数理解析研究所講究録
第543巻 1985年 131-147

局所環の分離超積

名大・理　吉野雄二(Yuji Yoshino)

数学基礎論で，しばらく話題となっていた超積の概念は，やっと最近になって，可換環の分野でも用いられ始め，2，3の論文が既に現われている。([2],[3]) しかし，一般的にいって超積とは非常に大きな"もの"であるため，その理論的取り扱いには，四苦八苦する場合が多い。例えば，ネータ環の超積は，一般的にいって，もはやネータでない。そこで筆者は可換環とくに，局所環の理論に非常に都合の良い分離超積というものを考えた。それは，本質的には，[2]，[3]の中に現われているが，本稿の目的は，それについて系統的に述べ，将来の応用に備えようというものである。実際，いくつかの応用例も考えられているが，本稿の最後では，その一つを紹介する。

§1. $\mathbb{N}$ の ultrafilter

以下，$\mathbb{N}=\{1,2,3,\cdots\}$ とする。$\mathbb{N}$ の部分集合の族 $\mathcal{F}$ が，

filterであるとは，次の3つの条件を満たしている時である。
(i) $\phi \notin \mathcal{F}$ (ii) $A, B \in \mathcal{F}$ならば$A \cap B \in \mathcal{F}$ (iii) $A \in \mathcal{F}$, $A \subset B \subset \mathbb{N}$ならば$B \in \mathcal{F}$.

たとえば，$A \subset \mathbb{N}$に対して．$\mathcal{F}_A = \{B \subseteq \mathbb{N} \mid B \supset A\}$とおくと．$\mathcal{F}_A$はfilterである。このような形のfilterをprincipal filter，そうでないものをnon-principal filterと呼ぶ。また．$\mathcal{F} = \{A \subset \mathbb{N} \mid \mathbb{N} \setminus A$が有限$\}$とおくと，これもfilterである。この$\mathcal{F}$をFreché filterという。

$\mathbb{N}$のfilter $\mathcal{F}$が，filtersの集合の中で包含関係で極大の時，ultrafilterという。任意のfilterに対して，それを含むultrafilterが存在することは，Zornの補題から容易である．また次のLemmaも証明は易しい。

<u>Lemma</u> (1.1) filter $\mathcal{F}$について次は同値である．

(1) $\mathcal{F}$はultrafilter (2) $A \in \mathcal{F}$ならば．$\mathbb{N} - A \notin \mathcal{F}$が成立する．

(3) $A_1, \cdots, A_n \subset \mathbb{N}$に対して．もし$\bigcup_{i=1}^{n} A_i \in \mathcal{F} \Rightarrow$ある$A_i$は$\mathcal{F}$の元．

<u>Lemma</u> (1.2) ultrafilter $\mathcal{F}$について．次は同値である．

(1) $\mathcal{F}$はnon-principal (2) $\mathcal{F}$はFreché filterを含む．

とくに，(1.2)よりnon-principal ultrafilterは，必ず存在する。<u>以下の話では</u>，<u>non-principal ultrafilterを一つ取っておき</u>，<u>それを固定しておく</u>。また，それを$\mathcal{F}$と書くことにする。

<u>Notation</u> (1.3) $i \in N$を変数にもつ命題$p(i)$に対して．
$\{i \in N \mid p(i)$が成立する$\} \in \mathcal{F}$となるとき．$p(i)$は殆んど全てのiについて成立するということにする。記号として．

$p(i)$ for almost all i 又は略して．$p(i)$ for a.a. i

と書くことにする。この記号法は筆者の発明によるもので，他の文献には使われていないので注意してほしい。

§2. 環の超積．

可算個の環の族$\{R_i\}_{i \in N}$が与えられた時．R_iの超積$\prod_i^* R_i$は次のように定義される；

$$\prod_i^* R_i = \prod_i R_i / \sim$$

ここで，"$\sim$"は次で与えられる同値関係である。

$$(a_i)_{i \in N} \sim (b_i)_{i \in N} \overset{def.}{\Longleftrightarrow} a_i = b_i \text{ for a.a. } i.$$

"$\sim$"が実際に同値関係であることや，$\prod^* R_i$が再び環となることは容易に確められる。直積の元$(a_i)_{i \in N}$の$\prod^* R_i$におけるclassを$(a_i)^*$と書く。

