数理解析研究所講究録
第542巻 1985年 11-26

3次元球面内のグラフに関する素分解定理

早大教育 鈴木晋一 (Shin'ichi Suzuki)

§0. 序

以下の考察はすべて piecewise linear category で行う.

3次元球面 S^3 と, そこに埋蔵された μ 個の連結成分 $K_1, \cdots, K_\mu$ から成るコンパクトな1次元多面体 P との対 $(P \subset S^3)$ を, μ 成分のグラフ (graph) と呼ぶ. μ 成分のグラフ $(P \subset S^3) = (K_1 \cup \cdots \cup K_\mu \subset S^3)$ で, 各成分 K_i が円周 S^1 と同相なものを絡み目 (link) と呼び, 特に1成分の絡み目を結び目 (knot) と呼ぶ.

2つのグラフ $(P \subset S^3)$ と $(P' \subset S^3)$ が同じ結び目型であるとは, 向きを保存する同相写像 $\psi: S^3 \to S^3$ で $\psi(P) = P'$ となるものが存在する場合をいい, $(P \subset S^3) \cong (P' \subset S^3)$ で示す.

グラフ $(P \subset S^3)$ が平凡であるとは, $P \subset S^2$ なる2次元球面 S^2 が S^3 内に存在する場合をいう.

H. Schubert [7] は, 非平凡な任意の結び目は素な結び目に

結び目型を除いて一意的に分解されることを示し，またY. Hashizume [4] はこの結果を絡み目にまで拡張した。著者は以前にある特殊なグラフに対して素分解の存在とその一意性を示した [8] が，この論文では一般のグラフに対してこれとは別の素分解を定義し，素分解の存在と一意性を証明する．この結果は，グラフが絡み目である場合には Hashizume [4] の結果と一致する．存在の証明は Haken [3] による incompressible surfaces の有限性定理に依り，一意性の証明は Schubert [7], Hashizume [4] 等に用いられた典型的方法に依る．

§1. グラフの素分解定理

多面体 X の部分多面体 Y について $N(Y; X)$ によって Y の X における正則近傍を表す．

コンパクトな1次元多面体 P について，$\mu(P)$, $\beta(P)$ によってそれぞれ P の連結成分の個数と P の 1^{st} Betti 数を表す．グラフ $(P \subset S^3)$ について $E(P) = S^3 - {}^{\circ}N(P; S^3)$ とする；ここで ${}^{\circ}Y$ は Y の内部を表す．$E(P)$ はコンパクトで連結で向き付け可能な3次元多様体で，境界 $\partial E(P) = \partial N(P; S^3)$ である．

S^3 に埋蔵された2次元球面 Σ に対して，$\Delta = \Delta(\Sigma)$ と $\square = \square(\Sigma)$ を $S^3 - \Sigma$ の各連結成分の閉包とする；いわゆる

Alexander の定理 [1] によって Δ も $\Box$ も 3 次元球体である. $\Delta \cup \Box = \mathbb{S}^3$, $\Delta \cap \Box = \partial\Delta \cap \partial\Box = \partial\Delta = \partial\Box = \Sigma$.

1.1 定義. **(1)** グラフ $(P \subset \mathbb{S}^3)$ に対し, 2次元球面 $\Sigma \subset \mathbb{S}^3$ が I 型の分解を与えるとは次の条件を満す場合をいう:

(イ) $P \cap \Sigma$ は丁度1点 ω であり,

(ロ) $(P-\omega) \cap \Delta(\Sigma) \neq \emptyset$, $(P-\omega) \cap \Box(\Sigma) = \emptyset$.

