{B})\hat{h}_2 + F_{Bx}(\hat{x},\hat{B})\}\hat{h}_2 \end{cases}$$

であり，$G_0(\hat{x},\hat{h}_1,\hat{B})$ および $H_0(\hat{x},\hat{h}_2,\hat{B})$ は，それぞれ，$F_{xx}(\hat{x},\hat{B})\hat{h}_1$ および $F_{xx}(\hat{x},\hat{B})\hat{h}_2+F_{Bx}(\hat{x},\hat{B})$ の第1列を取り除いた $n\times(n-1)$ 行列である。(2.9) より，

$$(2.10)\qquad (\widehat{\#\#}) = (\hat{☆}).$$

このとき，我々は，次の結果を得る。

定理1. $\operatorname{rank}(F_0(\hat{x},\hat{B}),(\hat{\#})) = n-1$ が成り立つならば，

$$(2.11)\qquad \det W'(\hat{z}) \neq 0 \rightleftarrows \operatorname{rank}(F_0(\hat{x},\hat{B}),(\hat{☆})) = n.$$

定理2. $\operatorname{rank}(F_0(\hat{x},\hat{B}),(\hat{☆})) = n-1 < n = \operatorname{rank}(F_0(\hat{x},\hat{B}),(\hat{\#}))$ が成り立つならば，

$$(2.12)\qquad \det W'(\hat{z}) \neq 0 \rightleftarrows \operatorname{rank}(F_0(\hat{x},\hat{B}),(\widehat{☆☆})) = n.$$

定理3. $\operatorname{rank}(F_0(\hat{x},\hat{B}),(\hat{\#})) = \operatorname{rank}(F_0(\hat{x},\hat{B}),(\hat{☆})) = n$ が成り立つならば，

$$(2.13)\qquad \det W'(\hat{z}) \neq 0 \rightleftarrows \operatorname{rank}(F_0(\hat{x},\hat{B}),\hat{S}) = n.$$

ただし，

$$(2.14)\qquad \hat{S} = F_{xB}(\hat{x},\hat{B})\hat{h}_2 + F_{BB}(\hat{x},\hat{B}) + \{F_{xx}(\hat{x},\hat{B})\hat{h}_2 + F_{Bx}(\hat{x},\hat{B})\}\hat{k}.$$

ここで，$\hat{k}$は，方程式

$$
(2.15)\quad \begin{cases} F_x(\hat{x},\hat{B})k + F_B(\hat{x},\hat{B}) = 0, \\ F_x(\hat{x},\hat{B})k' + \{F_{xx}(\hat{x},\hat{B})\hat{h}_1\}k + F_{xB}(\hat{x},\hat{B})\hat{h}_1 = 0, \\ k_1' = 0 \end{cases}
$$

をみたす解$(\hat{k},\hat{k}')^T$のk-成分$\hat{k}$である。ただし，$k=(k_1, \cdots, k_n)^T$，$k'=(k_1',\cdots,k_n')^T$.

§3．　特性乗数１をもつ周期解の分岐について

我々は，n次元の周期的微分方程式系

$$
(3.1)\qquad \frac{dx}{dt} = X(x,B,t) \qquad \begin{pmatrix} t\text{に関し周期}2\pi, \\ B\text{はパラメータ} \end{pmatrix}
$$

の周期解$x=x(t)$で，その第一変分方程式

$$
(3.2)\qquad \frac{dh}{dt} = X_x(x(t),B,t)h
$$

が，特性乗数１をもつ場合，すなわち，(3.2)の$\Phi(0)=E_n$（n次の単位行列）をみたす基本行列を$\Phi(t)$とするとき，$\Phi(2\pi)$が固有値１をもつ場合について考える。ここで，$X(x,B,t)$は，ある領域$\Delta\times R$で定義されており，そこで，(x,B)に関して２回連続微分可能であり，$X(x,B,t)$およびその(x,B)に関する１階，２階偏導関数は，すべて，$\Delta\times R$で(x,B,t)に関して連続であるとする。ただし，Δは，(x,B)-

空間のある領域であり，Rは数直線である。いま，$(x(0), B) \in \Delta$ に対して，$\varphi(0, x(0), B) = x(0)$ をみたす(3.1)の解を，$\varphi(t, x(0), B)$ と書くことにして，つぎの方程式

(3.3) $\quad F(x(0), B) = \varphi(0, x(0), B) - \varphi(2\pi, x(0), B) = x(0) - \varphi(2\pi, x(0), B) = 0$

について考える。そうすれば，(3.3)をみたす$(\tilde{x}(0), \tilde{B})$の$x$-成分$\tilde{x}(0)$は，実は，(3.1)の$B=\tilde{B}$における$2\pi$-周期解の初期値になっている。すなわち，$B=\tilde{B}$のとき，$t=0$で$\tilde{x}(0)$を通る(3.1)の解$\varphi(t, \tilde{x}(0), \tilde{B})$は，$2\pi$-周期解になる。故に，(3.1)の$2\pi$-周期解を求める問題は，非線形方程式(3.3)をみたす点を求める問題に帰着される。仮定より，$F(x(0), B)$は，$(x(0), B)$に関して2回連続微分可能であり，$F_x(x(0), B)$を，$F(x(0), B)$の$x(0)$に関するJacobian行列とすれば，

(3.4) $$F_x(x(0), B) = E_n - \Phi(2\pi)$$

となる。したがって，(3.1)の特性乗数1をもつ周期解で分岐するものについて考えるという問題は，(3.3)をみたす$(\hat{x}(0), \hat{B}) \in \Delta$で，

(3.5) $$\begin{cases} n-1 = \operatorname{rank} F_x(\hat{x}(0), \hat{B}) = \operatorname{rank}\,[E_n - \hat{\Phi}(2\pi)] \\ = \operatorname{rank}\,[E_n - \hat{\Phi}(2\pi), \hat{\Psi}_1(2\pi)] = \operatorname{rank}\,(F_x(\hat{x}(0), \hat{B}), F_B(\hat{x}(0), \hat{B})) \end{cases}$$

を満足するものについて考えるという問題に帰着される。ただし，$\hat{\Phi}(t)$は，$x=\hat{x}(t)$, $B=\hat{B}$のときの(3.2)の$\hat{\Phi}(0)=E_n$をみたす基本行列であり，$\hat{\Psi}_1(t) = \hat{\Phi}(t)\int_0^t \hat{\Phi}^{-1}(s) X_B(\hat{x}(s), \hat{B}, s)\,ds$

である。ここで，$\hat{x}(t)$ は，$B=\hat{B}$ のとき，$t=0$ で $\hat{x}(0)$ を通る (3.1) の解，すなわち，2π-周期解であり，$F_B(x(0),B)$ および $X_B(x,B,t)$ は，それぞれ，$F(x(0),B)$ および $X(x,B,t)$ の B に関する偏導関数である。実は，$F_B(\hat{x}(0),\hat{B})=-\hat{\Phi}_1(2\pi)$. この場合，話を簡単にするために，§2 と同様に，

