数理解析研究所講究録
第544巻 1985年 126-131

Hankel作用素とordered group上のHardy空間

北大教養　中路貴彦（Takahiko Nakazi）

抽象的Hardy空間で定義されるcompact Hankel作用素を調べる。それはalmost periodic functionのHardy空間でcompact Hankel作用素は零しかないという新しい結果を与える。

Hankel-type作用素。Aをcompact Hausdorff空間X上の関数環とする。X上の連続関数全体のなす関数環をC(X)と書く。$\varphi \in C(X)$について、$S_\varphi f = \varphi f + A$，$f \in A$はHankel-type作用素と呼ばれる。全ての$\varphi \in C(X)$について、$S_\varphi$が弱compactのとき、Aはtightであるという。ColeとGamelin［1］はtightである関数環を研究した。disc環はtightであるがbig disc環はtightではない。

Big disc環。disc環とは単位円周T上で、z^n（$n>0$）と1で生成される関数環である。big disc環とはT×T上

で、$z^n w^m$ ($n\alpha + m\beta > 0$) と 1 で生成される関数環である。ここで β/α は無理数とする。disc 環で成り立つ多くの重要な結果が、big disc 環では成立しないかまたは形を変えて成立しても新しいアイデアなしにはその結果を得られないとい意味で、big disc 環は興味ある.

<u>Hankel 作用素</u> 。 τ_0 を関数環 A 上の乗法的線形汎関数とし、m を τ_0 の表現測度とする。$\varphi \in L^\infty(m)$ について、Hankel 作用素 H_φ を

$$H_\varphi f = \varphi f + H^2(m) \quad , \quad f \in H^2(m)$$

で定義する。ここで抽象的 Hardy 空間 $H^2(m)$ は A の $L^2(m)$ での閉包である。A が disc 環で m が正規 Lebesgue 測度のとき、$H^2(m)$ は Hardy 空間であり H_φ は古典的 Hankel 作用素である。このとき、H_φ が compact である必要十分条件は $\varphi \in H^\infty(m) + C(X)$ となる。これは Hartman (1958年) の定理である。A が big disc 環のときはどうかという問は自然であるが、次の定理は H_φ が compact である必要十分条件は $\varphi \in H^\infty(m)$ を示している。これは disc 環のときと著しく異る。定理は筆者が Iowa 大学を訪問した時に、Curto、Muhly、Xia 氏と共同研究したもので、[2] に詳しく述べられている。

$\boxed{\text{定理}}$ m が τ_0 の一意な表現測度のときに、compact Hankel 作用素は零だけである必要十分条件は τ_0 の Gleason part は τ_0 だけであることである。

<u>証明について</u>. $B=\{\varphi\in L^\infty(m) : H_\varphi \text{ は compact}\}$ とすると、B は $L^\infty(m)$ の一様ノルム閉部分環で $H^\infty(m)$ を含む。$B=H^\infty(m)$ となることは compact Hankel 作用素は零だけと同じことである。$g\in H^\infty(m)$ を定数ではない unimodular 関数として、$[H^\infty(m), \bar{g}]$ を $H^\infty(m)$ と $\bar{g}$ で生成される一様ノルム閉部分環とすると、

$$B\subset [H^\infty(m), \bar{g}]$$

となる。この段階で、disc 環の場合の $B=H^\infty(m)+C(X)$ は $g=z$ として簡単に得られる。τ_0 の Gleason part が τ_0 だけであるとして、$B=H^\infty(m)$ を示したい。$H^\infty(m)$ が $L^\infty(m)$ で極大な $*$弱閉部分環とする。big disc 環 はこの場合である。このとき、

ψ、$\bar{\psi}\in B$ かつ $|\psi|=1$ ならば、$\|\psi+H^\infty(m)\|<1$ を示すことができる。これは disc 環では決して起らない現象である。何故なら $\psi=\bar{z}$ としてみると、$\|\bar{z}+H^\infty(m)\|=1$ となるからである。上の現象は $g\in H^\infty(m)$ を定数では unimodular 関数とすると、不変部分空間 $gH^2(m)$ は $H^2(m)$

