数理解析研究所講究録
第528巻 1984年 127-141

ベルマン方程式に対する確率制御について

神大理 西尾真喜子 (Makiko Nisio)

§1. 序. 系の運動が確率微分方程式で表される場合の制御(確率制御)において、値関数とベルマン方程式の間の次の関係はよく知られている。制御域 Γ をた次元コンパクト集合とする。d 次元ブラウン運動 $B = (B(t),\ t \geq 0)$ に対し、B 適合 Γ 値確率過程を admissible control と呼び、その全体を $\mathcal{U}$ とおく。$U \in \mathcal{U}$ により系を制御したとき、系の運動は次の d 次元確率微分方程式により記述されるものとする。

$$(1.1) \quad dX(t) = \alpha(X(t), U(t))\, dB(t) + \gamma(X(t), U(t))\, dt$$
$$X(0) = x.$$

ここで α は $d \times d$ 対称行列値関数, γ は d 次元関数. α, γ が有界でなめらかなとき、(1.1)の一意解 $(X(t; x, U),\ t \geq 0)$ は存在し、B 適合である。運動を時

刻Tまで続けたときの評価関数Jを，次のように定義しよう。

(1.2) $$J(T,x,U)=E\int_0^T e^{-\int_0^s c(X(\theta;x,U),U(\theta))d\theta} f(X(s;x,U),U(s))\,ds + e^{-\int_0^T c(X(\theta;x,U),U(\theta))d\theta}\varphi(X(T;x,U)).$$

この場合の値関数V,

(1.3) $$V(T,x)=\sup_{U\in\Omega} J(T,x,U)$$

は適当な条件の下で，なめらかさをもち，次のベルマン方程式を満たす。

(1.4) $$\begin{cases} \dfrac{\partial V}{\partial t}=\sup_{u\in\Gamma}\Big[\sum_{i,j=1}^{d} a_{ij}(x,u)\dfrac{\partial^2 V}{\partial x_i\partial x_j}+\sum_{i=1}^{d}\gamma_i(x,u)\dfrac{\partial V}{\partial x_i}-c(x,u)V + f(x,u)\Big], & t>0 \\ V(0,x)=\varphi(x). \end{cases}$$

ここで，$a(x,u)=\frac{1}{2}\alpha^2(x,u)$.

最近 N.V. Krylov [2] と N.S. Trudinger [7] は，(1.4)右辺の[‥]内を非線型楕円型作用素に拡張したベルマン方程式を取扱い，適当な条件の下で，古典解の一意的存在を示した。このような非線型作用素の族に対するベルマン方程式が，確率制御とどの様に関連するかを調べることは，問題

が多いように思われるが，本稿では，$f(x, u)$ を $f(x, v, u)$ に拡張しただけの最も簡単な場合について考察しよう[6].

この場合の値関数を，(1.3) と (1.4) の関係を真似て，§2 で与える．特に

(1.5) $$f(x, v, u) = \lambda \sum_{k=0}^{\infty} p_k v^k$$

ただし，$p_1 = 0$，$p_k \geq 0$，$k = 0, 2, 3, \cdots$，$\sum_{k=0}^{\infty} p_k = 1$，$\lambda > 0$，の場合，controlled branching diffusion を用いて，§3 で，値関数の regularity を論じる．

§2. 値関数．この章では，(2.1) に対応する値関数を定義し，性質をしらべる．

(2.1) $$\begin{cases} \dfrac{\partial V}{\partial t} = \sup\limits_{u \in \Gamma} \Big(A(u) V - c(x, u) V + f(x, V(t, x), u) \Big), & \text{in } (0, \infty) \times R^d. \\ V(0, x) = \varphi(x) \end{cases}$$

ただし $$A(u) = \sum_{i,j=1}^{d} a_{ij}(x, u) \frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_j} + \sum_{i=1}^{d} \gamma_i(x, u) \frac{\partial}{\partial x_i}.$$

係数に対し，次の仮定をおく．(X 上の一様連続な有界関数の全体を $BUC(X)$ とかき，sup norm を与える)

(A.1) α_{ij}, γ_i, c $\in BUC(R^d \times \Gamma)$.