<u>Example</u> (2.1) (1) $\{k_i\}$が体の族の時．$\prod^* k_i$も体である。

(2) $\{k_i\}$が体の族で，各素数pに対して．$ch(k_i) \neq p$ for a.a. i ならば，$ch(\prod^* k_i) = 0$

(Proof) (1)は容易なので略す．(2)もよく知られているし易しいが，

あとで使うので，証明しておく。もし $p=ch(\prod^* k_i)>0$ とすると，p は体 $\prod^* k_i$ の中で 0 である。定ぎにもどってこれをいいかえれば，$p=0$ in k_i for a.a. i となる。これは仮定に反する。■

以下では，local rings の族 $\{(R_i, m_i, k_i)\}_{i\in N}$ についてのみ考えることにする。このとき，$\prod^* R_i$ の subset m^* を，$m^* = \{(a_i)^* \in \prod^* R_i \mid a_i \in m_i \text{ for a.a. } i\}$ とおくと，すぐに分るように，m^* は $\prod^* R_i$ の ideal となる。また定義から $\prod^* R_i / m^* \cong \prod^* k_i$ である。m^* に属さない $\prod^* R_i$ の元は，unit であることが易しく分るから，結局次の Lemma を得る。

<u>Lemma</u> (2.2) $\prod^* R_i$ は，maximal ideal m^*，residue field $\prod^* k_i$ をもつ quasi-local ring である。

$\prod^* R_i$ について重要なことは次の事実である。

<u>Lemma</u> (2.3) [2 ; §1 (iii)] $\prod^* R_i$ は m^*-adically (non-separated) complete である。即ち，$a^{(j)} = (a_i^{(j)})_i^* \in \prod^* R_i$ に対して，$a^{(j+1)} \equiv a^{(j)} \pmod{m^{*j}}$ が全ての $j \in N$ について成りたつなら，$z \in \prod^* R_i$ が存在して，$z \equiv a^{(j)} \pmod{m^{*j}}$ for $\forall j \in N$

証明は，[2] を参照していただきたい。

§3. 局所環の分離超積

以下でも、引き続き $\{(R_i, m_i, k_i)\}_{i\in\mathbb{N}}$ を local rings の族とする。 R_i の分離超積 $\tilde{\prod} R_i$ を次のように定義する。

<u>Def.</u> (3.1) $\tilde{\prod} R_i := \prod R_i / \approx$

但し、$\approx$ は次によって与えられる $\prod R_i$ の元の間の同値関係である。

$(a_i)\approx(b_i) \iff$ 任意の $N>0$ に対して、$a_i - b_i \in m_i^N$ for a.a. i

この定義から分るように、$\tilde{\prod} R_i$ は $\prod^* R_i$ の m^*-adic での分離化となっている。即ち、

(3.2) $$\tilde{\prod} R_i = \prod{}^* R_i \Big/ \bigcap_{N=1}^{\infty} m^{*N}$$

直積 $\prod R_i$ の元 (a_i) が与える $\tilde{\prod} R_i$ の元を $(a_i)^\sim$ とかくことにする。 (2.3) と (3.2) の直接の結果として次を得る。

<u>Lemma</u> (3.3) $(\tilde{\prod} R_i, \tilde{m}, \prod^* k_i)$ は、$\tilde{m}$-adically separated and complete local ring である。但し、ここで、$\tilde{m} = m^*(\tilde{\prod} R_i)$ である。

$\tilde{\prod} R_i$ のネータ性を問題にすると次の定理を得る。

<u>Theorem</u> (3.4) 次は同値である。

(1) $\tilde{\prod} R_i$ は Noetherian

(2) $\exists r \in \mathbb{N}$ s.t. $\operatorname{emb} R_i \leq r$ for a.a. i

(3) $\exists r \in \mathbb{N}$ s.t. $\operatorname{emb} R_i = r$ for a.a. i

更に (3) が成立する時、$\operatorname{emb} \tilde{\prod} R_i = r$ となる。

(proof) (2) と (3) の同値性は、(1.1) より明らか。

(3)$\Rightarrow$(1) $\tilde{\prod} R_i$ が Noetherian を示すためには、(3.3) より、

$\tilde{m}$ が有限生成であればよい。仮定より，$A \in \mathcal{F}$ が存在して，
$i \in A$ ならば，$m_i = (x_i^{(1)}, \ldots, x_r^{(1)}) R_i$ とかける。$i \notin A$ ならば
$x_i^{(j)} = 0$ とおき，$x^{(j)} = (x_i^{(j)})_i^{\sim} \in \tilde{\prod} R_i \quad (j = 1 \cdots r)$ とする。定義より，$\tilde{m} = (x^{(1)}, \ldots, x^{(r)}) \cdot \tilde{\prod} R_i$ が直ちに分る。
(1) $\Rightarrow$ (2) も同様．■

