数理解析研究所講究録
第 546 巻 1985 年 17-23

アイゼンスタイン級数のフーリエ係数について

名大理　北岡良之(Yoshiyuki Kitaoka)

Sp_n のアイゼンスタイン級数 $\sum \det(CZ+D)^{-k}$, 及び $\sum|\det(CZ+D)|^{-\alpha}|\det(C\bar{Z}+D)|^{-\beta}$ (k, $\alpha-\beta$ は偶数) のフーリエ係数に次の様なDirichlet 級数があらわれる:

$$b(s,T)=\sum_{R} \nu(R)^{-s}e(\sigma(TR))$$

ここで $T^{(n)}$ は half-integral な対称行列, $R^{(n)}$ は対称行列でその要素は $\mathbb{Q}/\mathbb{Z}$ を動き $\nu(R)$ は R の単因子の分母の積である. σ は行列の跡であり $e(x)=\exp(2\pi i x)$ とする. holomorphic の場合のフーリエ係数は簡単な項を除いて $b(k,-T)$, real analytic の時は $b(\alpha+\beta,T)$ と一般化された合流型超幾何関数があらわれる。

ここで上の $b(s,T)$ に於て $\nu(R)$ を素数 p の巾に限って R を動かしたものを $b_p(s,T)$ とすると容易にわかる様に

$$b(s,T)=\prod_{p} b_p(s,T)$$

となる. ここでの目的は $b_p(s,T)$ をより見易い形にすることである. $n=1$ の時は古典的であり $n=2$ の時も Kaufhold により

十分に調べられている。まず結果を列挙しよう。

Th 1. $T^{(n)} = \begin{pmatrix} T_1^{(n-1)} & \begin{matrix}0\\ \vdots\end{matrix} \\ 0\cdots & 0 \end{pmatrix}$ を half-integral な行列とすると

$$b_p(s,T) = (1-p^{-s})(1+p^{1-s})(1-p^{n+1-2s})^{-1}\, b_p(s-1,T_1).$$

これによってTは regular の場合に帰着される.

Th 2. $T^{(n)}$ を half-integral で $|T|\neq 0$ とすると

$$b_p(s,T)=\sum_{G} (p^{\mathrm{ord}_p \det G})^{n+1-2s}\, a(-T[G^{-1}],s)$$

となる. ここで G は $GL_n(\mathbb{Z}_p)\backslash\{GL_n(\mathbb{Q}_p)\cap M_n(\mathbb{Z}_p)\}$ の代表を走る

又 $a(T,s)$ は T が half-integral でなければ 0 とし, 従って上の和は有限和となる, T が half-integral の時は次の様に定義する.

有限体 $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ 上 n 次元のベクトル空間 $N=\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}[v_1,\cdots,v_n]$ に $Q(\sum x_i v_i) = T\left[\begin{smallmatrix}x_1\\ \vdots\\ x_n\end{smallmatrix}\right]$ で2次形式を定義する. N_2 を N の max. totally singular subspace とし $N=N_1\perp N_2$ と直交分解する. $d=\dim N_1$ とし

$$\varepsilon=\begin{cases} 1 & d=0 \text{ or } N_1\cong \mathrm{diag}\left(\begin{pmatrix}0&1\\1&0\end{pmatrix},\cdots,\begin{pmatrix}0&1\\1&0\end{pmatrix}\right), \\ -1 & \text{otherwise}\end{cases}$$

とおくとき

$$a(T,s)=(1-p^{-s})\begin{cases}(1+\varepsilon p^{n-d/2-s})\prod\limits_{1\le i\le n-d/2-1}(1-p^{2i-2s}) & 2\mid d,\\ \prod\limits_{1\le i\le n-(d+1)/2}(1-p^{2i-2s}) & 2\nmid d.\end{cases}$$

Cor. $b_p(s,0^{(n)})=(1-p^{-s})\prod\limits_{1\le k\le [n/2]}(1-p^{2k-2s})\Big\{(1-p^{n-s})\prod\limits_{\substack{n+1\le j<2n\\ 2\nmid j}}(1-p^{j-2s})\Big\}^{-1}.$

以下 $T^{(n)} = \begin{pmatrix} T_1^{(n-r)} & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ $|T_1| \neq 0$, $0 \le r < n$ とする。

- $p \nmid |2T_1| \Rightarrow b_p(s,T) = (1-p^{-s}) \prod_{1\le j\le[n/2]} (1-p^{2j-2s}) \prod_{\substack{n+1\le k\le n+r \\ 2\nmid k}} (1-p^{k-2s})^{-1} \cdot$

$$\begin{cases} (1-\varepsilon(T_1)p^{(n+r)/2-s})^{-1} & 2\mid n-r, \\ 1 & 2\nmid n-r, \end{cases}$$

ここで $\varepsilon(T_1) = \left(\dfrac{(-1)^{(n-r)/2}|2T_1|}{p}\right)$ とする。

- $2\nmid n-r \Rightarrow b_p(s,T) = (p^{-s}$の多項式$) \times (1-p^{-s}) \prod_{1\le j\le[n/2]} (1-p^{2j-2s}) \times \prod_{\substack{n+1\le k\le n+r \\ 2\nmid k}} (1-p^{k-2s})^{-1}$.