(A.2) $$\sup_{u\in\Gamma} |g(x,u) - g(y,u)| \le K|x-y|, \qquad g = \alpha,\ \gamma,\ c.$$

(A.3) $$f \in BUC(R^d \times R^1 \times \Gamma)$$

$$\sup_{u\in\Gamma} |f(x,v,u) - f(y,w,u)| \le K|x-y| + h|v-w|.$$

条件(A1)(A2)より，(1.1)は $\mathcal{B}$ 適合な一意解をもつ.

(1.3)を形式的に真似て，(2.1)に対応する値関数を(2.2)により定義します

(2.2) $$V(t,x) = \sup_{U\in\mathcal{A}} F(t,x,\varphi,V,U).$$

ただし，

(2.3) $$F(t,x,\varphi,g,U) = E\int_0^t e^{-\int_0^s c(X(\theta;x,U),U(\theta))\,d\theta} f(X(s;x,U),\ g(t-s,\ X(s;x,U)),\ U(s))\,ds + e^{-\int_0^t c(X(\theta;x,U),U(\theta))\,d\theta} \varphi(X(t;x,U)).$$

<u>Proposition 1.</u> $\varphi \in BUC(R^d)$ に対し，(2.2)の一意解 $V \in BUC([0\ T]\times R^d)$, $\forall T>0$, が存在する.

証明　逐次近似法を用いるとよい。i.e. 近似解 V_k を次のように定義する

$$V_0 = \varphi, \qquad V_k(t, x) = \sup_{U \in \Omega} F(t, x, \varphi, V_{k-1}, U).$$

このとき、$V_k \in BUC([0\ T] \times R^d)$ となり、条件 (A 2) (A.3) より、V_k は $[0\ T] \times R^d$ 上で一様収束し、その極限　$V = \lim V_k$ が (2.2) の一意解になる。

以後の議論の為には、(2.2) の解が、初期値 φ に依存することを示しておく方が便利な為、$V(t, x, \varphi)$ とかくことにする。

値関数 V に対して Bellman Principle が成立つ。i.e.

$$(2.4) \qquad V(t+s, x, \varphi) = V(t, x, V(s, \cdot\ \varphi))$$

証明　V_k の定義において、V_{k-1} は既知関数であるから、(1.3) に対する Bellman Principle と同様にして

$$(2.5) \qquad V_k(t+s, x, \varphi)$$

$$= \sup_{U \in \Omega} F(t, x, V_k(s, \cdot, \varphi), V_{k-1}(s+\cdot, \cdot, \varphi), U).$$

が成立つ。V_k が V に一様収束するから、

(2.6) $$V(t+s, x, \varphi) = \sup_{U \in \mathcal{a}} F(t, x, V(s, \cdot\, \varphi), V(s+\cdot, \cdot; \varphi), U).$$

ゆえに，$\tilde{V}(\theta, x) = V(s+\theta, x, \varphi)$ とおけば，

(2.7) $$\tilde{V}(t, x) = \sup_{U \in \mathcal{a}} F(t, x, V(s, \cdot\, \varphi), \tilde{V}, U).$$

すなわち，$\tilde{V}$ は $V(s, \cdot\, \varphi) \in BUC(R^d)$ を初期値とする (2.2) の解となる．i. e. $\tilde{V}(t, x) = V(t, x, V(s, \cdot\, \varphi))$.
ゆえに，(2.4) (Bellman Principle) が成立つ．

(2.8) $$V(t)\varphi = V(t, \cdot, \varphi) \qquad t \geq 0$$

により $V(t)$ を定義すれば，Proposition 1 により，($V(t)$, $t \geq 0$) は $BUC(R^d)$ 上の半群になる。さらに，φ がなめらかなとき，(2 回微分が $BUC(R^d)$ に属する)，確率積分に対する伊藤の公式を用いると，φ が $V(t)$ の generator G の domain に属し，$G\varphi$ が次の形にかけることが証明できる．

(2.9) $$G\varphi(x) = \sup_{u \in \Gamma} \left(A(u)\varphi - c(x, u)\varphi + f(x, \varphi(x), u)\right)$$

したがって，若し値関数 $V(t, x, \varphi)$ が x につき，なめらかであれば，(2.1) の古典解を与える。(古典解の一意的存在については [3], [7] を参照).