(2) このような場合に, 次の2つのグラフが得られる:

$$(P_1 \subset \mathbb{S}^3) \equiv (P \cap \Delta(\Sigma) \subset \mathbb{S}^3),\ (P_2 \subset \mathbb{S}^3) \equiv (P \cap \Box(\Sigma) \subset \mathbb{S}^3).$$

そこでグラフ $(P \subset \mathbb{S}^3)$ は Σ によって $(P_1 \subset \mathbb{S}^3)$ と $(P_2 \subset \mathbb{S}^3)$ に分解されたといい, 次の記号で示す:

$$(P \subset \mathbb{S}^3) = (P_1 \subset \mathbb{S}^3) \underset{\Sigma}{\vee} (P_2 \subset \mathbb{S}^3),$$

または単に Σ を省略して

$$(P \subset \mathbb{S}^3) = (P_1 \subset \mathbb{S}^3) \vee (P_2 \subset \mathbb{S}^3).$$

1.2 命題. $(P \subset \mathbb{S}^3) = (P_1 \subset \mathbb{S}^3) \vee (P_2 \subset \mathbb{S}^3)$

$\Rightarrow$ $\beta(P) = \beta(P_1) + \beta(P_2)$, $\mu(P) = \mu(P_1) + \mu(P_2) - 1$. ■

1.3. 定義. **(1)** グラフ $(P \subset \mathbb{S}^3)$ に対し, 2次元球面 $\Sigma \subset \mathbb{S}^3$ が II 型の分解を与えるとは次の条件を満す場合をいう:

(ハ) $P \cap \Sigma$ は2点 a, b から成る,

(ニ) 円筒 $A = \Sigma - {}^{\circ}N(P; \mathbb{S}^3)$ は $E(P)$ で incompressible.

(2) このような場合に, Σ 上で a と b を結ぶ単純弧 α を選ぶことにより, 次の2つのグラフが得られる:

$$(Q_1 \subset \mathbb{S}^3) \equiv (P \cap \Delta(\Sigma) \cup \alpha \subset \mathbb{S}^3),$$
$$(Q_2 \subset \mathbb{S}^3) \equiv (P \cap \square(\Sigma) \cup \alpha \subset \mathbb{S}^3).$$

そこでグラフ $(P \subset \mathbb{S}^3)$ は Σ によって $(Q_1 \subset \mathbb{S}^3)$ と $(Q_2 \subset \mathbb{S}^3)$ に分解されたといい，次の記号で示す：

$$(P \subset \mathbb{S}^3) = (Q_1 \subset \mathbb{S}^3) \underset{\Sigma}{\#} (Q_2 \subset \mathbb{S}^3),$$

または単に Σ を省略して

$$(P \subset \mathbb{S}^3) = (Q_1 \subset \mathbb{S}^3) \# (Q_2 \subset \mathbb{S}^3).$$

上の定義で $(Q_1 \subset \mathbb{S}^3)$ と $(Q_2 \subset \mathbb{S}^3)$ の結び目型は単純弧 α の選び方に依らないことに注意.

1.4 命題 2次元球面 $\Sigma \subset \mathbb{S}^3$ がグラフ $(P \subset \mathbb{S}^3)$ に対しII型の分解を与えるとし，$P \cap \Sigma = \{a, b\}$，$(P \subset \mathbb{S}^3) = (Q_1 \subset \mathbb{S}^3) \underset{\Sigma}{\#} (Q_2 \subset \mathbb{S}^3)$ とする.

(i) a と b が P の異なる連結成分に属するならば，

$$\beta(P) = \beta(Q_1) + \beta(Q_2), \quad \mu(P) = \mu(Q_1) + \mu(Q_2).$$

(ii) a と b が P の同一の連結成分に属するならば，

$$\beta(P) = \beta(Q_1) + \beta(Q_2) - 1, \quad \mu(P) = \mu(Q_1) + \mu(Q_2) - 1.$$ ▨

1.5 定義. グラフ $(P \subset \mathbb{S}^3)$ が（幾何的に）分離するとは，2次元球面 $S^2 \subset \mathbb{S}^3 - P$ が存在し，$\Delta(S^2) \cap P \neq \emptyset$，$\square(S^2) \cap P \neq \emptyset$ を満すときをいう.

これで必要な準備・定義が揃ったので，素なグラフを定義し，素分解定理を述べることができる.