(3.6) $\quad n-1=\mathrm{rank}\, F_x(\hat{x}(0),\hat{B})=\mathrm{rank}\left[E_n-\hat{\Phi}(2\pi)\right]=\mathrm{rank}\ \hat{D}_0(2\pi)$

を仮定する。ここで，$\hat{D}_0(t)$ は，$E_n-\hat{\Phi}(t)$ の第1列を取り除いた $n\times(n-1)$ 行列である。一方，n 次元ベクトル $e_j=(0,\cdots,0,\underset{j}{1},0,\cdots,0)^T$ は，

(3.7) $\quad n=\mathrm{rank}\left[E_n-\hat{\Phi}(2\pi),\ e_j\right]=\mathrm{rank}\ (\hat{D}_0(2\pi),\ e_j)$

をみたすベクトルである。そうすれば，§2 で述べたように bifurcation point $(\hat{x}(0),\hat{B})$ を求めるには，(2.6) に相当する方程式，すなわち，

(3.8) $$W(z)=\begin{pmatrix} F(x(0),B)-\beta e_j \\ F_x(x(0),B)h_1(0) \\ F_x(x(0),B)h_2(0)+F_B(x(0),B) \\ h_1^1-1 \\ h_2^1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} \varphi(0,y)-\varphi(2\pi,y)-\beta e_j \\ \varphi_1(0,y)-\varphi_1(2\pi,y) \\ \varphi_2(0,y)-\varphi_2(2\pi,y) \\ h_1^1-1 \\ h_2^1 \end{pmatrix}=0$$

について考えればよい。ただし，$y=(x(0),h_1(0),h_2(0),B)^T$，$z=(y,\beta)^T$，$x(0)=(x_1,\cdots,x_n)^T$，$h_i(0)=(h_i^1,h_i^2,\cdots,h_i^n)^T$ $(i=1,2)$ であり，$(\varphi(t,y),\varphi_1(t,y),\varphi_2(t,y))^T$ は，

$$(3.9)\quad \begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = X(x, B, t), \\ \dfrac{dh_1}{dt} = X_x(x, B, t) h_1, \\ \dfrac{dh_2}{dt} = X_x(x, B, t) h_2 + X_B(x, B, t) \end{cases}$$

の初期条件 $(\varphi(0,y), \varphi_1(0,y), \varphi_2(0,y))^T = (x(0), h_1(0), h_2(0))^T$ をみたす解である。一方，我々は，[14]で，(3.1) の右辺 $X(x, B, t)$ が特別な条件を満たすとき，bifurcation point $(\hat{x}(0), \hat{B})$ を求めるのに，上に述べた方法とは違う方法を提案した。ここでは，この2つの方法が，本質的に同じであることを示す。まず，我々は，次の2つの場合に分けて考える。

<u>Case (I).</u> $x_0(t)$ を，$(x_0(t), B) \in \Delta$ for $\forall t$ をみたす任意の反周期 π（すなわち，$x_0(t+\pi) = -x_0(t)$ for $\forall t$）の関数とするとき，

$$(3.10)\quad \begin{cases} X(x_0(t), B, t),\ X_B(x_0(t), B, t),\ X_{xx}(x_0(t), B, t) \text{ は,} \\ t \text{ に関して反周期 } \pi,\ X_x(x_0(t), B, t),\ X_{xB}(x_0(t), B, t) \\ \text{は, } t \text{ に関して周期 } \pi \text{ である。} \end{cases}$$

さらに，$\hat{x}(t)$ を，$B = \hat{B}$ のときの (3.1) の反周期 π の周期解，$\hat{\Phi}(t)$ を，$x = \hat{x}(t)$, $B = \hat{B}$ のときの (3.2) の初期条件 $\hat{\Phi}(0) = E_n$ をみたす基本行列とするとき，

$$(3.11)\quad \begin{cases} n-1 = \operatorname{rank}[E_n - \hat{\Phi}(\pi)] = \operatorname{rank} \hat{D}_0(\pi), \\ n-1 = \operatorname{rank} F_x(\hat{x}(0), \hat{B}) = \operatorname{rank}[E_n - \hat{\Phi}(2\pi)] = \operatorname{rank} \hat{D}_0(2\pi) \end{cases}$$

$$\left.\begin{aligned}&= \mathrm{rank}\,[\hat{D}_0(2\pi), \hat{\Xi}_1(2\pi)] = \mathrm{rank}\,(F_x(\hat{x}(0),\hat{B}), F_B(\hat{x}(0),\hat{B})),\\ &n = \mathrm{rank}\,[E_n + \hat{\Phi}(\pi)].\end{aligned}\right.$$

<u>Case (II).</u>　$x_0(t)$ を，$(x_0(t), B)\in\Delta$ for $\forall t$ をみたす周期πの任意の関数とするとき，

$$(3.12)\quad \left\{\begin{array}{l} X(x_0(t),B,t),\ X_B(x_0(t),B,t),\ X_{xx}(x_0(t),B,t),\\ X_x(x_0(t),B,t) \text{ および } X_{xB}(x_0(t),B,t) \text{ は，すべ}\\ \text{て，} t \text{ に関して周期} \pi \text{である。}\end{array}\right.$$

さらに，$\hat{x}(t)$ を，$B=\hat{B}$ のときの (3.1) の周期πの周期解，$\hat{\Phi}(t)$ を，$x=\hat{x}(t)$, $B=\hat{B}$ のときの (3.2) の初期条件 $\hat{\Phi}(0)=E_n$ をみたす基本行列とするとき，

$$(3.13)\quad \left\{\begin{aligned}&n-1 = \mathrm{rank}\,[E_n + \hat{\Phi}(\pi)] = \mathrm{rank}\,\hat{\mathcal{D}}_0(\pi),\\ &n-1 = \mathrm{rank}\,F_x(\hat{x}(0),\hat{B}) = \mathrm{rank}\,[E_n - \hat{\Phi}(2\pi)] = \mathrm{rank}\,\hat{D}_0(2\pi)\\ &= \mathrm{rank}\,[\hat{D}_0(2\pi), \hat{\Xi}_1(2\pi)] = \mathrm{rank}\,(F_x(\hat{x}(0),\hat{B}), F_B(\hat{x}(0),\hat{B})),\\ &n = \mathrm{rank}\,[E_n - \hat{\Phi}(\pi)].\end{aligned}\right.$$

ただし，$\hat{\mathcal{D}}_0(t)$ は，$E_n+\hat{\Phi}(t)$ の第1列を取り除いた $n\times(n-1)$ 行列である。

Case (I), Case (II) は，ともに同じような議論をするので，Case (I) について考えていく。まず，仮定 (3.10) より，$X_x(\hat{x}(t),\hat{B},t)$ は周期πとなるから，基本行列 $\hat{\Phi}(t)$ は，

$$(3.14)\qquad \hat{\Phi}(t+\pi)=\hat{\Phi}(t)\hat{\Phi}(\pi)\qquad \text{for } \forall t$$