次に，$\tilde{\prod} R_i$ が Noetherian となる時，その次元について考えてみよう。そのために，

<u>Def</u> (3.5) $\{R_i\}$ が good family of local rings of dim. d．
とは， i) $\exists r \in \mathbb{N}$ s.t. $\mathrm{emb}\, R_i \leq r$ for a.a. i.
ii) $\dim R_i = d$ for a.a. i
iii) $\exists s \in \mathbb{N}$ s.t. $\mu(R_i) \leq s$ for a.a. i.

但し，local ring (R, m) に対して，$\mu(R) = \inf\{n \mid m^n$ が R のある parameter ideal に含まれる.$\}$ とおく．

$\{R_i\}$ が good family なら，(3.4) より $\tilde{\prod} R_i$ も Noetherian local ring となるが，その次元についても この場合は分る。

<u>Proposition</u> (3.6) $\{R_i\}$ が good family of local rings of dim. d ならば，$\dim(\tilde{\prod} R_i) = d$．

(proof) 仮定より $\exists A \in \mathcal{F}$ s.t. $\mathrm{emb}\, R_i \leq r$, $\dim R_i = d$ & $\mu(R_i) \leq s$ for $\forall i \in A$．そこで，$\underbrace{R_i \text{ の}}_{i \in A \text{の時}}$ s.o.p. $\{x_i^{(1)}, \ldots, x_i^{(d)}\}$ を $m_i^s \subseteq (x_i^{(1)}, \ldots, x_i^{(d)}) R_i$ となるように選んでおく。$i \notin A$ ならば，$x_i^{(j)} = 0$ として，$x^{(j)} = (x_i^{(j)})_i^{\sim} \quad (j = 1, \cdots, d)$ とおく。

定義より $\tilde{m}^s \subset (x^{(1)}, \dots, x^{(d)})\tilde{\prod}R_i$ となるので $\dim(\tilde{\prod}R_i) \leq d$ を得る。次に $z^{(1)}, \dots, z^{(t)} \in \tilde{m}$ について
$\tilde{m}^n \subseteq (z^{(1)}, \dots, z^{(t)})\tilde{\prod}R_i$ for some $n > 0$ が成立するとする。$t \geq d$ が示せれば、これより $\dim(\tilde{\prod}R_i) \geq d$ が得られる。

(3.2) より
$$(m^*)^n \subseteq (z^{(1)}, \dots, z^{(t)})\prod{}^* R_i + \bigcap_{\nu \geq 0}(m^*)^\nu$$
$$\subseteq (z^{(1)}, \dots, z^{(t)})\prod{}^* R_i + (m^*)^{n+1}$$

したがって $m_i^n \subset (z_i^{(1)}, \dots, z_i^{(t)})R_i + m_i^{n+1}$ for a.a.i.

$\therefore$ $m_i^n \subset (z_i^{(1)}, \dots, z_i^{(t)})R_i$ for a.a.i.

これより $\dim R_i \leq t$ for a.a.i. よって $t \geq d$ を得る。▨

(3.4) (3.6) を合わせて、次を得る。

<u>Corollary</u> (3.7) $\{R_i\}$ が good family of <u>regular</u> local rings of dim. d ならば、$\tilde{\prod}R_i$ も <u>regular</u> local ring of dim. d である。

<u>Example</u> (3.8) $R_i = k_i[X_1, \dots, X_n]_{(X_1, \dots, X_n)}$ （k_i：体）
とすると、$\tilde{\prod}R_i \cong (\prod{}^* k_i)[[X_1, \dots, X_n]]$

<u>Notation</u> (3.9) $R = R_i$ for $\forall i \in N$ の時、$\tilde{\prod}R_i$ を $\tilde{R}$ とかくことにする。$\tilde{R}$ を R の分離超巾と呼ぶ。
natural map $R \to \tilde{R}$ が $x \mapsto (x)_i^\sim$ によって定義され
$\tilde{m} = m\tilde{R}$, $\tilde{R}/\tilde{m} = (R/m)^*$（超巾）等が成立することは、定義より明らかである。

次の定理が成立する。

<u>Theorem</u> (3.10)　(R, m, k) を local ring とする。

(1) R の ideal の降鎖列 $I_1 \supset I_2 \supset I_3 \supset \cdots$ に対して次は同値.