- $2\mid n-r \Rightarrow b_p(s,T) = (p^{-s}$の多項式$) \times (1-\eta p^{(n+r)/2-s})^{-1} \cdot (1-p^{-s}) \prod_{1\le j\le[n/2]} (1-p^{2j-2s}) \prod_{\substack{n+1\le k\le n+r \\ 2\nmid k}} (1-p^{k-2s})^{-1}$,

ここでηは$G^{(n-r)} \in M_{n-r}(\mathbb{Z}_p)$で$T_1[G^{-1}]$が half-integral かつ$p\nmid|2T_1[G^{-1}]|$となるものがあれば$\eta = \varepsilon(T_1[G^{-1}])$(上の記号)そうでなければ$0$とする。

これらによって$b_p(s,T)$はある程度わかったといえる。実際 Shimura, On Eisenstein series にある予想の3つの内の一つの場合α_0, Case SP については多少修正の上正しいことがわかる。他の二つの場合も上の Th の証をまねてできるはずである。Th 1, 2 によって原理的には時間をかければ$b_p(s,T)$

は求まる訳であるが実際にp^{s}の有理式として書き下すことは大変である．$n=1$なら古典的であり$n=2$のときは前出のKaufholdによって具体的に与えられているのでここでは$n=3$の時の式を与えておく．

mを4以上の偶数とし$S=\begin{pmatrix} & 1_{m/2} \\ 1_{m/2} & \end{pmatrix}$とし$\alpha_p(T,S)=b_p(m/2,T)$ $(p\neq 2)$とおくとαはいわゆるlocal densityである．$\alpha_p(T,S)$を$\alpha(T)$と略記すると

Th 3. $d=(1-p^{-m/2})(1-p^{2-m})$，$T=\mathrm{diag}(\varepsilon_1 p^{a_1},\varepsilon_2 p^{a_2},\varepsilon_3 p^{a_3})$，$\varepsilon_i\in \mathbb{Z}_p^{\times}$，$1\leq a_1\leq a_2\leq a_3$ とし

$$
\chi(T)=\begin{cases} 1 & a_1\equiv a_2\equiv a_3 \mod 2, \\ \chi(-\varepsilon_1\varepsilon_2) & a_1\equiv a_2\not\equiv a_3 \mod 2, \\ \chi(-\varepsilon_2\varepsilon_3) & a_1\not\equiv a_2\equiv a_3 \mod 2, \\ \chi(-\varepsilon_1\varepsilon_3) & a_1\not\equiv a_2\not\equiv a_3 \mod 2 \end{cases}
$$

とおく．右辺のχは mod pでの平方剰余記号である．

$p\neq 2$とすると$\gamma(T)=\alpha(p^2T)-(p^{3-m/2}+p^{5-m})\alpha(pT)+p^{8-3m/2}\alpha(T)$に対し $\gamma(T)/d=1+\chi(T)\,p^{(2-m/2)(a_1+a_2+a_3+6)}$ となる．更に

◎ $a_1\equiv a_2 \mod 2$のとき

$$
\begin{aligned}
&\alpha(T)/d \\
&=\sum_{0\leq k\leq a_1}\Big(\sum_{0\leq i\leq (a_1+a_2)/2-k-1} p^{(5-m)i}\Big)\,p^{(8-m/2)k} \\
&+p^{a_1/2+(5-m)a_2/2}\Big(\sum_{0\leq k\leq a_1} p^{(2-m/2)k}\Big)\Big(\sum_{0\leq j\leq [(a_3-a_2-1)/2]} p^{(4-m)j}\Big) \\
&+\chi(-\varepsilon_1\varepsilon_2)\,p^{a_1/2+(5-m)a_2/2}\Big(\sum_{1\leq k\leq a_1+1} p^{(2-m/2)k}\Big)\Big(\sum_{0\leq j\leq [(a_3-a_2)/2-1]} p^{(4-m)j}\Big)
\end{aligned}
$$

$$+\chi(T)\,p^{(a_1+a_2)/2+(2-m/2)a_3}\Bigl(\sum_{0\le k\le a_1} p^{(2-m/2)k}\Bigr)\Bigl(\sum_{0\le j\le (a_2-a_1)/2} p^{(3-m)j}\Bigr)$$
$$+\chi(T)\,p^{(m/2-1)a_1+(2-m/2)(a_2+a_3)+3-m}\sum_{0\le k\le a_1-1}\Bigl(\sum_{0\le j\le k} p^{(1-m/2)j}\Bigr)p^{(2-m/2)k}.$$

