数理解析研究所講究録
第552巻 1985年 11-20

K_0 and K_1-groups of C^*-algebras associated with skew product transformations

山形大理　河村新蔵 (Shinzô Kawamura)

本稿の目的は T^2 上の skew product transformation

$$(x, y) \longrightarrow (x+\theta, y+nx)$$

に付随して決まる C^*-接合積の分類について述べることである。分類の道具として K_0-群と K_1-群を用いる。ここに紹介する内容は、昭和58年5月に綿谷氏(大阪教育大)よりいただいた私信を基に、市原氏(大阪大学)と小高氏(慶応大学)の計算を加えて完全にしたものである。本研究会の時点においては、問題の C^*-環の分類はできていなかったわけであるが、それ以後、最近の情報によれば、この問題について、Packer [6] や Ronghui [8] によって完全な解決がなされたようである。この事については第2章で述べておく。

筆者は武元氏との共著 [3] において、ヒルベルト空間上の推移作用素の族から生成される C^*-環の研究を行ってきた。skew product transformation に付随する C^*-環はこのクラ

スの C^*-環であり、このクラスの他の C^*-環との関連についても興味あるところである。このことについても最後に述べておく。

§1. $T^2=[0,1)\times[0,1)$ 上の skew product transformation を、 $\sigma:(x,y)\longrightarrow(x+\theta,\ y+nx)$ で表わす。ここで θ は $(0,1)$ 区間内の無理数で n は整数である。$C(T^2)$ を T^2 上の連続関数全体とする。T^2 の写像 σ によって導かれる $C(T^2)$ 上の $*$-自己同型写像も σ で表わす。則ち

$$\sigma(f)(x,y)=f(x+\theta,\ y+nx),\quad f\in C(T^2)$$

である。$\{\sigma^n\mid n\in\mathbb{Z}\}$ は $\mathbb{Z}$ の $C(T^2)$ の $*$-自己同型写像としての表現であり、$C(T^2)$ との接合積を $A_{\theta,n}$ で表わす。

$$A_{\theta,n}=C(T^2)\underset{\sigma}{\times}\mathbb{Z}\ .$$

$A_{\theta,n}$ の K-群を計算するわけであるが、このために次の Pimsner-Voiculescu [7] の六項完全系列を用いる。

$$\begin{tikzcd}
K_0(C(T^2)) \arrow[r, "id_*^{(0)}-\sigma_*^{(0)}"] & K_0(C(T^2)) \arrow[r, "i_*^{(0)}"] & K_0(A_{\theta,n}) \arrow[d, "\delta_2"] \\
K_1(A_{\theta,n}) \arrow[u, "\delta_1"] & K_1(C(T^2)) \arrow[l, "i_*^{(1)}"] & K_1(C(T^2)) \arrow[l, "id_*^{(1)}-\sigma_*^{(1)}"]
\end{tikzcd}$$

ここで図の説明をしておこう。C^*-環 A に対し、$K_0(A)$ は $\bigcup_{m=1}^{\infty}A\otimes M_m$ (M_m は $m\times m$ 行列全体)の射影子 $p,\ q$ の同

値類の差 $[P]-[q]$ として表わされ、$K_1(A)$ は $\bigcup_{m=1}^{\infty} A\otimes M_m$ の中のユニタリ元 $u\in A\otimes M_m$ の $1\in A\otimes M_m$ の connected component による同値類 $[u]$ によって表わされる。C^*-環 A から B に対し写像 α が与えられた時，$A\otimes M_n$ から $B\otimes M_n$ に $(a_{ij})\in A\otimes M_m \longrightarrow (\alpha(a_{ij}))_{i,j}\in A\otimes M_m$ によって定義される写像があり、これにより $K_0(A)\longrightarrow K_0(B)$, $K_1(A)\longrightarrow K_1(B)$ の自然な写像がきまる。これを $\alpha_*^{(0)}$, $\alpha_*^{(1)}$ とする。特に $A=B=C(T^2)$, $\alpha=\sigma$ のときは，

$$\sigma_*^{(0)}([P]-[q])=[\tilde{\sigma}(P)]-[\tilde{\sigma}(q)],\ (\tilde{\sigma}(P)(x.y)=P(\sigma(x.y)))$$

$$\sigma_*^{(1)}([u])=[\tilde{\sigma}(u)],\quad (\tilde{\sigma}(u)(x.y)=u(\sigma(x.y)))$$