をみたしている。したがって，$\hat{\Phi}(2\pi)=\hat{\Phi}(\pi)^2$ であるから，方程式

$$(3.15)\qquad F_x(\hat{x}(0),\hat{B})k=[E_n-\hat{\Phi}(2\pi)]k=0$$

は，

$$(3.16)\qquad [E_n+\hat{\Phi}(\pi)][E_n-\hat{\Phi}(\pi)]k=0$$

とかける。仮定(3.11)より，方程式

$$(3.17)\qquad \begin{cases} [E_n-\hat{\Phi}(\pi)]k=0, \\ k_1-1=0 \end{cases} \qquad \left(ここで, k=(k_1,\cdots,k_n)^T\right)$$

は，ただ1つの解$\hat{k}$をもち，この$\hat{k}$は，(3.16)（または，(3.15)）の解でもある。したがって，$\hat{h}(t)\equiv\hat{\Phi}(t)\hat{k}$ とおけば，$\hat{h}(t)$ は，$x=\hat{x}(t)$，$B=\hat{B}$ のときの (3.2) の2π-周期解になっている。ところが，$\hat{k}$は，もともと (3.17) の解であり，かつ仮定(3.10)より，$X_x(\hat{x}(t),\hat{B},t)$は周期$\pi$であるから，実は，$\hat{h}(t)$ は，$x=\hat{x}(t)$, $B=\hat{B}$ のときの (3.2) の周期πの周期解になる。したがって，bifurcation point $(\hat{x}(0),\hat{B})$ を求めるには，我々は，次の方程式

$$(3.18)\qquad H(\mathfrak{x})=\begin{pmatrix} \varphi(0,\mathfrak{x})+\varphi(\pi,\mathfrak{x}) \\ \varphi_1(0,\mathfrak{x})-\varphi_1(\pi,\mathfrak{x}) \\ h_1-1 \end{pmatrix}=0$$

について考えればよい。ただし，$\mathfrak{x}=(x(0),h(0),B)^T$，$x(0)=$

$(x_1, \cdots, x_n)^T$, $h(0)=(h_1, \cdots, h_n)^T$ であり，$(\varphi(t,\mathfrak{x}), \varphi_1(t,\mathfrak{x}))^T$ は，

$$
(3.19) \qquad \begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = X(x, B, t), \\[2mm] \dfrac{dh}{dt} = X_x(x, B, t)h \end{cases}
$$

の初期条件 $(\varphi(0,\mathfrak{x}), \varphi_1(0,\mathfrak{x}))^T = (x(0), h(0))^T$ をみたす解である。そうすれば，上に述べたことより，方程式(3.18)は，解 $\hat{\mathfrak{x}} = (\hat{x}(0), \hat{h}(0), \hat{B})^T$（もちろん，$\hat{h}(0)=\hat{k}$）をもち，この解 $\hat{\mathfrak{x}}$ に対して，我々は，次の定理を得る。

<u>定理4.</u>

$$
(3.20) \qquad \det H'(\hat{\mathfrak{x}}) \neq 0 \rightleftarrows \operatorname{rank}(\hat{D}_0(\pi), \hat{\eta}) = n.
$$

ただし，$H'(\mathfrak{x})$ は，$H(\mathfrak{x})$ の $\mathfrak{x}$ に関する Jacobian 行列であり，$\hat{\eta} = -\hat{\Phi}_2(\pi)\hat{\xi} - \hat{\Psi}_2(\pi)$．ここで，$(\hat{\Phi}(t), \hat{\Phi}_2(t))^T$ は，

$$
(3.21) \qquad \begin{cases} \dfrac{dz_1}{dt} = X_x(\hat{x}(t), \hat{B}, t)z_1, \\[2mm] \dfrac{dz_2}{dt} = X_x(\hat{x}(t), \hat{B}, t)z_2 + \{X_{xx}(\hat{x}(t), \hat{B}, t)\hat{h}(t)\}z_1 \end{cases}
$$

の初期条件 $(\hat{\Phi}(0), \hat{\Phi}_2(0))^T = (E_n, O)^T$（$O$ は，$n \times n$ 零行列）をみたす解（$2n \times n$ 行列）であり，$\hat{\xi}$ は，

$$
(3.22) \qquad [E_n + \hat{\Phi}(\pi)]\xi = -\hat{\Psi}_1(\pi) \qquad (\xi = (\xi_1, \cdots, \xi_n)^T)
$$

の解であり，$\hat{\Psi}_2(t)$ は，

$$
(3.23) \qquad \frac{dp}{dt} = X_x(\hat{x}(t), \hat{B}, t)p + \{X_{xx}(\hat{x}(t), \hat{B}, t)\hat{\Psi}_1(t) + X_{xB}(\hat{x}(t), \hat{B}, t)\}\hat{h}(t)
$$

の初期条件 $\hat{\Psi}_2(0)=0$ をみたす解である。

証明. 解 $\hat{x}$ に対して

$$(3.24)\qquad \det H'(\hat{x})=\begin{vmatrix} E_n+\hat{\Phi}(\pi) & O & \hat{\Psi}_1(\pi) \\ -\hat{\Phi}_2(\pi) & E_n-\hat{\Phi}(\pi) & -\hat{\Psi}_2(\pi) \\ 0\,0\cdots 0 & 1\,0\cdots 0 & 0 \end{vmatrix}$$

$$=\begin{vmatrix} E_n+\hat{\Phi}(\pi) & 0 & O & 0 \\ -\hat{\Phi}_2(\pi) & 0 & \hat{D}_0(\pi) & \hat{\eta} \\ 0\,0\cdots 0 & 1 & 0\cdots 0 & 0 \end{vmatrix}.$$

これより，結論 (3.20) がいえる。　　　　証明終り.

Case (II) の場合には，方程式 (3.18) のかわりに，次の方程式

$$(3.25)\qquad K(x)=\begin{pmatrix} \varphi(0,x)-\varphi(\pi,x) \\ \varphi_1(0,x)+\varphi_1(\pi,x) \\ h_1-1 \end{pmatrix}=0$$

について考えればよい。仮定より，方程式 (3.25) は，解 $\hat{x}=(\hat{x}(0),\hat{h}(0),\hat{B})^T$ をもち，この解 $\hat{x}$ に対して，我々は，次の定理を得る。

定理 5.

$$(3.26)\qquad \det K'(\hat{x})\neq 0 \rightleftarrows \operatorname{rank}(\hat{\mathcal{D}}_0(\pi),\hat{\eta}')=n.$$

ただし，$K'(x)$ は，$K(x)$ の x に関する Jacobian 行列であり，
$\hat{\eta}' = \hat{\Phi}_2(\pi)\hat{\xi}' + \hat{\Psi}_2(\pi)$．ここで，$\hat{\xi}'$ は，

(3.27) $\quad [E_n - \hat{\Phi}(\pi)]\xi' = \hat{\Psi}_1(\pi) \qquad (\xi' = (\xi_1', \cdots, \xi_n')^T)$