P.L. Lionsにより導入されたviscosity solutionは，ベルマン方程式の有用な弱解で，確率制御の値関数はmildな条件の下で，ベルマン方程式の一意的なviscosity solusinになるが，この事実は(2.1)に対しても成立つ。

(A4) $$\sup_{u\in\Gamma} \| a_{ij}(\cdot, u) \|_{W^2(R^d)} < \infty, \quad i,j=1 \cdots d.$$

<u>Proposition 2</u>. 仮定(A1)～(A4)の下で，値関数 $V(\cdot,\cdot,\varphi)$ は(2.1)の一意的viscosity solutionとなる。

証明。 Vを有界なめらかな関数 W_k で次のように近似する。

(2.10) $$\sup_{x\in R^d,\, t\le T} | V(t,x,\varphi) - W_k(t,x) | \le 2^{-k}$$

$\overline{W_k}$ を(2.11)により定義すれば，

(2.11) $$\overline{W_k}(t,x) = \sup_{U\in\mathcal{U}} F(t,x,\varphi,W_k,U),$$

(2.10)より，$\overline{W_k}$ は V に $[0\ T]\times R^d$ 上，一様収束する。一方，仮定(A1)，(A2)，(A4)により，$\overline{W_k}$ はベルマン方程式：

(2.12) $$\begin{cases} \dfrac{\partial \overline{W_k}}{\partial t} = \sup\limits_{u\in\Gamma} \left(A(u)\overline{W_k} - c(x,u)\overline{W_k} + f(x, W_k(t,x), u) \right) \\ \overline{W_k}(0,x) = \varphi(x) \end{cases}$$

の一意的 viscosity solution である。さらに，(2.10) より

$$f(x, W_k(t, x), u) \xrightarrow[k\to\infty]{} f(x, V(t, x), u)$$

uniformly ~~on~~ $[0\,T] \times R^d \times \Gamma$.

ゆえに，viscosity solution の stability より，V は (2.1) の viscosity solution になる。

一意性。 W ($\in BUC([0\,T]\times R^d)$ $\forall T>0$) を (2.1) の viscosity solution とする。

$$g(t, x, u) = f(x, W(t, x), u)$$

とおけば，$g \in BUC[0\,T]\times R^d$ で，W はベルマン方程式；

$$(2.13) \quad \begin{cases} \dfrac{\partial W}{\partial t} = \sup\limits_{u\in\Gamma} \left(A(u) W - c(x, u) + g(t, x, u)\right) \\ W(0, x) = \varphi(x) \end{cases}$$

の一意的な viscosity solution となり，次のように値関数として表わされる。

$$(2.14) \quad W(t, x) = \sup_{U\in\mathcal{U}} E\int_0^t e^{-\int_0^s c(X(\theta; x, U)d\theta} g(t-s, X(s; x, U), U(s))ds + e^{-\int_0^t c(X(\theta), x, U)\,d\theta} \varphi(X(t; x, U)).$$

g の定義を代入すれば，

$$W(t, x) = \sup_{U \in \mathfrak{A}} F(t, x, \varphi, W, U).$$

すなわち，W は (2.2) の解となる．Proposition 1 より，$V=W$.

§3. Controlled branching diffusion. 以後 (A.1) (A 2) と次の (A 5) ～ (A 7) を仮定しよう．

(A 5) $\quad c(x, u) = \lambda > 0$

(A 6) $\quad f(x, v, u) = \lambda \sum_{k=0}^{\infty} p_k v^k$

ただし，$p_k \geqq 0$, $p_1 = 0$, $\sum_{k=0}^{\infty} p_k = 1$.

(A 7) $\quad \sum_{k=0}^{\infty} k^2 p_k < \infty$.

$\bar{B} = (\bar{B}(t), t \geqq 0)$ を d 次元分枝ブラウン運動，$Z(t)$ を t におけるブラウン粒子の数，τ_1 を first branching time とする．次の branching law にしたがって，各ブラウン粒子は分裂する，[1]，

$$(3.1) \quad \begin{cases} P(\tau_1 > t \,/\, Z(0)=1) = e^{-\lambda t} \\ P(Z(\tau_1) = k \,/\, Z(0)=1) = p_k, \quad k=0, 1, 2 \cdots. \end{cases}$$