となる。又．$\alpha=id\,(=\textit{identity map})\ (A\longrightarrow A)$ の時は，$\alpha_*^{(i)}=\textit{identity}\ (i=1,2)$ である。i は $C(T^2)$ から $A_{\theta.n}=C(T^2)\underset{\sigma}{\times}\mathbb{Z}$ への自然な埋め込みである。（参[5]）.

定理 1.1. $K_0(A_{\theta,n})\cong\mathbb{Z}^3\ (\cong\mathbb{Z}\oplus\mathbb{Z}\oplus\mathbb{Z})$

$K_1(A_{\theta,n})\cong(\mathbb{Z}/|n|\mathbb{Z})\oplus\mathbb{Z}^3$ （$|n|$ は n の絶対値）

この定理の証明のために、次の三つの補助定理を示す。まず小高氏[4]によって次の事が分る。

補助定理 1.2. (1) $K_0(C(T^2))\cong\mathbb{Z}^2$ であり，その生成元は

次の二つである。

$$[P_{21}]-[q_{21}]\ ; \qquad P_{21}(x.y)=\begin{bmatrix}1&0\\0&1\end{bmatrix} \qquad q_{21}=0 .$$

$$[P_{22}]-[q_{22}]\ ;$$

$$P_{22}(x.y)=R(x)\begin{bmatrix}e^{-2\pi iy}&0\\0&1\end{bmatrix}R(x)^*\begin{bmatrix}1&0\\0&0\end{bmatrix}R(x)\begin{bmatrix}e^{2\pi iy}&0\\0&1\end{bmatrix}R(x)^*$$

但し $R(x)=\begin{bmatrix}\cos\frac{\pi}{2}x&-\sin\frac{\pi}{2}x\\ \sin\frac{\pi}{2}x&\cos\frac{\pi}{2}x\end{bmatrix}$ である。

$$q_{22}(x.y)=\begin{bmatrix}1&0\\0&0\end{bmatrix}$$

(注) [4] による表現での s_1 を y、s_2 を x とした。

(2) $K_1(C(T^2))\cong\mathbb{Z}^2$ であり、その生成元は次の二つである。

$$[u_{21}]\ ; \qquad u_{21}(x.y)=e^{2\pi ix}$$

$$[u_{22}]\ ; \qquad u_{22}(x.y)=e^{2\pi iy}$$

補助定理 1.2. $\alpha:(x.y)\longrightarrow(x,y+nx)$ とする。このとき、$id_*^{(0)}-\alpha_*^{(0)}=0$ である。

証明、$\tilde{\alpha}(P_{21})(x.y)=\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}=P_{21}(x.y)$. $\tilde{\alpha}(q_{21})=0=q_{21}$ より、$\alpha_*^{(0)}([P_{21}]-[q_{21}])=[P_{21}]-[q_{21}]$ である。一方、

$$\tilde{\alpha}(P_{22})(x.y)=P_{22}(x,y+nx)$$
$$=R(x)\begin{bmatrix}e^{-2\pi i(y+nx)}&0\\0&1\end{bmatrix}R(x)^*\begin{bmatrix}1&0\\0&0\end{bmatrix}R(x)\begin{bmatrix}e^{2\pi i(y+nx)}&0\\0&1\end{bmatrix}R(x)^*$$