の解である。

まず，Case (I) の場合に，方程式 (3.8) と (3.18) の間の関係を調べる。(3.18) の解 $\hat{\mathfrak{x}} = (\hat{x}(0), \hat{h}(0), \hat{B})^T$ に対して，$\hat{z} = (\hat{x}(0), \hat{h}(0), \hat{h}_2(0), \hat{B}, 0)^T$ は，(3.8) の解になっている。ただし，$\hat{h}_2(0)$ は，

(3.28) $\quad \begin{cases} F_x(\hat{x}(0), \hat{B})h_2(0) + F_B(\hat{x}(0), \hat{B}) = 0, \\ h_2^1 = 0 \end{cases} \qquad \left(h_2(0) = (h_2^1, h_2^2, \cdots, h_2^n)^T\right)$

の解である。この解 $\hat{z}$ に対して，仮定 (3.10) および基本行列に関する結果 (3.14) より，

(3.29) $\quad \begin{cases} \hat{\Psi}_1(2\pi) = -[E_n - \hat{\Phi}(\pi)]\hat{\Psi}_1(\pi), \\ \hat{\Psi}_2(2\pi) = [E_n + \hat{\Phi}(\pi)]\hat{\Psi}_2(\pi) - \hat{\Phi}_2(\pi)\hat{\Psi}_1(\pi), \\ \hat{\Phi}_2(2\pi) = \hat{\Phi}(\pi)\hat{\Phi}_2(\pi) - \hat{\Phi}_2(\pi)\hat{\Phi}(\pi), \\ \hat{\ell}(2\pi) = -\hat{\Phi}_2(2\pi)\hat{h}(0) = -[E_n - \hat{\Phi}(\pi)]\hat{\ell}(\pi) \end{cases}$

がいえる。ただし，$\hat{\ell}(t) = -\hat{\Phi}_2(t)\hat{h}(0)$． ところが，

(3.30) $\quad (\#) = \{F_{xx}(\hat{x}(0), \hat{B})\hat{h}(0)\}\hat{h}(0) = -\hat{\Phi}_2(2\pi)\hat{h}(0) = \hat{\ell}(2\pi)$

となるから，(3.29) より，

(3.31) $\quad n-1 = \mathrm{rank}[E_n - \hat{\Phi}(2\pi)] = \mathrm{rank}[E_n - \hat{\Phi}(2\pi), \hat{\ell}(2\pi)] = \mathrm{rank}(F_x(\hat{x}(0), \hat{B}), (\#))$.

したがって，この場合，§2の定理1の場合になるから，

(3.32) $\qquad \det W'(\hat{\mathfrak{z}}) \neq 0 \rightleftarrows \mathrm{rank}\,(\hat{D}_0(2\pi), (\hat{☆})) = n$.

ただし，

(3.33) $\qquad (\hat{☆}) = F_{xB}(\hat{x}(0),\hat{B})\hat{h}(0) + \{F_{xx}(\hat{x}(0),\hat{B})\hat{h}(0)\}\hat{h}_2(0)$.

今の場合，

(3.34) $\qquad F_{xB}(\hat{x}(0),\hat{B})\hat{h}(0) = -\hat{\Psi}_2(2\pi),\ F_{xx}(\hat{x}(0),\hat{B})\hat{h}(0) = -\hat{\Phi}_2(2\pi)$

となり，$\hat{h}_2(0)$ は，

(3.35) $\qquad \hat{h}_2(0) = \hat{\varsigma} + c\,\hat{h}(0) \qquad$ （c は定数）

と書けるから，

(3.36) $$\begin{cases} (\hat{☆}) = -[E_n + \hat{\Phi}(\pi)]\{\hat{\Phi}_2(\pi)\hat{\varsigma} + \hat{\Psi}_2(\pi)\} + c\,\hat{\ell}(2\pi) \\ \qquad = [E_n + \hat{\Phi}(\pi)]\hat{\eta} + c\,\hat{\ell}(2\pi) \end{cases}$$

となる。したがって，

(3.37) $$\begin{cases} \mathrm{rank}\,(\hat{D}_0(2\pi), (\hat{☆})) = \mathrm{rank}\,(E_n - \hat{\Phi}(2\pi), (\hat{☆})) \\ = \mathrm{rank}\,(E_n - \hat{\Phi}(2\pi),\ [E_n + \hat{\Phi}(\pi)]\hat{\eta}) \\ = \mathrm{rank}\,([E_n + \hat{\Phi}(\pi)][E_n - \hat{\Phi}(\pi)],\ [E_n + \hat{\Phi}(\pi)]\hat{\eta}) \\ = \mathrm{rank}\,(E_n - \hat{\Phi}(\pi), \hat{\eta}) = \mathrm{rank}\,(\hat{D}_0(\pi), \hat{\eta}) \end{cases}$$

がいえるから，(3.20) および (3.32) より，

(3.38) $\qquad \det H'(\hat{\mathfrak{x}}) \neq 0 \rightleftarrows \det W'(\hat{\mathfrak{z}}) \neq 0$.

故に，Case (I) の条件を満たすときには，方程式 (3.8) のかわりに，方程式 (3.18) について考えれば十分であることがわかる。

次に，Case(II)の場合に，方程式(3.8)と(3.25)の間の関係について調べる。方程式(3.25)の解 $\hat{\mathfrak{x}}=(\hat{x}(0),\hat{h}(0),\hat{B})^T$ に対して，Case(I)と同様に，$\hat{\mathfrak{z}}=(\hat{x}(0),\hat{h}(0),\hat{h}_2(0),\hat{B},0)^T$ は，(3.8)の解になっている。ただし，$\hat{h}_2(0)$ は，(3.28)の解である。この解 $\hat{\mathfrak{z}}$ に対して，この場合は，

$$
(3.39)\qquad \begin{cases}
\hat{\mathfrak{f}}_1(2\pi)=[E_n+\hat{\mathfrak{X}}(\pi)]\hat{\mathfrak{f}}_1(\pi),\\
\hat{\mathfrak{f}}_2(2\pi)=-[E_n-\hat{\mathfrak{X}}(\pi)]\hat{\mathfrak{f}}_2(\pi)-\hat{\mathfrak{X}}_2(\pi)\hat{\mathfrak{f}}_1(\pi),\\
\hat{\mathfrak{X}}_2(2\pi)=\hat{\mathfrak{X}}(\pi)\hat{\mathfrak{X}}_2(\pi)-\hat{\mathfrak{X}}_2(\pi)\hat{\mathfrak{X}}(\pi),\\
\hat{\ell}(2\pi)=[E_n+\hat{\mathfrak{X}}(\pi)]\hat{\ell}(\pi)
\end{cases}
$$

がいえる。したがって，

$$
(3.40)\qquad n-1=\operatorname{rank}[E_n-\hat{\mathfrak{X}}(2\pi)]=\operatorname{rank}[E_n-\hat{\mathfrak{X}}(2\pi),\hat{\ell}(2\pi)]
$$