で infinit codimension をもつということから生じる。上の現象より $B = H^\infty(m)$ が導びかれる。$H^\infty(m)$ が $L^\infty(m)$ の極大な＊弱閉部分環とならないとき、上の結果と Kallenborn と König の結果を使って示すことができる。König 等の結果とは、D を $L^\infty(m)$ の任意の $H^\infty(m)$ を含む＊弱閉部分環とすると、$L^\infty(m)$ から $D \cap \bar{D}$ への conditional expectation は D 上で乗法的になるというもので、これは［ 4 ］で筆者によって残された問題に答えている。

<u>Bounded analytic almost periodic function</u> 。Γ を実数 R の subgroup として、離散的位相を入れる。$f(z) = \sum c_j e^{i t_j z}$ （ $0 < t_j \in \Gamma$ ）とすると、f は上半平面で bounded analytic (almost) periodic function となる。Γ が整数 Z のとき、f は periodic になる。G を Γ の compact dual group とする。Γ が R で普通の位相で非稠密なとき、$\Gamma \cong Z$ かつ $G \cong T$ となる。Γ が R で稠密なとき、G は R の compactification となる。bounded analytic (almost) periodic function を G 上でとらえるために、$F = \sum c_a \chi_a$ （ $0 \leq a \in \Gamma$ ）を考える。ここで χ_a は G 上の character である。Γ が R で稠密なとき、F を R に制限して、上半平面に拡大すると、bounded almost periodic function が得られる。$A(G)$ を

上の形のFのG上での一様ノルム閉包とすると、関数環となる。big disc環では、(n, m) を $n\alpha + m\beta$ へ写す $\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}$ から $\mathbb{R}$ の subgroup への order preserving isomorphism があるので、A(G)の一つのタイプである。

<u>Ordered group</u>。Γを任意の離散 abelian group、Gをその compact dual group とする。Γ_+ をΓに含まれる semigroupで、$\Gamma_+ \cup (-\Gamma_+) = \Gamma$ かつ $\Gamma_+ \cap (-\Gamma_+) = \{0\}$ とすると、Γ_+ はΓに order を入れ、Γは ordered group と呼ばれる。$A(G) = \{ f \in C(G) : \hat{f}(\gamma) = 0 \quad \gamma < 0\}$ とすると、A(G)はG上の関数環となる。almost periodic function の所で現われたA(G)はΓが $\mathbb{R}$ の subgroup という特殊なときである。σをG上の Haar測度とすると、σは τ_0 の一意な表現測度となる。ここで $\tau_0(f) = \hat{f}(0)$ $f \in A(G)$ とする。Cole と Gamelin [1] はA(G)が tight である必要十分条件はΓが $\mathbb{Z}$ であることを示した。上の定理は、零でない compact Hankel 作用素が存在する必要十分条件はΓの中に最小の positive な元が存在することであると云っている。

<u>付則</u>。$H^\infty(d\theta)$ を bounded analytic function のT上

境界値とする。これは disc 環 A の $L^\infty(d\theta)$ での＊弱閉包と一致する。$H^\infty(d\theta)$ の極大イデアル空間は単位円板を１つの Gleason part として含む。しかしそれ以外にも、多くの極大イデアル空間の点 τ_0 が存在する。τ_0 の表現測度は一意であるから上の定理が適用できる。筆者と Curto, Muhly 氏は更に多変数の Hankel 作用素を調べた。それは［３］に詳しく書かれている。

参考文献

1. B. Cole and T. Gamelin, Tight uniform algebras and algebras of analytic functions, J. Functional Analysis 46 (1982), 158-220.
2. R. Curto, P. Muhly, T. Nakazi and J. Xia, Hankel operators and uniform Algebras, to appear in Archiv Der Math..
3. R. Curto, P. Muhly and T. Nakazi, Uniform algebras, Hankel operators and invariant subspaces, to appear in IX Conference in Operator Theory.
4. R. Kallenborn and H. König, An invariant subspace theorem in the abstract Hardy algebra theory, Arch. Der Math. 39 (1982), 51-58.