すなわち，各ブラウン粒子はパラメータ λ の指数分布にした

がう待ち時間の後に分裂し，確率 p_k で $(k-1)$ 個のブラウン粒子が新しく生まれ，p_0 の確率で消滅する。また各ブラウン粒子は，分裂した場所から出発する独立な d 次元ブラウン運動になる。ゆえに，新しく生まれたブラウン運動を親のブラウン運動に順々つないで行くと，時刻 0 よりのブラウン運動が得られる。このようにして得られた d 次元ブラウン運動に適当に番号をつけておけば，k 番目のブラウン運動 B_k は，

$$B_k(t) = \sum_{i=0}^{\infty} \xi_i(t-\tau_i)\,\chi_{[\tau_i,\ \tau_{i+1})}(t), \quad (\chi_A \text{ は } A \text{ の定義関数})$$

と表される。ただし，$0=\tau_0<\tau_1<\tau_2<\cdots$ は $\vec{B}$ の branching time で，k に依存した $\xi_0, \xi_1, \cdots$ は独立な d 次元ブラウン運動である。また，$Z(0)=1$ のとき，$B_1(t)=B_2(t)=\cdots$，$\forall t<\tau_1$，である。$[0, t]$ 上で同一のブラウン運動となる番号の中では，一番小さい番号を代表にとる。$\mathfrak{Z}(t)$ を時刻 t における代表の番号の全体とする。例えば $\mathfrak{Z}(t)=\{1\}$，$\forall t<\tau_1$，となる。

次のような確率制御を考えよう。$[0\ \infty)\times C([0\ \infty)\to R^d)$ 上で定義された Γ 値関数 U がボレル可測で，各 t に対し，$U(t,\cdot)$ が $C([0\ t]\to R^d)$ 上のボレル関数となるとき，admissible control と呼ぶ。($C(T\to R^d)$ は T 上の d 次元連続関数の全体で，コンパクト上の sup norm による

位相）．Uがこの意味でadmissible controlならば，d次元ブラウン運動Bを合成させた$\hat{U}(t)=U(t,B)$は§2の意味でadmissible controlになり，逆に§2のadmissible control $\hat{U}$は，適当なadmissible control Uを用いて，$U(t)=\hat{U}(t,B)$と表すことが出来る。admissible controlの全体を$\mathcal{A}$とかく。

$U\in\mathcal{A}$に対し，確率微分方程式

$$(3.2)\quad \begin{cases} dX_k(t)=\alpha(X_k(t),U(t,B_k))dB_k(t)+\gamma(X_k(t),U(t,B_k))dt \\ X_k(0)=x \end{cases},$$

$$k=1,2,\cdots$$

は，各kに対し，B_k適合な一意解$X_k(t)=X_k(t,x,U)$をもつ．さらに，X_kの確率法則はkに無関係になる。$\bar{X}(t)=(X_j(t),\ j\in\mathfrak{Z}(t))$は，$\bar{B}$と同じbranching timeをもち，non-branching partは，

$$(3.3)\quad \begin{cases} dX(t)=\alpha(X(t),U(t,B))\,dB(t)+\gamma(X(t),U(t,B))\,dt \\ X(0)=x \end{cases}$$

で表される．

$$C = \{ \varphi \in BUC(R^d);\quad 0 \le \varphi(x) \le 1,\quad {}^\forall x \in R^d \}$$

とおけば，C は $BUC(R^d)$ の convex closed subset になる。(3.2) で与えられた運動 $\bar{X}$ を，時刻 t 迄続けたときの評価関数 $W(t, x, \varphi, U)$ を，次のように与える。

$$(3.4)\qquad W(t, x, \varphi, U) = E \prod_{k \in z(t)} \varphi(X_k(t, x, U))$$

$$(3.5).\qquad W(t, x, \varphi) = \sup_{U \in A} W(t, x, \varphi, U).$$

よく知られたように，ブラウン運動の個数を表す $Z(t), t \ge 0$，は，Galton - Watson process となり，平均と分散は

$$E(Z(t)/Z(0) = 1) = e^{(m-1)\lambda t}$$

$$V(Z(t)/Z(0)=1) = \begin{cases} \frac{M+1}{m-1}\left(e^{2(m-1)\lambda t} - e^{(m-1)\lambda t}\right), & m \ne 1 \\ (M+1)\lambda t, & m = 1 \end{cases}$$