がいえるから，この場合も，§2の定理1より，

$$
(3.41)\qquad \det W'(\hat{\mathfrak{z}})\neq 0 \rightleftharpoons \operatorname{rank}(\hat{D}_0(2\pi),(\hat{\star}))=n.
$$

今の場合，

$$
(3.42)\qquad \begin{cases}
(\hat{\star})=[E_n-\hat{\mathfrak{X}}(\pi)]\{\hat{\mathfrak{X}}_2(\pi)\hat{\xi}'+\hat{\mathfrak{f}}_2(\pi)\}+c'\hat{\ell}(2\pi)\\
\qquad=[E_n-\hat{\mathfrak{X}}(\pi)]\hat{\eta}'+c'\hat{\ell}(2\pi) \qquad (c'\text{は定数})
\end{cases}
$$

と書けるから，

$$
(3.43)\qquad \begin{cases}
\operatorname{rank}(\hat{D}_0(2\pi),(\hat{\star}))=\operatorname{rank}(E_n-\hat{\mathfrak{X}}(2\pi),(\hat{\star}))\\
=\operatorname{rank}(E_n-\hat{\mathfrak{X}}(2\pi),\ [E_n-\hat{\mathfrak{X}}(\pi)]\hat{\eta}')\\
=\operatorname{rank}([E_n-\hat{\mathfrak{X}}(\pi)][E_n+\hat{\mathfrak{X}}(\pi)],\ [E_n-\hat{\mathfrak{X}}(\pi)]\hat{\eta}')\\
=\operatorname{rank}(E_n+\hat{\mathfrak{X}}(\pi),\hat{\eta}')=\operatorname{rank}(\hat{\mathfrak{D}}_0(\pi),\hat{\eta}')
\end{cases}
$$

がいえる。したがって，(3.26) および (3.41) より，

(3.44) $\quad \det K'(\hat{x}) \neq 0 \rightleftarrows \det W'(\hat{z}) \neq 0$.

故に，Case (II) の場合も，方程式 (3.8) のかわりに，方程式 (3.25) について考えれば十分である。

§4. 周期解の Hopf 分岐の計算方法

この節では，周期系 (3.1) の周期解の Hopf 分岐について考える。すなわち，(3.2) の $\Phi(0)=E_n$ をみたす基本行列を $\Phi(t)$ とするとき，$\Phi(2\pi)$ が固有値 $e^{i\theta}$ をもつ場合について考える。いま，$B=\hat{B}$ のときの (3.1) の 2π-周期解を $\hat{x}(t)$ とし，$x=\hat{x}(t)$, $B=\hat{B}$ のときの (3.2) の $\hat{\Phi}(0)=E_n$ をみたす基本行列を $\hat{\Phi}(t)$ とするとき，$\hat{\Phi}(2\pi)$ が固有値 $e^{i\hat{\theta}}$ をもつと仮定する。そうすれば，ある複素ベクトル $\hat{H}(0)$ が存在して

(4.1) $\quad \hat{\Phi}(2\pi)\hat{H}(0)=e^{i\hat{\theta}}\hat{H}(0) \qquad$ (または，$[e^{i\hat{\theta}}E_n-\hat{\Phi}(2\pi)]\hat{H}(0)=0$).

この $\hat{H}(0)$ に対して，$\hat{H}(t)\equiv\hat{\Phi}(t)\hat{H}(0)$ とおけば，$\hat{H}(t)$ は，$x=\hat{x}(t)$, $B=\hat{B}$ のときの (3.2) の解で

(4.2) $\quad e^{i\hat{\theta}}\hat{H}(0)-\hat{H}(2\pi)=0$

をみたしている。ところが，このままでは，(4.2) をみたす (3.2) の解がただ1つに決まらないので，適当な付加条件を与える必要がある。話を簡単にするために，我々は，

(4.3) $\quad n-1=\operatorname{rank}[e^{i\hat{\theta}}E_n-\hat{\Phi}(2\pi)]=\operatorname{rank}\hat{H}$。 (複素行列として)

を仮定する。ただし，$\hat{H}_0$ は，$e^{i\theta}E_n-\hat{\Phi}(2\pi)$ の第1列を取り除いた $n\times(n-1)$ 複素行列である。そうすれば，次の条件

(4.4) $$H_1(0)-1=0$$

を与えれば，$\hat{H}(t)$ は，ただ1つに決まる。ただし，$H(0)=(H_1(0), H_2(0), \cdots, H_n(0))^T$. さて，$\hat{H}(0)=\hat{h}(0)+i\hat{k}(0)$ とおいて，$\hat{h}(t)\equiv\hat{\Phi}(t)\hat{h}(0)$, $\hat{k}(t)\equiv\hat{\Phi}(t)\hat{k}(0)$ とおけば，$\hat{h}(t), \hat{k}(t)$ は，もちろん，$x=\hat{x}(t)$, $B=\hat{B}$ のときの (3.2) の解になっており，かつ

(4.5) $$\begin{cases} \hat{h}(0)\cos\hat{\theta}-\hat{k}(0)\sin\hat{\theta}-\hat{h}(2\pi)=0, \\ \hat{h}(0)\sin\hat{\theta}+\hat{k}(0)\cos\hat{\theta}-\hat{k}(2\pi)=0 \end{cases}$$

(4.6) $$\begin{cases} \hat{h}_1(0)-1=0, \\ \hat{k}_1(0)=0 \end{cases}$$

を満たしている。ただし，$\hat{h}(0)=(\hat{h}_1(0), \cdots, \hat{h}_n(0))^T$, $\hat{k}(0)=(\hat{k}_1(0), \cdots, \hat{k}_n(0))^T$. したがって，Hopf 分岐をおこすパラメータの値 $\hat{B}$ およびそのときの 2π-周期解 $\hat{x}(t)$ を求めるには，次の方程式

(4.7) $$G(x)=\begin{pmatrix} \varphi(0,x)-\varphi(2\pi,x) \\ \psi_1(0,x)\cos\theta-\psi_2(0,x)\sin\theta-\psi_1(2\pi,x) \\ \psi_1(0,x)\sin\theta+\psi_2(0,x)\cos\theta-\psi_2(2\pi,x) \\ h_1-1 \\ k_1 \end{pmatrix}$$

$$
=\begin{pmatrix} x(0)-\varphi(2\pi,\mathfrak{x}) \\ h(0)\cos\theta-k(0)\sin\theta-\psi_1(2\pi,\mathfrak{x}) \\ h(0)\sin\theta+k(0)\cos\theta-\psi_2(2\pi,\mathfrak{x}) \\ h_1-1 \\ k_1 \end{pmatrix}=0
$$

について考えればよい。ただし，$\mathfrak{x}=(x(0),h(0),k(0),B,\theta)^T$，$x(0)=(x_1,\cdots,x_n)^T$，$h(0)=(h_1,\cdots,h_n)^T$，$k(0)=(k_1,\cdots,k_n)^T$ であり，$(\varphi(t,\mathfrak{x}),\psi_1(t,\mathfrak{x}),\psi_2(t,\mathfrak{x}))^T$ は，

$$
(4.8)\qquad \begin{cases} \dfrac{dx}{dt}=X(x,B,t), \\ \dfrac{dh}{dt}=X_x(x,B,t)h, \\ \dfrac{dk}{dt}=X_x(x,B,t)k \end{cases}
$$