1.6 定義. グラフ $(P \subset S^3)$ が素であるとは，次の3条件を満す場合をいう：

(i)　$(P \subset S^3)$ は非平凡でかつ分離しない，

(ii)　$(P \subset S^3)$ に対するI型の分解を与える2次元球面は存在しない，

(iii)　任意のII型の分解

$$(P \subset S^3) = (Q_1 \subset S^3) \# (Q_2 \subset S^3)$$

について，$(Q_1 \subset S^3)$ と $(Q_2 \subset S^3)$ の少くとも一方は平凡．

1.7 主定理. 任意の非平凡でかつ分離しないグラフ $(P \subset S^3)$ は，I型およびII型の分解により，有限個の素なグラフ $(P_1 \subset S^3), \cdots, (P_n \subset S^3)$ と有限個の平凡なグラフに分解され，しかも $(P_1 \subset S^3), \cdots, (P_n \subset S^3)$ は結び目型を除いて一意である．

このような分解（素分解と呼ぶことにする）の存在は次節§2で，一意性の証明は§3で与える．証明を始める前に便宜上の定義を一つ与えておく．

1.8 定義. グラフ $(P \subset S^3)$ が刺無(とげな)しであるとは，P を単体分割したとき位数1の頂点を持たない場合をいう．

§2. 素分解の存在の証明

グラフの素分解の存在の証明には，序でも述べたように，

Haken [3] による incompressible surfaces の有限性定理を用いる．対象とする3次元多様体の状況や，取扱う曲面によっていくつかの表現があるが，ここでは最も普通の形を使用する．用語の定義等と共に，詳しくは Jaco [5, pp. 42～50] を参照されたい．

2.1 Haken の有限性定理．任意のコンパクトで連結かつ向き付け可能な3次元多様体 M に対し，整数 $n_0(M)\geq 0$ が存在して次の性質を満す：

$\{F_1, F_2, \cdots, F_n\}$ を，M の内部 $°M$ に埋蔵された，互いに交わらない incompressible な閉曲面の collection とすれば，(イ) $n < n_0(M)$ であるか，(ロ) ある i について F_i が ∂M の1成分と parallel であるか，または (ハ) ある $i \neq j$ について F_i と F_j が parallel であるかのいずれかが成立する．▨

コンパクトで連結で向き付け可能な3次元多様体 M に対して，上の 2.1 の結論を満す整数 $n_0(M)\geq 0$ は少なくとも1つは存在する；このような整数の最小値を $h_0(M)$ とする．

さてグラフ $(P\subset \mathbb{S}^3)$ に対し，2次元球面 $\Sigma\subset \mathbb{S}^3$ がII型の分解 $(P\subset \mathbb{S}^3)=(Q_1\subset \mathbb{S}^3)\underset{\Sigma}{\#}(Q_2\subset \mathbb{S}^3)$ を与えたとし，$(Q_1\subset \mathbb{S}^3)$ が $P\cap\Delta(\Sigma)$ から得られたとしよう．定義 1.3 (ニ) より，円筒 $A=\Sigma - °N(P;\mathbb{S}^3)=\Sigma\cap E(P)$ は $E(P)$ で incompressible である．$\partial N(P;\mathbb{S}^3)\cap\Delta(\Sigma)$ の成分のうちで ∂A と共通点を持つ

ものの全体を C とすれば，$\Sigma \cup C$ は閉曲面である；C の部分を $E(P)$ の内部に押し込むことによって閉曲面 Σ_Δ が得られる．もし C が $E(P)$ で compressible な場合は，必要な手術 (surgery) を施すことによって，$(Q_1 \subset \mathbb{S}^3)$ と $(Q_2 \subset \mathbb{S}^3)$ が共に平凡でない場合は，Σ_Δ を incompressible にすることができる．特に $\beta(Q_1)=1$ ならば Σ_Δ はトーラスである．これらの考察から次が得られる：

2.2 命題 $(P \subset \mathbb{S}^3)$ を非平凡で分離しないグラフとする．

(1) $(P \subset \mathbb{S}^3)$ が刺無し（より一般にI型の分解を与える2次元球面を持たない）で $h_0(E(P))=0$ ならば，$(P \subset \mathbb{S}^3)$ は素である．