◎ $a_1\not\equiv a_2 \bmod 2$ のとき

$$\alpha(T)/d$$
$$=\sum_{0\le k\le a_1}\Bigl(\sum_{0\le j\le (a_1+a_2-1)/2-k} p^{(5-m)j}\Bigr)p^{(3-m/2)k}$$
$$+\chi(T)\,p^{(m/2-1)a_1+(2-m/2)(a_2+a_3)+3-m}\sum_{0\le k\le a_1-1}\Bigl(\sum_{0\le j\le k} p^{(1-m/2)j}\Bigr)p^{(2-m/2)k}$$
$$+\chi(T)\,p^{(a_1+a_2)/2+(2-m/2)a_3+(3-m)/2}\Bigl(\sum_{0\le k\le a_1} p^{(2-m/2)k}\Bigr)\Bigl(\sum_{0\le j\le (a_2-a_1-1)/2} p^{(3-m)j}\Bigr).$$

注 $b_p(s,T)$ は p^{-s} の有理式だから上で $m=2s$ とすれば $b_p(s,T)$ の具体的な式となる.

Cor. $a_k(T)$ を $Sp_n(\mathbb{Z})$ $(n\le 3)$ の weight $k\,(\equiv 0 \bmod 2)$ のアイゼンスタイン級数のフーリエ係数とするとき次の ~~Dirichlet~~ 級数を考える:

$$\sum_{t=0}^{\infty} a_k(p^t T)\,x^t$$

ここで T は half-integral positive definite な行列とする. $p\neq 2$ とするとこれは x の有理式であって分母は

$$\prod_{r=0}^{n}\bigl(1-p^{rk-r(r+1)/2}x\bigr)$$

であり分子は n 次の多項式, 更に $(p,|T|)=1$ ならば $n-1$ 次である.

注. 一般論により分母は x の多項式でその具体的な形も

5

わかっている（分母は既約分数に分解した時の分母を意味しない！）

これらの証明については Nagoya Math. J. 及び Proc. of Japan Acad. を御覧いただければ幸いです。（この稿が出版される頃には既に共に出版されているはずです）

最後に Maass relation について。

いわゆる degree 2 のアイゼンスタイン級数の Maass rel. はそのフーリエ係数が local density の無限積になっていることから local density の言葉に訳すと次の様になる。

$S=\begin{pmatrix} & 1_{m/2} \\ 1_{m/2} & \end{pmatrix}$（前出のもの）としておくと（$p\neq 2$ に対しては）

$$\alpha_p(\mathrm{diag}(\varepsilon_1 p^{a_1+1}, \varepsilon_2 p^{a_2+1}), S)-p^{2-m/2}\alpha_p(\mathrm{diag}(\varepsilon_1 p^{a_1}, \varepsilon_2 p^{a_2}), S)$$

が $\varepsilon_1\varepsilon_2$ と a_1+a_2 にのみより（この部分を(i)とする）更にその値は $\alpha_p(\mathrm{diag}(\varepsilon_1, \varepsilon_2 p^{a_1+a_2+2}), S)$ に一致する（この部分を(ii)とする）。

degree 3 の場合には上の(i)に対する拡張としては Th.3 の差分 $\gamma(T)$ が $\chi(T)$ と $a_1+a_2+a_3$ にのみよるということを考えるのがよい様に思われる。(ii)の方は $a_1\not\equiv a_2 \bmod 2$ の時は $\gamma(T)$ が又 local density 自身になるが一般にはどうすればよいのかよくわからない。少くとも2次形式の立場からは有益な式は得られない。しかし Maass rel. の拡張を探ぐろうとするならば cusp.

formでそのフーリエ係数がTの"種"にのみよるものを考え、即ちTの局所的な形のみが問題になる。(degree 2の時もそうなっている) 差分$\gamma(T)$に対応するものが上の様な$\chi(T)$と$a_1+a_2+a_3$にのみよるsubspaceを考える。(注 loc. density をフーリエ係数に直すには$|T|$の巾を補正しなければならない。)

このsubspaceがHecke op.で閉じているかどうかをcheck (し対応するdegree 2の時どうなっているのか知らないが) Maaß spaceがあればHecke op.で閉じているはずだからアイゼンスタイン級数のフーリエ係数をにらみながらMaaß spaceに到るというのが"一つの道"の様に思える。