(i) $\bigcap_{i=1}^{\infty} I_i \hat{R} = (0)$　　(ii) $\tilde{R} \xrightarrow{\sim} \widetilde{\prod_i}(R/I_i)$: 同型.

(2) $\tilde{R} = \widetilde{\prod}(R/m^i)$

(3) $\tilde{R} = \widetilde{R^h} = \tilde{\hat{R}}$

(proof) (1)(i)⇒(ii)　各 projection $p_i : R \to R/I_i$ より 自然な ring homom. $\tilde{p} : \tilde{R} \to \widetilde{\prod} R/I_i$ が得られる。$\tilde{p}$ は明らかに、いつでも surjective である。injective をいうために、$(x_i)^\sim \in \tilde{R}$ に対して、$\tilde{p}((x_i)^\sim) = 0$ とする。定義より、これは、次のことを意味する。

$\forall n > 0$ に対して、　$x_i \in I_i + m^n$ for a. a. i.

$\bigcap_{i=1}^{\infty} I_i \hat{R} = (0)$ より、i が十分大きい時、$I_i \subset m^n$ となるので、上のことから、$x_i \in m^n$ for a. a. i.　$\tilde{R}$ の定義より これは、$(x_i)^\sim = 0$ を示す。

(2) は (1)(i)⇒(ii) より 明らか. また、(3) は (2) と $R/m^i = R^h/{m^h}^i = \hat{R}/\hat{m}^i$ より 明白である。

(1) (ii)⇒(i)　$\bigcap_i I_i \hat{R} \neq 0$ として矛盾を導こう。$x \neq 0$ を $\bigcap_i I_i \hat{R}$ から取る。この時、natural map $\tilde{\hat{p}} : \tilde{\hat{R}} \to \widetilde{\prod} \hat{R}/I_i\hat{R}$ によって、$(x)^\sim$ は 0 へ移るが、一方 $(x)^\sim \neq 0$ だから、$\tilde{\hat{p}}$ は injective でない。したがって、右図で φ が injective なことが分れば、よい。

$$\begin{tikzcd}
\widetilde{\prod}(\hat{R}/I_i\hat{R}) & \tilde{\hat{R}} \arrow[l, "\tilde{\hat{p}}"'] \\
\widetilde{\prod}(R/I_i) \arrow[u, "\varphi"] & \tilde{R} \arrow[l, "\tilde{p}"'] \arrow[u, "\cong"', "\text{(3)より同型}"]
\end{tikzcd}$$

そこで，$x_i \in R$ $(i \in \mathbb{N})$ に対して $\varphi((x_i \bmod I_i)^\sim) = 0$ とする。定義より $\forall n > 0$ に対して $x_i \in (I_i\hat{R} + \hat{m}^n) \cap R$ for a.a.i. よって このnに対して $x_i \in I_i + m^n$ for a.a.i. 再び定義より $(x_i \bmod I_i)^\sim = 0$. かくして φ は injective である。▨

Remark (3.10) より 任意の local ring の分離超巾は，Artinian local rings の分離超積となっていることが分る。したがって $\{R_i\}$ が good family でない時には，たとえ $d = \dim R_i$ for all i であったにしても，$\dim(\tilde{\prod} R_i) = d$ となるとは限らないことを注意しておく。

§4. 局所環上の加群の分離超積

以下でも $\{(R_i, m_i, k_i)\}$ は local rings の族とする。各 i について M_i が R_i-module である時，M_i の超積 $\prod^* M_i$ が環の場合と同じようにして定義できる。即ち，

$$\prod{}^* M_i = \prod_i M_i / \sim$$

但し，$(x_i) \sim (y_i) \iff x_i = y_i$ for a.a.i.

明らかに $\prod^* M_i$ は $\prod^* R_i$-module となる。また，(2.3) と全く同じ証明によって次を得る。

Lemma (4.1) $\prod^* M_i$ は m^*-adically (non-separated) complete である。

$\varphi_i : M_i' \to M_i$ が R_i-module homomorphism であるとき、自然な方法で $\prod^* \varphi_i : \prod^* M_i' \to \prod^* M_i$ $\prod^* R_i$-module homom. が定義される。即ち、$(\prod^* \varphi_i)\cdot(x_i')^* = (\varphi_i(x_i'))^*$.