(2) $(P \subset \mathbb{S}^3) = (Q_1 \subset \mathbb{S}^3) \# (Q_2 \subset \mathbb{S}^3)$ で，$(Q_1 \subset \mathbb{S}^3)$ と $(Q_2 \subset \mathbb{S}^3)$ が共に非平凡，かつ $\beta(Q_1)=1$, $\beta(Q_2) \geqq 1$ とすれば

$$h_0(E(P)) \geqq h_0(E(Q_1)) + h_0(E(Q_2)) + 1$$

が成立する．▨

ここで目標の素分解の存在の証明を与えるが，主定理 1.7 の主張から次の補題を証明すればよいことになる：

2.3 補題 $(P \subset \mathbb{S}^3)$ を非平凡で分離しないグラフとすれば，I型およびII型の分解により，$(P \subset \mathbb{S}^3)$ は有限個の素なグラフと平凡なグラフに分解される．

証明 $\beta(P)$ と $h_0(E(P))$ に関する帰納法によって証明する．

補題の主張から $(P\subset S^3)$ は刺無しであると仮定してよい。

もし $\beta(P)=0$ ならば $(P\subset S^3)$ は常に平凡である。$\beta(P)=1$ ならば仮定から $(P\subset S^3)$ は結び目であり，結び目の場合は序で述べたようにSchubert [7] により証明されている。（実際，$(P\subset S^3)$ が非平凡な2つの結び目 $(Q_1\subset S^3)$ と $(Q_2\subset S^3)$ に分解されたとき，$h_0(E(Q_1))<h_0(E(P))$，$h_0(E(Q_2))<h_0(E(P))$ が成立している。）

そこで以後 $\beta(P)\geqq 2$ と仮定し，補題の仮定を満す任意のグラフ $(Q\subset S^3)$ については，$\beta(Q)<\beta(P)$ または $\beta(Q)=\beta(P)$ で $h_0(E(Q))<h_0(E(P))$ ならば，補題が成立すると仮定する。さて $(P\subset S^3)$ が素ならば証明は既に終っているので，$(P\subset S^3)$ は素でないと仮定してよい；$(P\subset S^3)$ に対しI型かまたはII型の分解を与える2次元球面 $\Sigma\subset S^3$ が存在し，I型かII型かに従って次のような分解を与える：

$$(P\subset S^3)=(P_1\subset S^3)\underset{\Sigma}{\vee}(P_2\subset S^3),\quad \beta(P_1)\neq 0,\ \beta(P_2)\neq 0,$$

$$(P\subset S^3)=(Q_1\subset S^3)\underset{\Sigma}{\#}(Q_2\subset S^3),\quad (Q_i\subset S^3)\text{ は非平凡 }(i=1,2).$$

3通りの場合に分けて考察する。

(I) Σ がI型の分解を与える場合：命題1.2より $\beta(P)=\beta(P_1)+\beta(P_2)$ だから $0<\beta(P_1)<\beta(P)$，$0<\beta(P_2)<\beta(P)$ である。帰納法の仮定から $(P_1\subset S^3)$ も $(P_2\subset S^3)$ も素分解を持つから，$(P\subset S^3)$ も素分解を持つ。

(Ⅱ)-(i) Σ がⅡ型の分解を与え，Σ が P の異なる成分と交わる場合：命題1.4(i)により，上と同じように $0<\beta(Q_1)<\beta(P)$，$0<\beta(Q_2)<\beta(P)$ が結論されるから帰納法の仮定より $(Q_1\subset \mathbb{S}^3)$ と $(Q_2\subset \mathbb{S}^3)$ は共に素分解を持ち，従って $(P\subset \mathbb{S}^3)$ も素分解を持つ．

(Ⅱ)-(ii) Σ がⅡ型の分解を与え，Σ が P の一つの成分と交わる場合：命題1.4(ii)により $\beta(P)=\beta(Q_1)+\beta(Q_2)-1$ であり，仮定から $\beta(Q_1)>0$，$\beta(Q_2)>0$ である．特にもし $\beta(Q_1)>1$，$\beta(Q_2)>1$ ならば $\beta(Q_1)<\beta(P)$，$\beta(Q_2)<\beta(P)$ が成立し，帰納法の仮定から(Ⅱ)-(i)と同じように補題が成立する．そこで $\beta(Q_1)=1$，$\beta(Q_2)=\beta(P)$ の場合のみを考察すれば十分である．ところが $(Q_1\subset \mathbb{S}^3)$ は素分解を持ち，命題2.2(2)より $h_0(E(Q_2))<h_0(E(P))$ だから帰納法の仮定により $(Q_2\subset \mathbb{S}^3)$ も素分解を持つ．従って $(P\subset \mathbb{S}^3)$ も素分解を持つ． ▨