となる．ここで，$m = \sum_{k=0}^{\infty} k p_k$，$M = \sum_{k=0}^{\infty} k^2 p_k$．したがって，適当な定数 Λ により

$$(3.6)\qquad E(Z^2(t)/Z(0) = 1) \le e^{\Lambda t}.$$

が成立つ。この評価を考慮すれば，確率微分の計算 [5] を

真似て，Proposition 3 が証明出来る。

(3.7) $\varphi \in C \Rightarrow W(t, \cdot\ \varphi) \in C$ かつ

$$W(\cdot\ \cdot, \varphi) \in BUC([0\ T] \times R^d),\ \forall T.$$

ゆえに，$W(t)\varphi = W(t, \cdot\ \varphi)$ により，$W(t) ; C \to C$ を定義する．

<u>Proposition 3.</u>

(i) $W(0) = \text{identity} \qquad W(t+s) = W(t)\,W(s).$

(ii) $\varphi(x) \le \psi(x),\ \forall x \in R^d \Rightarrow$

$$W(t)\varphi(x) \le W(t)\psi(x),\quad \forall x \in R^d\ \ \forall t \ge 0.$$

(iii) $\|W(t)\varphi - W(t)\psi\| \le e^{(m-1)\lambda t}\|\varphi - \psi\|$

さらに，なめらかな $\varphi \in C$ は半群 $W(t)$ の generator $\mathcal{G}$ の domain に属し，

$$\mathcal{G}\varphi = \sup_{u \in \Gamma} A(u)\varphi - \lambda\varphi + \lambda \sum_{k=0}^{\infty} p_k \varphi^k.$$

仮定 (A 4) の下で，W は，コーシー問題；

$$\frac{\partial W}{\partial t} = \sup_{u \in \Gamma} A(u)W - \lambda W + \lambda \sum_{k=0}^{\infty} p_k W^k$$

$$W(0,x) = \varphi(x)$$

の一意的 viscosity solution となる。

したがって、Proposition 2 により、W は (2.2) のように定義した価値関数と一致するが、Q が complementary non-degeneracy の場合；価値関数のなめらかさをしらべるのに、(3.6) を考慮すれば [3] と同様な計算が出来るところに、$\bar{X}$ を用いる利点があるように思われる。

<u>Proposition 4.</u> 次のように係数のなめらかさ (A8) と Q の complementary non-degeneracy (A9) を仮定する。

(A8). $\sup_{u \in \Gamma} \| g(\cdot, u) \|_{C^2(R^d)} < \infty$, $\quad g = a_{ij}, \gamma_i, \varphi$.

(A9). $\exists \nu > 0$; $\forall x \in R^d$ に対し、次の条件をみたす正整数 n と $u_1 \cdots u_n \in \Gamma$, $\theta_1 \cdots \theta_n \in (0,1)$ が存在する, $\sum_{i=1}^n \theta_i = 1$ かつ

$$\sum_{i,j=1}^d \sum_{k=1}^n \theta_k \, a_{ij}(x, u_k) \xi_i \xi_j \geq \nu |\xi|^2, \quad \forall \xi \in R^d.$$

このとき、$W \in W_\infty^{1,2}((0,T) \times R^d)$ $\quad \forall T > 0$, かつ

$$\frac{\partial W}{\partial t} = \sup_{u \in \Gamma} L(u) W - \lambda W + \lambda \sum_{k=0}^{\infty} p_k W^k$$

a.e. in $(0,\infty) \times R^d$

$$W(0,x) = \varphi(x) \qquad \forall x \in R^d.$$

文献:

[1]. N. Ikeda, M. Nagasawa & S. Watanabe, On branching semi-groups I, II, Proc. Jap. Acad. 42 (1966), 1016 – 1026

[2]. N. V. Krylov, Boundedly nonhomogeneous elliptic and parabolic equations. Math. USSR. Izv. 20 (1983) 459 – 492

[3]. P. L. Lions, Control of diffusion processes in R^N. Comm. Pure Appl. Math. 34 (1981), 121 – 147

[4]. ———, Optimal control of diffusion processes and H-J-B equations. Viscosity solutions and uniqueness, Comm. P. D. E. 8 (1983)

[5]. M. Nisio., Stochastic Control Theory. 151. Lect Note. Macmillan India. 1981

[6]. ———, Stochastic control related to branching diffusion processes; Preprint

[7]. N. S. Trudinger, Fully nonlinear, uniformly elliptic equations under natural structure conditions, Trans. Amer. Math. Soc., 278 (1983), 751 – 769.