次の Lemma は、定義より直ちに分る。

<u>Lemma</u> (4.2) 任意 $i \in \mathbb{N}$ について、$0 \to M_i' \to M_i \to M_i'' \to 0$ が R_i-module の exact sequence であるとき、

$$0 \to \prod^* M_i' \to \prod^* M_i \to \prod^* M_i'' \to 0$$

は、$\prod^* R_i$-module の exact sequence である。

さて、いよいよ modules の分離超積を定義しよう。

<u>Definition</u> (4.3) $\widetilde{\prod} M_i := \prod_i M_i / \approx$

但し、ここで、$(x_i) \approx (y_i) \iff \forall N > 0$ に対して $x_i - y_i \in m_i^N M_i$ for a.a.

この定義から明らかなように、$\widetilde{\prod} M_i$ は $\prod^* M_i$ の m^*-adic での分離化となっている。即ち、

(4.4) $$\widetilde{\prod} M_i = \prod^* M_i \Big/ \bigcap_{N \geq 0} m^{*N} \prod^* M_i$$

これと (4.1) を合わせて、

<u>Corollary</u> (4.5) $\widetilde{\prod} M_i$ はいつも $\widetilde{m}$-adically separated and complete $\widetilde{\prod} R_i$-module である。

<u>Remark</u> (4.6) 各 $i \in \mathbb{N}$ に対して、$f_i : S_i \to R_i$ が、local rings の local homom. で、M_i が R_i-module の時、M_i の R_i-mod. としての分離超積と、S_i-mod. としての分離超積は、一般的に異なるものであることに注意せよ。但し、f_i が全ての i について

surjectionの場合には，両者は一致する。

次に我々は，分離超積についても (4.2)のようなexactness criterionがある条件のもとで成立することを示したい。そのために，

<u>Notation</u> $N \subset M$ が R-modules の時，

$$\alpha_R(M, N) := \inf \left\{ r \in \mathbb{N} \;\middle|\; \begin{array}{l} m^n M \cap N = m^{n-r}(m^r M \cap N) \\ \text{for any } n \geqq r \end{array} \right\}$$

と置き，$N \subset M$ の Artin-Rees number と呼ぶことにする。

<u>Lemma</u> (4.7) 全ての $i \in \mathbb{N}$ に対して，$N_i \subset M_i$ が R_i-modules であり，更に integer $r \in \mathbb{N}$ があって，

$$\alpha_{R_i}(M_i, N_i) \leqq r \quad \text{for a.a. } i$$

が成立するものとする。この時，$\alpha_{\Pi^* R_i}(\Pi^* M_i, \Pi^* N_i) \leqq r$ となる。

即ち，$(m^*)^n(\Pi^* M_i) \cap (\Pi^* N_i) = (m^*)^{n-r}\left((m^*)^r(\Pi^* M_i) \cap (\Pi^* N_i)\right)$

が全ての $n \geqq r$ について成立する。

(証明は定義にもどれば自明である。)

<u>Theorem</u> (4.8) 全ての $i \in \mathbb{N}$ について，

$$0 \to M_i' \xrightarrow[\psi_i]{} M_i \xrightarrow[\varphi_i]{} M_i'' \to 0$$

が R_i-modules の exact sequence であり，更に，$r \in \mathbb{N}$ があって，

$\alpha_{R_i}(M_i, M_i') \leqq r$ for a.a. i が成立するものとする。

この時，

$$0 \to \tilde{\Pi} M_i' \xrightarrow[\tilde{\psi}]{} \tilde{\Pi} M_i \xrightarrow[\tilde{\varphi}]{} \Pi M_i'' \to 0$$

は，$\tilde{\Pi} R_i$-modules の exact sequence である。

(proof) $\tilde{\varphi}\circ\tilde{\psi}=0$ 及び $\tilde{\varphi}$ が surjective なことは明らか。

$\tilde{\psi}$ が injective であること：　$(x_i')^{\sim}\in\tilde{\prod}M_i'$ に対して $\tilde{\psi}((x_i')^{\sim})=0$

とする。即ち $(\psi_i(x_i'))^*\in\bigcap_{n=1}^{\infty}(m^*)^n(\prod^*M_i)$ よって (4.7) より、