§3. 素分解の一意性の証明

主定理1.7の最後の主張である素分解の一意性は，次の4つの補題から直ちに得られる（Fox[2]参照）．

3.1 補題. $(P\subset \mathbb{S}^3)$ を非凡平で分離しないグラフとし，2つのⅠ型の分解を与える2次元球面 Σ, Σ' が存在して分解

$$(P\subset \mathbb{S}^3)=(P_1\subset \mathbb{S}^3)\vee_{\Sigma}(P_2\subset \mathbb{S}^3),$$

$$(P \subset \mathbb{S}^3) = (Q \subset \mathbb{S}^3) \vee_{\Sigma'} (Q' \subset \mathbb{S}^3)$$

を与えるとする．もし $(Q \subset \mathbb{S}^3)$ が素ならば，$(P_1 \subset \mathbb{S}^3)$ または $(P_2 \subset \mathbb{S}^3)$ は $(Q \subset \mathbb{S}^3)$ を素因子として持つ．

証明 $\Delta(\Sigma) = \Delta$，$\square(\Sigma) = \square$，$\Delta(\Sigma') = \Delta'$，$\square(\Sigma') = \square'$ とする．$\Sigma \cap P = \{\omega\}$，$\Sigma' \cap P = \{\omega'\}$ とし，$P \cap \Delta'$ から $(Q \subset \mathbb{S}^3)$ が，$P \cap \square'$ から $(Q' \subset \mathbb{S}^3)$ が得られるとしてよい．

もし $\Sigma \cap \Sigma' = \emptyset$ ならば分解の定義から補題は証明されており，また $\omega = \omega'$ で $\Sigma \cap \Sigma' = \{\omega\}$ ならば分解の定義からやはり補題は証明されている．残りを2つの場合に分けて証明する．

<u>Case 1</u>. $\omega \neq \omega'$: $\Sigma \cap \Sigma' \neq \emptyset$ ならば，$\Sigma \cap \Sigma'$ は有限個の単純閉曲線，これらを $c_1, \cdots, c_\nu$ とする，から成ると仮定してよい．$s_1, \cdots, s_\nu$ を Σ' 上で $c_1, \cdots, c_\nu$ が bound する円板で，$s_i \not\ni \omega'$ $(i = 1, \cdots, \nu)$ なるものとする．c_1 をこれらの中で最小のものとする；すなわち $s_1 \cap \Sigma = \partial s_1 = c_1$．$\sigma_1$ を c_1 によって bound される Σ 上の円板で $\sigma_1 \not\ni \omega$ なるものとする．すると2次元球面 $s_1 \cup \sigma_1$ は $\mathbb{S}^3$ 内で3次元球体 B^3_1，$B^3_1 \cap \{\omega\} = \emptyset$，を bound する [1]．ところが $s_1 \cap P = \emptyset$，$\sigma_1 \cap P = \emptyset$ で $(P \subset \mathbb{S}^3)$ は分離しないから，$B_1 \cap P = \emptyset$ が成立する．従って新しい2次元球面 $(\Sigma - \sigma_1) \cup s_1$ が得られ，これは Σ と同じ分解 $(P \subset \mathbb{S}^3) = (P_1 \subset \mathbb{S}^3) \vee (P_2 \subset \mathbb{S}^3)$ を与える；この新し

い2次元球面を再び Σ と書くことにする．Σ をほんの少し変形して Σ' との交わりが一般の位置にあるようにすれば

$$\Sigma \cap \Sigma' \subset c_2 \cup \cdots \cup c_\nu$$

となる．この操作の反復により $\Sigma \cap \Sigma'$ のすべての交叉線 $c_1, \cdots, c_\nu$ を取り除くことができるから，Case 1 の場合は補題が正しいことが証明された．