の初期条件 $(\varphi(0,\mathfrak{x}),\psi_1(0,\mathfrak{x}),\psi_2(0,\mathfrak{x}))^T=(x(0),h(0),k(0))^T$ をみたす解である。前述の議論より，方程式 (4.7) は，解 $\hat{\mathfrak{x}}=(\hat{x}(0),\hat{h}(0),\hat{k}(0),\hat{B},\hat{\theta})^T$ をもつ。$G'(\mathfrak{x})$ を，$G(\mathfrak{x})$ の $\mathfrak{x}$ に関するJacobian行列とすれば，

$$
(4.9)\qquad \det G'(\hat{\mathfrak{x}})
$$

$$
=\begin{vmatrix} E_n-\hat{\Phi}(2\pi) & O & O & -\hat{\Psi}_1(2\pi) & 0 \\ -\hat{\Phi}_2(2\pi) & \cos\hat{\theta}E_n-\hat{\Phi}(2\pi) & -\sin\hat{\theta}E_n & -\hat{\Psi}_2(2\pi) & \hat{\eta}_2 \\ -\hat{\Phi}_3(2\pi) & \sin\hat{\theta}E_n & \cos\hat{\theta}E_n-\hat{\Phi}(2\pi) & -\hat{\Psi}_3(2\pi) & \hat{\eta}_3 \\ 0\,0\cdots0 & 1\,0\cdots0 & 0\,0\cdots0 & 0 & 0 \\ 0\,0\cdots0 & 0\,0\cdots0 & 1\,0\cdots0 & 0 & 0 \end{vmatrix}
$$

$$
= \begin{vmatrix}
E_n - \hat{\Phi}(2\pi) & 0 & O & 0 & O & 0 & 0 \\
-\hat{\Phi}_2(2\pi) & 0 & \hat{A}_0 & 0 & -\hat{C}_0 & (\hat{*}) & \hat{\eta}_2 \\
-\hat{\Phi}_3(2\pi) & 0 & \hat{C}_0 & 0 & \hat{A}_0 & (\hat{**}) & \hat{\eta}_3 \\
0\,0\cdots 0 & 1 & 0\cdots 0 & 0 & 0\cdots 0 & 0 & 0 \\
0\,0\cdots 0 & 0 & 0\cdots 0 & 1 & 0\cdots 0 & 0 & 0
\end{vmatrix}.
$$

ただし，$\hat{\Phi}_2(t)$ は，

$$
(4.10) \qquad \frac{dz}{dt} = X_x(\hat{x}(t), \hat{B}, t)z + \{X_{xx}(\hat{x}(t), \hat{B}, t)\hat{h}(t)\}\hat{\Phi}(t)
$$

の $\hat{\Phi}_2(0) = O$ （$n \times n$ 零行列）をみたす解である；

$\hat{\Phi}_3(t)$ は，

$$
(4.11) \qquad \frac{dw}{dt} = X_x(\hat{x}(t), \hat{B}, t)w + \{X_{xx}(\hat{x}(t), \hat{B}, t)\hat{k}(t)\}\hat{\Phi}(t)
$$

の $\hat{\Phi}_3(0) = O$ （$n \times n$ 零行列）をみたす解である；

$(\hat{p}_1(t), \hat{p}_2(t), \hat{p}_3(t))^T$ （$3n$ 次元ベクトル）は，

$$
(4.12) \qquad \left\{
\begin{aligned}
\frac{dp_1}{dt} &= X_x(\hat{x}(t), \hat{B}, t)p_1 + X_B(\hat{x}(t), \hat{B}, t), \\
\frac{dp_2}{dt} &= X_x(\hat{x}(t), \hat{B}, t)p_2 + \{X_{xx}(\hat{x}(t), \hat{B}, t)p_1 + X_{xB}(\hat{x}(t), \hat{B}, t)\}\hat{h}(t), \\
\frac{dp_3}{dt} &= X_x(\hat{x}(t), \hat{B}, t)p_3 + \{X_{xx}(\hat{x}(t), \hat{B}, t)p_1 + X_{xB}(\hat{x}(t), \hat{B}, t)\}\hat{k}(t)
\end{aligned}
\right.
$$

の $(\hat{p}_1(0), \hat{p}_2(0), \hat{p}_3(0))^T = (0, 0, 0)^T$ をみたす解である；

$$
(4.13) \qquad \left\{
\begin{aligned}
\hat{\eta}_2 &= -\hat{h}(0)\sin\hat{\theta} - \hat{k}(0)\cos\hat{\theta}, \\
\hat{\eta}_3 &= \hat{h}(0)\cos\hat{\theta} - \hat{k}(0)\sin\hat{\theta} \quad ;
\end{aligned}
\right.
$$

$\hat{A}_0$ および $\hat{C}_0$ は，それぞれ，$\cos\hat{\theta}E_n - \hat{\Phi}(2\pi)$ および $\sin\hat{\theta}E_n$ の第1列を取り除いた $n \times (n-1)$ 行列である；

$$
\left\{ (\hat{*}) = -\hat{p}_2(2\pi) - \hat{\Phi}_2(2\pi)\hat{\mu}, \right.
$$

(4.14) $\quad \Big\{ \; (\hat{**}) = -\hat{\Psi}_3(2\pi) - \hat{\Phi}_3(2\pi)\hat{\mu}$.

ここで, $\hat{\mu}$ は, 方程式

(4.15) $\quad [E_n - \hat{\Phi}(2\pi)]\mu = \hat{\Psi}_1(2\pi) \qquad (\mu = (\mu_1, \cdots, \mu_n)^T)$

の解である。

そうすれば, (4.9) より, 我々は, 次の定理を得る。

<u>定理 6.</u>

(4.16) $$\det G'(\hat{x}) \neq 0 \rightleftharpoons \operatorname{rank}\begin{pmatrix} \hat{A}_0 & -\hat{C}_0 & (\hat{*}) & \hat{\eta}_2 \\ \hat{C}_0 & \hat{A}_0 & (\hat{**}) & \hat{\eta}_3 \end{pmatrix} = 2n.$$