$\forall n\geqq r$ に対して、

$\psi^*((x_i')^*)=(\psi_i(x_i'))^*\in(m^*)^n(\prod^*M_i)\cap\psi^*(\prod^*M_i')\subseteq(m^*)^{n-r}\cdot\psi^*(\prod^*M_i')$

ψ^* は injective であったから、$(x_i')^*\in(m^*)^{n-r}(\prod^*M_i')$，これが

任意の $n\geqq r$ について成立するのだから (4.4) より $(x_i')^{\sim}=0$

次に、$x=(x_i)^{\sim}\in\tilde{\prod}M_i$ に対して、$\tilde{\varphi}(x)=0$ ならば、$x\in\operatorname{Im}\tilde{\psi}$ なる

ことを示そう。このとき、$z=(x_i)^*\in\prod^*M_i$ とおくと (4.2) より

$$z\in\bigcap_{n=1}^{\infty}\left[\psi^*(\prod^*M_i')+(m^*)^n\cdot\prod^*M_i\right]$$

となる。そこで各 $n\in\mathbb{N}$ に対して、$\exists y^{(n)}\in\psi^*(\prod^*M_i')$ s.t.

$$z-y^{(n)}\in(m^*)^n(\prod^*M_i)$$

このとき、$m>n$ ならば、$y^{(n)}-y^{(m)}=(z-y^{(m)})-(z-y^{(n)})\in(m^*)^n(\prod^*M_i)$

よって (4.7) より、$y^{(n)}-y^{(m)}\in(m^*)^{n-r}\cdot\psi^*(\prod^*M_i')$ for $\forall m>n\geqq r$

となる。$\psi^*(\prod^*M_i')\cong\prod^*M_i'$ は (4.5) より m^*-adically

separated and complete だから、$\exists y\in\psi^*(\prod^*M_i')$ s.t.

$\{y^{(n)}\}$ は y に収束する。この時、$\forall\nu>0$ に対して、$\exists n>0$ s.t.

$$z-y=(z-y^{(n)})-(y-y^{(n)})\in(m^*)^{\nu}(\prod^*M_i)$$

これが $\forall\nu>0$ について言えるから、$x=\tilde{y}$ in $\tilde{\prod}M_i$．(但し

$\tilde{y}$ は y の $\tilde{\prod}M_i$ における image.) ここで、$y\in\psi^*(\prod^*M_i')$ だったから、

$\tilde{y}\in\tilde{\psi}(\tilde{\prod}M_i')$　以上より、$x\in\tilde{\psi}(\tilde{\prod}M_i')$ を得た。■

Theorem (4.8) の応用は広い。例えば，(3.10)(3) を拡張して次を得る。

Corollary (4.9) $\widetilde{\prod} R_i \cong \widetilde{\prod}(R_i^h) \cong \widetilde{\prod} \widehat{R_i}$

(proof) R_i-module の exact sequence $0 \to R_i \to \widehat{R_i} \to \widehat{R_i}/R_i \to 0$ において．$d_{R_i}(\widehat{R_i}, R_i) = 0$ だから．(4.8) より．

$0 \to \widetilde{\prod} R_i \to \widetilde{\prod} \widehat{R_i} \to \widetilde{\prod}\left(\widehat{R_i}/R_i\right) \to 0$ は exact．（$\widehat{m}_i = m_i \widehat{R_i}$ であるため，R_i-mod. としての $\widetilde{\prod} \widehat{R_i}$ と $\widehat{R_i}$-mod. としての $\widetilde{\prod} \widehat{R_i}$ は一致することに注意せよ。）したがって．$\widetilde{\prod}\left(\widehat{R_i}/R_i\right) = 0$ をいえばよい。ところが．$\forall x_i \in \widehat{R_i}$ に対して．$x_i \in R_i + m_i^n \widehat{R_i}$ が $\forall n$ について成りたつから．$(x_i \bmod R_i)^\sim = 0$ ▨

Corollary (4.10) R を local ring とする。$\widehat{R} = S/I$（但し．S は regular local ring）と書いておく。このとき．

$$\widetilde{\widehat{R}} = \widetilde{S}/I \cdot \widetilde{S}$$

が成立する。（(3.7) より $\widetilde{S}$ も regular であることに注意）

(proof) $\widetilde{R} = \widetilde{\widehat{R}}$ ((3.10) or (4.9)) だから．始めから．$R = S/I$ としてよい。S-module の exact seq. $0 \to I \to S \to R \to 0$ と (4.8) より，$0 \to \widetilde{I} \to \widetilde{S} \to \widetilde{R} \to 0$ exact.