Case 2. $\omega = \omega'$: この場合の証明は Suzuki [8] の Lemma 3.9 の証明と全く同じである．$\Sigma \cap \Sigma' - \{\omega\} \neq \emptyset$ ならば $\Sigma \cap \Sigma'$ は有限個の単純閉曲線 $c_1, \cdots, c_\nu, d_1, \cdots, d_\lambda$ から成り次を満す：$(c_1 \cup \cdots \cup c_\nu) \cap (d_1 \cup \cdots \cup d_\lambda) = \emptyset$, $c_i \cap c_j = \emptyset$, $d_i \cap d_j = \omega$ $(i \neq j)$. Case 1 と全く同じようにして $c_1, \cdots, c_\nu$ を取り除くことができる；$\Sigma \cap \Sigma' = d_1 \cup \cdots \cup d_\lambda$ とする．$d_1, \cdots, d_\lambda$ の中には最小のもの，d_1 とする，が存在する；すなわち d_1 は Σ' 上円板 t_1 を bound し，$t_1 \cap \Sigma = \partial t_1 = d_1$ となる．τ_1 と τ_2 を d_1 が bound する Σ 上の円板とすると，2つの2次元球面 $\Sigma_1 = t_1 \cup \tau_1$, $\Sigma_2 = t_1 \cup \tau_2$ を得る．$\Sigma_1 \cup \Sigma_2$ をほんの少し変形することにより $\Sigma_1 \cap \Sigma_2 = \{\omega\}$ とできる．$\Sigma_1 \cap P = \{\omega\} = \Sigma_2 \cap P$ だから Σ_1 も Σ_2 もI型の分解を与える．$(P_1 \subset S^3)$ が $P \cap \Delta$ から得られ $(P_2 \subset S^3)$ が $P \cap \square$ から得られるとしよう．

$t_1 \subset \Delta$ ならば $\Sigma_1 \cup \Sigma_2$ は分解

$$(P \subset S^3) = (P_{11} \subset S^3) \underset{\Sigma_1}{\vee} (P_{12} \subset S^3) \underset{\Sigma_2}{\vee} (P_2 \subset S^3)$$

を与え，$t_1 \subset \square$ ならば $\Sigma_1 \cup \Sigma_2$ は分解

$$(P \subset S^3) = (P_1 \subset S^3) \vee_{\Sigma_1} (P_{21} \subset S^3) \vee_{\Sigma_2} (P_{22} \subset S^3)$$

を与える．特に次が成立することに注意されたい：

$$(\Sigma_1 \cup \Sigma_2) \cap \Sigma' = d_2 \cup \cdots \cup d_\lambda .$$

次に $d_2 \cup \cdots \cup d_\lambda$ の中から Σ' 上で最小のものをみつけ，上と同じ操作を操返し，次々 $d_2, \cdots, d_\lambda$ を消していくと結局 I 型の分解を与える 2 次元球面が 2λ 個 $\Sigma_1 \cup \Sigma_2 \cup \cdots \cup \Sigma_{2\lambda-1} \cup \Sigma_{2\lambda}$ が得られ，これらは ω のみを共有する．さらに $\Sigma_1 \cup \Sigma_2 \cup \cdots \cup \Sigma_{2\lambda-1} \cup \Sigma_{2\lambda}$ は $(P \subset S^3)$ を $2\lambda+1$ 個のグラフ（この中には一般に平凡なものも含まれる）に分解し，そのうちのいくつかが $(P_1 \subset S^3)$ の分解で残りが $(P_2 \subset S^3)$ の分解となる．今 $(\Sigma_1 \cup \Sigma_2 \cup \cdots \cup \Sigma_{2\lambda-1} \cup \Sigma_{2\lambda}) \cap \Sigma' = \{\omega\}$ で $(Q \subset S^3)$ が素だから必要ならば Σ' を少し変形することにより

$$(\Sigma_1 \cup \Sigma_2 \cup \cdots \cup \Sigma_{2\lambda-1} \cup \Sigma_{2\lambda}) \cap \Delta(\Sigma') = \{\omega\},$$

とできる．従って $(Q \subset S^3)$ が $(P_1 \subset S^3)$ または $(P_2 \subset S^3)$ の素因子であることが結論される．▨