である。ここで

$$P_t(x.y)=P_{22}(x.\ y+tnx)$$

とする。$P_0 = P_{22}$，$P_1 = \sigma(P_{22})$ である。P_t が $T^2 = [0,1) \times [0,1)$ 上で well-defined であることを示そう。

$$P_t(0, y) = P_{22}(0, y) = \begin{bmatrix} e^{-2\pi i y} & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} e^{2\pi i y} & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$P_t(1, y) = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} e^{-2\pi i (y+nt)} & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} e^{2\pi i (y+nt)} & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

故に $P_t(0, y) = P_t(1, y)$ である。

$$P_t(x, 1) = P_{22}(x, 1+ntx) = P_{22}(x, ntx) = P_t(x, 0)。$$

従って P_{22} と $\alpha(P_{22})$ は homotopic となり $[\alpha(P_{22})] = [P_{22}]$ である。明らかに $\alpha(q_{22}) = q_{22}$ であるから，

$$\alpha_*^{(0)}([P_{22}] - [q_{22}]) = [P_{22}] - [q_{22}]$$

となり，$\alpha_*^{(0)} = id$ である。 (終)

補助定理 1.3. $\alpha : (x, y) \longrightarrow (x, y+nx)$ とする。このとき，$id_*^{(1)} - \alpha_*^{(1)}$ は $\begin{pmatrix} 0 & -n \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ と表わされる。

証明. $\alpha(u_{21})(x, y) = u_{21}(x, y+nx) = e^{2\pi i x} = u_{21}(x, y)$．

$\alpha(u_{22})(x, y) = u_{22}(x, y+nx) = e^{2\pi i (y+nx)} = e^{2\pi i nx} e^{2\pi i y} = u_{21}(x,y)^n u_{22}(x,y)$.

従って，$\alpha_*^{(1)}([u_{21}]) = [u_{21}]$

$$\alpha_*^{(1)}([u_{22}]) = [u_{21}^n] \oplus [u_{22}] = n[u_{21}] \oplus [u_{22}]$$

となり，$\alpha_*^{(1)}$ は $K_1(C(T^2)) \cong \mathbb{Z}^2 \cong \mathbb{Z}[u_{21}] \oplus \mathbb{Z}[u_{22}]$ 上の行列表現として $\begin{pmatrix} 1 & n \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ となる。則ち.

$$id_*^{(1)} - \alpha_*^{(1)} = \begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix} - \begin{pmatrix}1&n\\0&1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0&-n\\0&0\end{pmatrix} \qquad \text{(終)}$$

定理の証明. $\sigma_t : (x, y) \longrightarrow (x + t\theta,\ y + nx)$ とすれば, $\sigma_0 = \alpha$, $\sigma_1 = \sigma$ であるから, α と σ は *homotopic* となり, σ の代りに α で計算して良い事になる。再び六項完全系列を眺めてみよう。補助定理を用いれば、上の系列は下図のようになる。

$$\begin{tikzcd}
\mathbb{Z}^2 \arrow[r, "0", "\text{①}"'] & \mathbb{Z}^2 \arrow[r, "i_*^{(0)}", "\text{②}"'] & K_0(A_{\theta,n}) \arrow[d, "\delta_2", "\text{③}"'] \\
K_1(A_{\theta,n}) \arrow[u, "\delta_1", "\text{⑥}"'] & \mathbb{Z}^2 \arrow[l, "\text{⑤}"', "i_*^{(1)}"] & \mathbb{Z}^2 \arrow[l, "\text{④}"', "\begin{pmatrix}0&-n\\0&0\end{pmatrix}"]
\end{tikzcd}$$

この系列は完全であるから, ①, ②, ③ は

① $\mathrm{Im}\,0 = \mathrm{Ker}\, i_*^{(0)}$. ② $\mathrm{Im}\, i_*^{(0)} = \mathrm{Ker}\,\delta_2$ ③ $\mathrm{Im}\,\delta_2 = \mathrm{Ker}\begin{pmatrix}0&-n\\0&0\end{pmatrix}$