次に, Hopf 分岐の特別な場合, すなわち, $\Phi(2\pi)$ が固有値 1 を 2 重根にもち, かつ $\operatorname{rank}[E_n - \Phi(2\pi)] = n-1$ となる場合について考える。この場合, パラメータ B の次元を 2 とする。つまり, $B = (B_1, B_2)^T$. いま, $B = \hat{B} = (\hat{B}_1, \hat{B}_2)^T$ のときの (3.1) の 2π-周期解を $\hat{x}(t)$, そして, $x = \hat{x}(t)$, $B = \hat{B}$ のときの (3.2) の $\hat{\Phi}(0) = E_n$ をみたす基本行列を $\hat{\Phi}(t)$ とするとき, $\hat{\Phi}(2\pi)$ が固有値 1 を 2 重根にもち, かつ固有値 1 に対する Jordan ブロック $J(1)$ が, $J(1) = \begin{pmatrix} 1 & a \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ $(a \neq 0)$ なる形をしていると仮定する。そうすれば, あるベクトル $\hat{h} = (\hat{h}_1, \cdots, \hat{h}_n)^T$, $\hat{k} = (\hat{k}_1, \cdots, \hat{k}_n)^T$ が存在して

(4.17) $$\begin{cases} \hat{\Phi}(2\pi)\hat{h} = \hat{h}, \\ \hat{\Phi}(2\pi)\hat{k} = \hat{k} + a\hat{h}. \end{cases}$$

いま，$\hat{h}(t)\equiv\hat{\Phi}(t)\hat{h}$，$\hat{k}(t)\equiv\hat{\Phi}(t)\hat{k}-\frac{a}{2\pi}t\,\hat{\Phi}(t)\hat{h}$ とおけば，
$(\hat{h}(t),\hat{k}(t))^T$ は，

$$(4.18)\qquad \begin{cases} \dfrac{dh}{dt}=X_x(\hat{x}(t),\hat{B},t)h\,, \\ \dfrac{dk}{dt}=X_x(\hat{x}(t),\hat{B},t)k-\dfrac{a}{2\pi}h \end{cases}$$

の2π-周期解になっている。$\hat{h}(t),\hat{k}(t)$ は，このままでは，定数倍だけの自由度があり，ただ1組に決まらないので，適当な条件を与える必要がある。話を簡単にするために，

$$(4.19)\qquad n-1=\mathrm{rank}\,[E_n-\hat{\Phi}(2\pi)]=\mathrm{rank}\,\hat{D}_0(2\pi)$$

と仮定する。ただし，$\hat{D}_0(t)$ は，$E_n-\hat{\Phi}(t)$ の第1列を取り除いた $n\times(n-1)$ 行列である。そうすれば，

$$(4.20)\qquad \begin{cases} h_1(0)-1=0, \\ k_1(0)=0 \end{cases}$$

なる条件を与えてやれば，$\hat{h}(t),\hat{k}(t)$ は，ただ1組決まる。
したがって，この場合，我々は，次の方程式

$$(4.21)\qquad M(\mathfrak{x})=\begin{pmatrix} \varphi(0,\mathfrak{x})-\varphi(2\pi,\mathfrak{x}) \\ \varphi_1(0,\mathfrak{x})-\varphi_1(2\pi,\mathfrak{x}) \\ \varphi_2(0,\mathfrak{x})-\varphi_2(2\pi,\mathfrak{x}) \\ h_1-1 \\ k_1 \end{pmatrix}=0$$

について考えればよい。ただし，$\mathfrak{x}=(x(0),h(0),k(0),B)^T$，

$x(0)=(x_1,\cdots,x_n)^T$, $h(0)=(h_1,\cdots,h_n)^T$, $k(0)=(k_1,\cdots,k_n)^T$, $B=(B_1,B_2)^T$ であり, $(\varphi(t,x), \varphi_1(t,x), \varphi_2(t,x))^T$ は,

$$(4.22)\quad \begin{cases} \dfrac{dx}{dt}=X(x,B,t)\,, \\ \dfrac{dh}{dt}=X_x(x,B,t)h\,, \\ \dfrac{dk}{dt}=X_x(x,B,t)k-\dfrac{a}{2\pi}h \end{cases}$$

の初期条件 $(\varphi(0,x), \varphi_1(0,x), \varphi_2(0,x))^T=(x(0),h(0),k(0))^T$ をみたす解である。上述の議論より, 方程式 (4.21) は, 解 $\hat{\mathfrak{x}}=(\hat{x}(0),\hat{h}(0),\hat{k}(0),\hat{B})^T$ をもつ。$M'(\mathfrak{x})$ を, $M(\mathfrak{x})$ の $\mathfrak{x}$ に関する Jacobian 行列とすれば, 解 $\hat{\mathfrak{x}}$ に対して

$$(4.23)\qquad \det M'(\hat{\mathfrak{x}})$$

$$=\begin{vmatrix} E_n-\hat{\Phi}(2\pi) & O & O & -\hat{\Psi}_{11}(2\pi) & -\hat{\Psi}_{12}(2\pi) \\ -\hat{\Phi}_2(2\pi) & E_n-\hat{\Phi}(2\pi) & O & -\hat{\Psi}_{21}(2\pi) & -\hat{\Psi}_{22}(2\pi) \\ -\hat{\Phi}_3(2\pi) & aE_n & E_n-\hat{\Phi}(2\pi) & -\hat{\Psi}_{31}(2\pi) & -\hat{\Psi}_{32}(2\pi) \\ 00\cdots0 & 10\cdots0 & 00\cdots0 & 0 & 0 \\ 00\cdots0 & 00\cdots0 & 10\cdots0 & 0 & 0 \end{vmatrix}.$$

ただし, $(\hat{\Phi}_2(t), \hat{\Phi}_3(t))^T$ は,

$$(4.24)\quad \begin{cases} \dfrac{dz_1}{dt}=X_x(\hat{x}(t),\hat{B},t)z_1+\{X_{xx}(\hat{x}(t),\hat{B},t)\hat{h}(t)\}\hat{\Phi}(t), \\ \dfrac{dz_2}{dt}=X_x(\hat{x}(t),\hat{B},t)z_2+\{X_{xx}(\hat{x}(t),\hat{B},t)\hat{k}(t)\}\hat{\Phi}(t)-\dfrac{a}{2\pi}z_1 \end{cases}$$

の $(\hat{\Phi}_2(0), \hat{\Phi}_3(0))^T=(O,O)^T$ (O は, $n\times n$ 零行列) をみたす

解であり，$(\hat{\xi}_{1i}(t), \hat{\xi}_{2i}(t), \hat{\xi}_{3i}(t))^T$ $(i=1,2)$ は，

$$(4.25)\quad \begin{cases} \dfrac{dw_1}{dt} = X_x(\hat{x}(t),\hat{B},t)w_1 + X_{B_i}(\hat{x}(t),\hat{B},t), \\ \dfrac{dw_2}{dt} = X_x(\hat{x}(t),\hat{B},t)w_2 + \{X_{xx}(\hat{x}(t),\hat{B},t)w_1 + X_{xB_i}(\hat{x}(t),\hat{B},t)\}\hat{h}(t), \\ \dfrac{dw_3}{dt} = X_x(\hat{x}(t),\hat{B},t)w_3 + \{X_{xx}(\hat{x}(t),\hat{B},t)w_1 + X_{xB_i}(\hat{x}(t),\hat{B},t)\}\hat{k}(t) - \dfrac{a}{2\pi}w_2 \end{cases}$$