最後に $\widetilde{I} = I \cdot \widetilde{S}$ をいえばよい。$I \cdot \widetilde{S} \subset \widetilde{I}$ は明らか。

$\widetilde{I} \subset I \cdot \widetilde{S}$ を示すために．$I = (f^{(1)} \ldots f^{(\ell)})S$ とおく。$\forall (x_i)^* \in I^*$ は，$x_i = \sum_{j=1}^{\ell} a_i^{(j)} f^{(j)}$ $(a_i^{(j)} \in S)$ とかけるから．$(x_i)^* = \sum (a_i^{(j)})^* (f^{(j)})^* \in I \cdot S^*$．$\therefore (x_i)^\sim \in I \cdot \widetilde{S}$ ▨

<u>Corollary</u> (4.11)　R を local ring, $\hat{R}$ が係数体 k をもつとする。この時, $\tilde{R} \cong \hat{R} \hat{\otimes}_k k^*$.

(proof)　$\hat{R} = k[\![x_1 \cdots x_n]\!]/I$ とかける。$\widetilde{k[\![x_1 \cdots x_n]\!]} = k^*[\![x_1 \cdots x_n]\!]$ (c.f. (3.8)) だから. (4.10) より　$\tilde{R} = \tilde{\hat{R}} = k^*[\![x_1 \cdots x_n]\!]/I \cdot k^*[\![x_1 \cdots x_n]\!]$ $= \hat{R} \hat{\otimes}_k k^*$ ▨

(4.11) より R が体を含む local ring の時, $\tilde{R}$ は R 上 faithfully flat となる。このことは一般に言える。

<u>Theorem</u> (4.12)　R が local ring の時, $R \to \tilde{R}$ は, faithfully flat である。

証明のために.

<u>Lemma</u> (4.13)　M が有限生成 R-module なら. $\tilde{M} = M \otimes_R \tilde{R}$.

(proof)　(4.8) より $\sim$ は exact functor である。また, $\otimes_R \tilde{R}$ は right exact であるから. M が有限生成 free module のときを考えればよい。しかし, この時. Lemma は明らか。▨

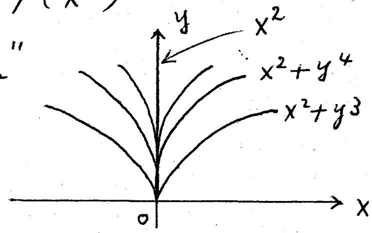
[(4.12) の証明]　(4.13) より functor $\otimes_R \tilde{R}$ は, $\sim$ と equivalent ところが, (4.8) より, $\sim$ は exact 故, $\otimes_R \tilde{R}$ も exact functor. よって. $\tilde{R}$ は R 上 flat である。▨

<u>Example</u> (4.14)　$R_i = k_i[\![x, y]\!]/(x^2 + y^i)$ ($i \in \mathbb{N}$, k_i は体) とする。このとき.

$$\widetilde{\prod} R_i = (\prod^* k_i)[\![x, y]\!]/(x^2)$$

となる。実際, $S_i = k_i[\![x, y]\!]$ とおくと. (3.8) より

$\widetilde{\prod} S_i = (\prod^* k_i)[[X, Y]]$。 ideal $I_i = (X^2+Y^i)S_i$ について.
$\alpha_{S_i}(S_i, I_i) = 2$ for $\forall i \in \mathbb{N}$ が分るから. (4.8) より
$0 \to \widetilde{\prod} I_i \to \widetilde{\prod} S_i \to \widetilde{\prod} R_i \to 0$ は exact. ここで, $\widetilde{\prod} I_i$ は, 定義より, $(X^2+Y^i)^\sim = (X^2)^\sim + (Y^i)^\sim \in \widetilde{\prod} S_i$ で生成される。ところで, $(Y^i)^\sim \in \bigcap_{n\geq 0} \widetilde{m}_S^n$ だから. 結局, $\widetilde{\prod} I_i = X^2 \cdot \widetilde{\prod} S_i$ を得る。 よって. $\widetilde{\prod} R_i = (\prod^* k_i)[[X, Y]]/(X^2)$



右図のように, X^2 は X^2+Y^i の"極限"となっている。一般の場合にも. これは. 正しい。即ち. 係数体の拡大を無視すれば, $\widetilde{\prod} R_i$ は. $\{R_i\}$ の"素朴な意味での極限"である。

また, 上の例で, $0 \to R_i \xrightarrow{X} R_i$ はすべての $i \in \mathbb{N}$ に対して exact であるが, $0 \to \widetilde{\prod} R_i \xrightarrow{X} \widetilde{\prod} R_i$ は not exact. 即ち. (4.8) において. その仮定は必要である。

§5 Homological problem への応用.