となる。従って ① より $i_*^{(0)}$ は *injective* である。又

$$\mathrm{Ker}\begin{pmatrix}0&-n\\0&0\end{pmatrix} = \left\{ (k, l) \in \mathbb{Z}^2 \,\middle|\, \begin{pmatrix}0&-n\\0&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}k\\l\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-nl\\0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix} \right\}$$

$$= \{ (k, 0) \in \mathbb{Z}^2 \mid k \in \mathbb{Z} \} \cong \mathbb{Z} \oplus 0 .$$

故に

$$0 \longrightarrow \mathbb{Z}^2 \xrightarrow{i_*^{(0)}} K_0(A_{\theta,n}) \xrightarrow{\delta_2'} \mathbb{Z} \oplus 0 \longrightarrow 0$$

となるから、 $K_0(A_{\theta,n})/\mathbb{Z}^2 \cong \mathbb{Z}$ で $\mathbb{Z}$ が *projective* なので *split* して $K_0(A_{\theta,n}) \cong \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}^2 \cong \mathbb{Z}^3$ である。又 ④, ⑤, ⑥ は.

④ $\mathrm{Im}\begin{pmatrix}0 & -n\\0 & 0\end{pmatrix} = \mathrm{Ker}\, i_*^{(0)}$, ⑤ $\mathrm{Im}\, i_* = \mathrm{Ker}\,\delta_1$　⑥ $\mathrm{Im}\,\delta_1 = \mathrm{Ker}\, 0$

となる。⑥より δ_1 は surjective である。

$\mathrm{Im}\begin{pmatrix}0 & -n\\0 & 0\end{pmatrix} = \left\{\begin{pmatrix}0 & -n\\0 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}k\\l\end{pmatrix} \middle| (k.l) \in \mathbb{Z}^2\right\} = \left\{\begin{pmatrix}-nl\\0\end{pmatrix} \middle| n \in \mathbb{Z}\right\} \cong |n|\mathbb{Z} \oplus 0$

故に

$$0 \longrightarrow (\mathbb{Z}/|n|\mathbb{Z}) \oplus \mathbb{Z} \xrightarrow{i_*^{(1)}} K_1(A_{\theta,n}) \xrightarrow{\delta_1} \mathbb{Z}^2$$

となり、$K_1(A_{\theta,n})/(\mathbb{Z}/|n|\mathbb{Z}) \oplus \mathbb{Z} \cong \mathbb{Z}^2$ であり、$\mathbb{Z}^2$ は projective なので、$K_1(A_{\theta,n}) \cong (\mathbb{Z}/|n|\mathbb{Z}) \oplus \mathbb{Z}^3$ である。(終)

§2. $\sigma : (x.y) \longrightarrow (x+\theta, y+nx)$ は Furstenberg homomorphism [2] の一種で、T^2 上 minimal かつ uniquely ergodic であることがわかっている。従って $A_{\theta,n}$ は simple で、unique trace τ を持つ。このとき $K_0(A_{\theta,n})$ から実数全体 $\mathbb{R}$ への写像

$$\tau : K_0(A_{\theta,n}) \longrightarrow \mathbb{R}$$

が定義される。この τ は射影子 P, $Q \in A_{\theta,n} \otimes M_n$ に対し、

$$\tau([P]-[Q]) = (\tau \otimes \mathrm{Tr}_n)(P) - (\tau \otimes \mathrm{Tr}_n)(Q)$$

によって決っている。Tr_m は M_m 上の trace で $\mathrm{Tr}(1) = m$ である。このとき Ronghui, Packer によれば、

$$\tau(K_0(A_{\theta,n})) = \mathbb{Z} + \mathbb{Z}\theta$$

である。従って、$K_1(A_{\theta,n}) = (\mathbb{Z}/|n|\mathbb{Z}) \oplus \mathbb{Z}^3$ であることを用いると、A_{θ_1,n_1} と A_{θ_2,n_2} が C^*-同型であれば、