3.2 補題． $(P \subset S^3)$ を非平凡で分離しないグラフとし，

$$(P \subset S^3) = (P_1 \subset S^3) \vee_{\Sigma} (P_2 \subset S^3),$$

$$(P \subset S^3) = (Q \subset S^3) \#_{\Sigma'} (Q' \subset S^3)$$

とする．もし $(Q \subset S^3)$ が素ならば，$(P_1 \subset S^3)$ または $(P_2 \subset S^3)$ は $(Q \subset S^3)$ を素因子として含む．

証明 $\Sigma\cap P=\{\omega\}$, $\Sigma'\cap P=\{a,b\}$ とし，$(Q\subset S^3)$ は $P\cap\Delta(\Sigma)$ から，$(Q'\subset S^3)$ は $P\cap\Box(\Sigma')$ から得られたと仮定する．

もし $\Sigma\cap\Sigma'=\emptyset$ または $\Sigma\cap\Sigma'=\{\omega\}$ で $\omega=a$ (または $\omega=b$) ならば，分解の定義から補題は既に証明されている．残りの場合を2つの場合に分けて考察する．

Case 1. $\omega\neq a,\omega\neq b$: $\Sigma\cap\Sigma'\neq\emptyset$ ならば，$\Sigma\cap\Sigma'$ は有限個の互いに交わらない単純閉曲線 $c_1,\cdots,c_\nu$ から成るとしてよい．$\sigma_1,\cdots,\sigma_\nu$ を $c_1,\cdots,c_\nu$ によって bound される Σ 上の円板で，$\sigma_i\not\ni\omega$ $(i=1,\cdots,\nu)$ なるものとする．

(i) もし c_i が Σ' 上で円板 s_i を bound し，$s_i\cap P=s_i\cap\{a,b\}=\emptyset$ となるならば，補題3.1 の証明中の Case1 と同じように，Σ を変形することによって $\Sigma\cap\Sigma'$ から c_i を取り除くことができる．

(ii) 従って各 c_i が Σ' 上で bound する円板を s_i, s_i' とするとき，$s_i\ni a$, $s_i'\ni b$ $(i=1,\cdots,\nu)$ と仮定してよい．このとき各 c_i は円筒 $A'=\Sigma'\cap E(P)$ で本質的である．さて c_1 を Σ 上で最小な閉曲線とする；すなわち $\sigma_1\cap\Sigma'=\partial\sigma_1=c_1$．すると σ_1 は $E(P)$ の中の円板で，$\sigma_1\cap A'=\partial\sigma_1=c_1$ となり A' が $E(P)$ で incompressible (定義 1.3 (=)) であることに反する．結局このような閉曲線 $c_1,\cdots,c_\nu$ は一切存在しないことが結論され，補題が証明されたことになる．

Case 2. $\omega = a$ ($\omega = b$ の場合も全く同様)：$\Sigma \cap \Sigma' - \{\omega\} \neq \phi$ ならば，$\Sigma \cap \Sigma'$ は有限個の単純閉曲線 $c_1, \cdots, c_\nu, d_1, \cdots, d_\lambda$ から成り，$(c_1 \cup \cdots \cup c_\nu) \cap (d_1 \cup \cdots \cup d_\lambda) = \phi$，$c_i \cap c_j = \phi$, $d_i \cap d_j = \omega$ $(i \neq j)$ と仮定してよい．$c_1 \cup \cdots \cup c_\nu$ は Case 1 と同様に Σ を変形することによって $\Sigma \cap \Sigma'$ から除去できるので，$\Sigma \cap \Sigma' = d_1 \cup \cdots \cup d_\lambda$ と仮定してよい．ところが各 d_i は Σ' 上で，$t_i \not\ni b$ なる円板 t_i を bound する $(i = 1, \cdots, \lambda)$．従ってこの後は補題 3.1 の証明中の Case 2 と同じ議論を反復することによって補題が証明される．▨

3.3 補題. $(P \subset S^3)$ を非平凡で分離しないグラフとし，

$$(P \subset S^3) = (P_1 \subset S^3) \#_{\Sigma} (P_2 \subset S^3),$$

$$(P \subset S^3) = (Q \subset S^3) \vee_{\Sigma'} (Q' \subset S^3)$$

とする．もし $(Q \subset S^3)$ が素ならば，$(P_1 \subset S^3)$ または $(P_2 \subset S^3)$ は $(Q \subset S^3)$ を素因子として含む．