の $(\hat{\xi}_{1i}(0), \hat{\xi}_{2i}(0), \hat{\xi}_{3i}(0))^T = (0,0,0)^T$ をみたす解である。

(4.23)より，我々は，次の定理を得る。

<u>定理7.</u>　rank $(\hat{D}_0(2\pi), \hat{\xi}_{11}(2\pi)) = n$ が成り立つならば，

$$(4.26)\quad \det M'(\hat{x}) \neq 0 \rightleftarrows \operatorname{rank}\begin{pmatrix} \hat{D}_0(2\pi) & O & (\hat{\dagger}) & (\hat{*}) \\ aE_{n,n-1} & \hat{D}_0(2\pi) & (\hat{\dagger\dagger}) & (\hat{**}) \end{pmatrix} = 2n.$$

ただし，$E_{n,n-1}$ は，単位行列 E_n の第1列を取り除いた $n\times(n-1)$ 行列であり，

$$(4.27)\quad (\hat{\dagger}) = \hat{\Phi}_2(2\pi)\hat{h}(0), \quad (\hat{\dagger\dagger}) = \hat{\Phi}_3(2\pi)\hat{h}(0),$$

$$(4.28)\quad \begin{cases} (\hat{*}) = -\hat{\xi}_{22}(2\pi) + [\hat{D}_2(2\pi), \hat{\xi}_{21}(2\pi)]\hat{\eta}, \\ (\hat{**}) = -\hat{\xi}_{32}(2\pi) + [\hat{D}_3(2\pi), \hat{\xi}_{31}(2\pi)]\hat{\eta}. \end{cases}$$

ここで，$\hat{D}_2(2\pi)$ および $\hat{D}_3(2\pi)$ は，それぞれ，$-\hat{\Phi}_2(2\pi)$ および $-\hat{\Phi}_3(2\pi)$ の第1列を取り除いた $n\times(n-1)$ 行列であり，$\hat{\eta}$ は，方程式

$$(4.29)\quad [\hat{D}_0(2\pi), \hat{\xi}_{11}(2\pi)]\eta = \hat{\xi}_{12}(2\pi) \qquad (\eta = (\eta_1, \cdots, \eta_n)^T)$$

の解である。

注意.

H. Kawakami [11] は, Hopf 分岐を計算するため, 方程式 (4.7) のかわりに, 次の方程式

$$(4.30) \qquad R(y) = \begin{pmatrix} \varphi(0, y) - \varphi(2\pi, y) \\ g(y) \end{pmatrix} = 0$$

について考えた。ただし, $y = (x(0), B)^T$, $x(0) = (x_1, \cdots, x_n)^T$ であり, $\varphi(t, y)$ は, (3.1) の初期条件 $\varphi(0, y) = x(0)$ をみたす解である。そして, $g(y) = 0$ は,

$$(4.31) \qquad g_1(y, \theta) = \mathrm{Re}\{\det(e^{i\theta}E_n - \Phi(2\pi))\} = 0$$

$$(4.32) \qquad g_2(y, \theta) = \mathrm{Im}\{\det(e^{i\theta}E_n - \Phi(2\pi))\} = 0$$

の2つの方程式から θ を消去した方程式である。ここで, $\mathrm{Re}\{\cdot\}$ および $\mathrm{Im}\{\cdot\}$ は, それぞれ, 複素数 $\{\cdot\}$ の実部および虚部をあらわす。

§5. 数値例

例1 (Hopf 分岐).

$$(5.1) \qquad \frac{d^2x}{dt^2} - \mu(1 - x^2)\frac{dx}{dt} + x = B\cos\nu t \quad (\mu = 0.2).$$

$\nu = 0.9$ とおき, B をパラメータとして, Hopf 分岐を計算した。計算結果は,

$$(5.2) \qquad \{ x(0) = 1.25704, \ \dot{x}(0) = -0.55890, \ \hat{B} = 0.29563,$$

$$\hat{\theta} = 0.59920 \quad (\cos\hat{\theta} = 0.82579,\ \sin\hat{\theta} = 0.56398).$$

例2.

次に，(5.1)において，νとBをパラメータにとり，Hopf分岐の特別な場合，すなわち，$\hat{\Phi}(2\pi)$が固有値1を2重根にもち，かつ $\mathrm{rank}\,[E_n - \hat{\Phi}(2\pi)] = n-1$ となる場合について考える。計算結果は，

$$(5.3)\quad \begin{cases} x(0) = -0.99968, & \dot{x}(0) = -1.10124, \\ \hat{\nu} = 1.04940, & \hat{B} = 0.20741, \end{cases}$$

$$(5.4)\quad \begin{cases} x(0) = 0.99960, & \dot{x}(0) = -0.90135, \\ \hat{\nu} = 0.94934, & \hat{B} = 0.19239. \end{cases}$$

ただし，$\dot{x}(t) = \frac{dx}{dt}(t)$.

References

[1] Abbott, J. P., An efficient algorithm for the determination of certain bifurcation points, J. Comp. and Appl. Math., 4 (1978), 19-27.

[2] Seydel, R., Numerical computation of branch points in ordinary differential equations, Numer. Math., 32 (1979), 51-68.

[3] Seydel, R., Numerical computation of branch points in nonlinear equations, Numer. Math., 33 (1979), 339-352.

[4] Moore, G. and Spence, A., The calculation of turning points of nonlinear equations, SIAM J. Numer. Anal., 17 (1980), 567-576.

[5] Pönisch, G. and Schwetlick, H., Computing turning points of curves implicitly defined by nonlinear equations depending on a parameter, Computing, 26 (1981), 107-121.

[6] Weber, H. and Werner, W., On the accurate determination of nonisolated solutions of nonlinear equations, Computing, 26 (1981), 315-326.

[7] Weber, H., On the numerical approximation of secondary bifurcation problems, Lecture Notes in Mathematics, 878 (1981), 407-425.

[8] Seydel, R., Numerical computation of periodic orbits that bifurcate from stationary solutions of ordinary differential equations, Appl. Math. Comp., 9 (1981), 257-271.

[9] Melhem, R. G. and Rheinboldt, W. C., A comparison of methods for determining turning points of nonlinear equations, Computing, 29 (1982), 201-226.

[10] Spence, A. and Werner, B., Non-simple turning points and cusps, IMA J. Numer. Anal., 2 (1982), 413-427.

[11] Kawakami, H., Bifurcations of periodic responces in forced dynamic nonlinear circuits: Computation of bifurcation values of the system parameters, to appear in IEEE Trans. Circuits and Systems, Vol. 31 (March, 1984).

[12] Yamamoto, N., Galerkin method for autonomous differential equations with unknown parameters, J. Math. Tokushima

Univ., 16 (1982), 55-93.

[13] Yamamoto, N., A remark to Galerkin method for nonlinear periodic systems with unknown parameters, J. Math. Tokushima Univ., 16 (1982), 95-126.

[14] Yamamoto, N., Newton's method for singular problems and its application to boundary value problems, J. Math. Tokushima Univ., 17 (1983), 27-88.