$\theta_1=\theta_2$ (又は $\theta_1=1-\theta_2$) かつ $|n_1|=|n_2|$ である。逆にこの条件をみたせば、$\sigma_1:(x.y)\to(x+\theta_1,\ y+n_1x)$ と $\sigma_2:(x.y)\to(x+\theta_2,\ y+n_2x)$ は topologically conjugate となるので、A_{θ_1,n_1} と A_{θ_2,n_2} は C^*-同型である。即ち、

$\tau_1:(x.y)\to(-x.y)$ に対し、

$$\tau_1\sigma_1\tau_1^{-1}:(x.y)\longrightarrow(x-\theta,\ y+nx)$$

であり、$\tau_2:(x.y)\longrightarrow(x.-y)$ に対し、

$$\tau_2\sigma_1\tau_2^{-1}:(x.y)\longrightarrow(x+\theta,\ y-nx)$$

である。上記の事を定理として述べておこう。

定理 2.1. $A_{\theta_1,n_1}\cong A_{\theta_2,n_2}$ (C^*-同型) であることと、$\theta_1=\theta_2$ (又は $\theta_1=1-\theta_2$) かつ $|n_1|=|n_2|$ であることは同値。

次に離散トーラス群 T_d の部分群 G に付随する C^*-環との関係を眺めてみよう。G の双対群 Γ はコンパクト群で $\mathbb{Z}$ を部分群として稠密に含む。

$$\beta:\gamma\longrightarrow\gamma+1\quad(\gamma\in\Gamma)$$

とすると、β は Γ 上の minimal. strictly ergodic transformation であり、$\Sigma_G=(\Gamma,\beta)$ は topologically transitive dynamical system である。これに対応する C^*-環 $C^*(\Sigma_G)$ は simple で unique trace をもつ。又、

$K_0(C^*(\Sigma_G))$ から $\mathbb{R}$ への自然な写像 T に対し

$$T(K_0(C^*(\Sigma_G))) = \{t \in \mathbb{R} \mid e^{2\pi i t} \in G\}$$

である（[3 : Theorem 2.2]）。

定理 2.2. 任意の無理数 $\theta \in [0,1)$, 整数 n と任意の $G \subset \mathbb{T}_d$ について $A_{\theta,n}$ と $C^*(\Sigma_G)$ は C^*- 同型ではない。

これは $A_{\theta,n} \cong C^*(\Sigma_G)$ とすれば、$T(C^*(\Sigma_G)) = \mathbb{Z} + \mathbb{Z}\theta$ で、この値をとるのは $G = \{e^{2\pi i m\theta} \mid m \in \mathbb{Z}\}$ に限る。このとき $K_0(C^*(\Sigma_G)) \cong \mathbb{Z}^2$ であり、$K_0(A_{\theta,n}) \cong \mathbb{Z}^3$ と矛盾するから、$A_{\theta,n} \not\cong C^*(\Sigma_G)$ である。

参考文献

[1] T. Anzai, Ergodic skew product transformations on the torus, Osaka Math. J., 3(1951), 83-99.

[2] H. Furstenberg, Strict ergodicity and transformations of the torus, Amer. J. Math., 83(1961), 573-601.

[3] S. Kawamura and H. Takemoto, C^*-algebras associated with shift dynamical systems, J. Math. Soc. Japan 36(1984), 279-293.

[4] K. Kodaka (小高一則), Toral automorphism について、京大数理研・講究録本号.

[5] Y. Nakagami (中神祥臣), C^*-環とK-理論, 京大数理研・講究録 488 (1983), 1 - 26.

[6] J. A. Packer, K-theoretic invariants for C^*-algebras associated to transformations and induced flows, (Preprint. 1984).

[7] M. Pimsner and D. Voiculescu, Exact sequences for K-groups and Ext-groups of certain cross-products of C^*-algebras, J. Operator Theory 4 (1980), 93-118.

[8] Ronghui, Ji, Classification of the C^*-algebras associated with Furstenberg homomorphism on the two dimensional torus, (Preprint. 1985).