証明 $\Sigma \cap P = \{a, b\}$，$\Sigma' \cap P = \{\omega\}$ とし，$(Q \subset S^3)$ は $P \cap \Delta(\Sigma')$ から，$(Q' \subset S^3)$ は $P \cap \Box(\Sigma')$ から得られたと仮定する．

$\Sigma \cap \Sigma' = \phi$，または $\omega = a$（または $\omega = b$）で $\Sigma \cap \Sigma' = \{\omega\}$ の場合は，分解の定義より補題は証明されている．

Case 1. $\omega \neq a, \omega \neq b$：この場合の証明は補題 3.2 の証明中の Case 1 と全く同じである．（特に 3.2 の証明では $(Q \subset S^3)$ が素であることを使っていないことに注意のこと．）

Case 2. $\omega = a$（$\omega = b$ の場合も全く同様）：この場合の証明も補題3.2 の Case 2 と同じである．$(Q \subset \mathbb{S}^3)$ が素であることを利用すれば，証明はむしろより単純になる．▨

3.4 補題. $(P \subset \mathbb{S}^3)$ を非平凡で分離しないグラフとし，

$$(P \subset \mathbb{S}^3) = (P_1 \subset \mathbb{S}^3) \#_{\Sigma} (P_2 \subset \mathbb{S}^3),$$

$$(P \subset \mathbb{S}^3) = (Q \subset \mathbb{S}^3) \#_{\Sigma'} (Q' \subset \mathbb{S}^3)$$

とする．もし $(Q \subset \mathbb{S}^3)$ が素ならば，$(P_1 \subset \mathbb{S}^3)$ または $(P_2 \subset \mathbb{S}^3)$ は $(Q \subset \mathbb{S}^3)$ を素因子として含む．

証明 この補題の証明は，本質的に結び目や絡み目の場合と同じであるので，詳細は省略する．

$\Sigma \cap P = \{a, b\}$，$\Sigma' \cap P = \{a', b'\}$ とする．$\Sigma \cap \Sigma' = \emptyset$ のとき，また $a = a'$，$b \neq b'$（または $a \neq a'$，$b = b'$；$a = b'$，$b \neq a'$；$a \neq b'$，$b = a'$）で $\Sigma \cap \Sigma' = \{a\}$（または $\Sigma \cap \Sigma' = \{b\}, \{a\}, \{b\}$）のとき，さらに $a = a'$，$b = b'$（または $a = b'$，$b = a'$）で $\Sigma \cap \Sigma' = \{a, b\}$ の以上3つの場合は，分解の定義より補題は証明されている．そこで残りの場合を順に考察すればよい．

Case 1. 4点 a, b, a', b' が相異なる場合．

Case 2. $a = a'$，$b \neq b'$ の場合．

Case 3. $a = a'$，$b = b'$ の場合．

これらの各場合には，補題3.1，3.2，3.3 の証明中では現われない処理も必要となるが，いずれもむずかしくない．▨

参考文献

[1] J.W.Alexander : On the subdivision of 3-space by a polyhedron, Proc.Nat.Acad.Sci.U.S.A., 10(1924), 6-8.

[2] R.H.Fox : A quick trip through knot theory, Topology of 3-Manifolds and Related Topics (ed. M.K.Fort,Jr.), New Jersy, Prentice-Hall, 1962, pp.120-167.

[3] W.Haken : Some results on surfaces in 3-manifolds, MAA Studies in Math., Vol.5 (1968), pp.39-98.

[4] Y.Hashizume : On the uniqueness of the decomposition of a link, Osaka Math.J., 10(1958), 283-300.

[5] W.Jaco : Lectures on Three-Manifold Topology, AMS Regional Conference Series in Math., Vol.45 (1977).

[6] C.D.Papakyriakopoulos : On Dehn's lemma and asphericity of knots, Ann.of Math.(2), 66(1957), 1-26.

[7] H.Schubert : Die eindeutige Zerlegbarkeit eines Knots in Primknoten, S.B.Heidelberger Akad.Wiss.Math.Natur.Kl.3 (1949), 57-104.

[8] S.Suzuki : On linear graphs in 3-sphere, Osaka J.Math., 7 (1970), 375-396.