今までの分離超積の理論の応用として. ある種の homological problem を考えてみよう。 そのために,

<u>Definition</u> (5.1) 方程式系 $\{F_i(\underline{X}, \underline{Y}) = 0\}$ (但し. $F_i(\underline{X}, \underline{Y}) \in \mathbb{Z}[X_1, \dots, X_n, Y_1, \dots, Y_m]$) が local ring R の中に Hochster の意味で解をもつ (略して, "H-解をもつ"ということにする) とは, 1) $\dim R = n$ 2) R の s.o.p. $\{x_1, \dots, x_n\}$

と R の元の列 $\{y_1, \dots, y_m\}$ が存在して $F_i(x_1 \cdots x_n, y_1 \cdots y_m) = 0$.

M. Hochster は次の定理を示すことによって、体を含む local ring についての homological conjectures を解決した。([4]) 即ち

<u>Theorem</u> (5.2)([4]) $\{F_i\} \subseteq \mathbb{Z}[X_1, \dots, X_n, Y_1, \dots, Y_m]$ が正標数の体上 essentially of finite type の local domain に H-解をもたないならば、$\mathbb{Q}$ を含む任意の local ring に H-解をもたない。

残された問題は、unequal characteristic local ring について、どの程度のことが言えるかということであるが、我々は分離超積を使って次の事を示すことができる。

<u>Theorem</u> (5.3) $\{F_i\} \subseteq \mathbb{Z}[X_1, \dots, X_n, Y_1, \dots, Y_m]$ が $\mathbb{Q}$ を含む local ring には、H-解をもたないとする。このとき、任意の $r, s \in \mathbb{N}$ に対して、$p = p(F_i, r, s) \in \mathbb{N}$ が存在して、次が成立する。"(R, m) が local ring で、$\mathrm{emb}\, R \leq r$, $\mu(R) \leqq s$ かつ $\mathrm{ch}(R/m) \geqq p$ ならば、$\{F_i\}$ は R の中には、H-解をもたない。

(proof) 集合 $\{ \mathrm{ch}(R/m) \mid (R, m)$ は local ring で、$\{F_i\}$ は R に H-解をもつ、更に、$\mathrm{emb}(R) \leq r$, $\mu(R) \leq s \}$ が、有限集合であることを示せばよい。そこで、無限集合と仮定すると、次のような可算個の local rings の族 $\{R_i\}_{i \in \mathbb{N}}$ が得られる。

1) $\dim R_i = n$ for $\forall i \in \mathbb{N}$ 2) $\mathrm{emb}\, R_i \leq r$ for $\forall i \in \mathbb{N}$

3) $\mu(R_i) \leq s$ for $\forall i \in N$. 4) $\{F_j\}$ は全ての R_i に H-解をもつ.

5) $ch(k_i) \neq ch(k_j)$ if $i \neq j$ (但し k_i は R_i の residue field)

1) 2) 3) より $\{R_i\}$ は good family of local rings of dim. n である。そこで, $R = \widetilde{\prod} R_i$ とおくと. (3.6) より R は n 次元 local ring である。又, (4) と (3.6) の証明から $\{F_j\}$ がこの R に H-解をもつことが容易に分る。一方, R の residue field は $\prod^* k_i$ であり, これは (2.1) より標数 0 の体である。したがって R は標数 0 の local ring であり. 定理の仮定に反する。■

REFERENCES

[1] 斉藤正彦：超積と超準解析 ノンスタンダード・アナリシス 東京図書.

[2] J.Becker,J.Denef,L.Lipschitz,and L.van den Dries: Ultraproducts and Approximation in Local Rings I, Inventiones math.51,189-203(1979).

[3] Cristiana Mateescu, Dorin Popescu: Ultraproducts and big Cohen-Macaulay modules (preprint).

[4] M.Hochster: Topics in the homological theory of modules over commutative rings, C.B.M.S.Reg.Conf.Series in Math.,No24, Amer.Math.Soc.,Providence, R.I.(1975).