数理解析研究所講究録
第 552 巻 1985 年 21-35

Toral automorphism について

慶大理工 小高一則 (Kazunori Kodaka)

1. 定義と準備

$T^n \equiv \mathbb{R}^n/\mathbb{Z}^n$; n 次元トーラス

$SL(n, \mathbb{Z})$; 成分が整数, 行列式が 1 であるような n 次の正方行列の全体。

$SL(n\ \mathbb{Z})$の元σを、T^n上の自己同型写像と見なすことができる。このようなσのことを toral automorphism という。

$C(T^n)$; T^n上の連続関数全体のつくる環。

$C(T^n)$上の automorphism $\hat{\sigma}$を次のように定義する。

$x \in C(T^n)$ に対して

$$(\hat{\sigma}(x))(s_1, \cdots, s_n) \equiv x(\sigma^{-1}(s_1, \cdots, s_n))$$

$$(s_1, \cdots, s_n) \in T^n \qquad \sigma \in SL(n, \mathbb{Z})$$

$\hat{\sigma}$もσで表わすことにする。

C^*-力学系 $(C(T^n), \mathbb{Z}, \sigma)$を考えて、接合積 $C(T^n)\times_\sigma \mathbb{Z}$をつくる。

本稿では、$C(T^n)\times_\sigma \mathbb{Z}$ の K_i-group $(i=0, 1)$を計算する。

計算の方針；

次の様なPimsner-Voiculescuのexact sequenceを考える。

$$\begin{tikzcd} K_0(C(T^n)) \arrow[r, "id-\sigma_*^{-1(0)}"] & K_0(C(T^n)) \arrow[r] & K_0(C(T^n)\times_\sigma \mathbb{Z}) \arrow[d] \\ K_1(C(T^n)\times_\sigma \mathbb{Z}) \arrow[u] & K_1(C(T^n)) \arrow[l] & K_1(C(T^n)) \arrow[l, "id-\sigma_*^{-1(1)}"'] \end{tikzcd}$$

上のexact sequenceにより、$K_i(C(T^n)) \cong \mathbb{Z}^{2^{n-1}}$ $(i=0,1)$

$\mathrm{Ker}(id-\sigma_*^{-1(i)})$ は free abelian だから

$$K_0(C(T^n)\times_\sigma \mathbb{Z}) \cong \mathbb{Z}^{2^{n-1}}/\mathrm{Im}(id-\sigma_*^{-1(0)}) \oplus \mathrm{Ker}(id-\sigma_*^{-1(1)})$$

$$K_1(C(T^n)\times_\sigma \mathbb{Z}) \cong \mathbb{Z}^{2^{n-1}}/\mathrm{Im}(id-\sigma_*^{-1(1)}) \oplus \mathrm{Ker}(id-\sigma_*^{-1(0)})$$

そこで、$K_i(C(T^n))$ $(i=0,1)$ の生成元をそれぞれ1組定めておき、$\sigma_*^{-1(i)}$ $(i=0,1)$ を行列の形で表わし $\mathrm{Im}(id-\sigma_*^{-1(i)})$ と $\mathrm{Ker}(id-\sigma_*^{-1(i)})$ $(i=0,1)$ を求めればよい。

$K_i(C(T^n))$ $(i=0,1)$ の生成元を帰納的に次の様に定める。

$K_0(C(T))$ の生成元；

$p_{11}(s_1)=1$, $q_{11}(s_1)=0$ とおくと、$[p_{11}]-[q_{11}]$ が生成元となる。

ここで、$[p]$ は、projection p を代表元とする K_0-group の元を表す。

$K_1(C(T))$ の生成元；

$u_{11}(s_1)=e^{2\pi i s_1}$ とおくと、$[u_{11}]$ が生成元となる。

ここで、$[u]$ は、unitary u を代表元とする K_1-group の元を表す。

$K_0(C(T^{n-1}))$ の生成元が $\{[p_{n-1,j}]-[q_{n-1,j}]\}_{j=1}^{2^{n-2}}$，$K_1(C(T^{n-1}))$ の生成

元が $\{[u_{n-1,j}]\}_{j=1}^{2^{n-2}}$ であるとする。

このとき $K_0(C(T^n))$ と $K_1(C(T^n))$ の生成元を以下の様にして定める。

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & C(T^{n-1})\otimes C_0(I) \arrow[r, "\gamma"] & C(T^n) \arrow[r, "\pi"] & C(T^n)/C(T^{n-1})\otimes C_0(I) \arrow[r] \arrow[d, "\alpha", "\wr"'] & 0 \\
& & & C(T^{n-1}) \arrow[ul, "\beta"] &
\end{tikzcd}$$

ここで γ; inclusion map　π; quotient map　β; inclusion map

$I \equiv [0,1]$　　$C_0(I) \equiv \{x \in C(I) \,;\, x(0) = x(1) = 0\}$

$(\alpha\hat{x})(s_1,\cdots,s_{n-1}) \equiv x(s_1,\cdots,s_{n-1},0)$　　$x \in C(T^n)$, $\hat{x} \in C(T^n)/C(T^{n-1})\otimes C_0(I)$

このとき、横向きの矢印は exact, $\alpha\circ\pi\circ\beta = id_{C(T^{n-1})}$

更に、α は上への同型写像である。

従って、上の diagram より

$$K_i(C(T^n)) = \gamma_*^{(i)}\circ\delta_{1-i}(K_{1-i}(C(T^{n-1})))\oplus\beta_*^{(i)}(K_i(C(T^{n-1})))\quad i=0,1$$

但し、δ_{1-i} は suspension ; $K_{1-i}(C(T^{n-1})) \xrightarrow{\cong} K_i(C(T^{n-1})\otimes C_0(I))$

$K_i(C(T^n))$ $(i=0,1)$ の生成元を $\{[p_{n,j}]-[q_{n,j}]\}_{j=1}^{2^{n-1}}$, $\{[u_{n,j}]\}_{j=1}^{2^{n-1}}$ とすると、

$1 \leq j \leq 2^{n-2}$ のとき

$$p_{n,j}(s_1,\cdots,s_n) = p_{n-1,j}(s_1,\cdots,s_{n-1}) \qquad q_{n,j}(s_1,\cdots,s_n) = q_{n-1,j}(s_1,\cdots,s_{n-1})$$

$$u_{n,j}(s_1,\cdots,s_n) = e^{2\pi i s_n p_{n-1,j}(s_1,\cdots,s_{n-1})}\cdot e^{-2\pi i s_n q_{n-1,j}(s_1,\cdots,s_{n-1})}$$

$2^{n-2}+1 \leq j \leq 2^{n-1}$ のとき、

$$p_{n,j}(s_1,\cdots,s_n) = R(s_n)\begin{bmatrix} u^*_{n-1,j-2^{n-2}}(s_1,\cdots,s_{n-1}) & 0 \\ 0 & 1\end{bmatrix} R(s_n)^* \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0\end{bmatrix} R(s_n)$$

$$\times\begin{bmatrix} u_{n-1,j-2^{n-2}}(s_1,\cdots,s_{n-1}) & 0 \\ 0 & 1\end{bmatrix} R(s_n)^*$$

$$q_{n,j}(s_1,\cdots,s_n) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0\end{bmatrix}$$

ここで $R(s_n)=\begin{bmatrix}\cos\frac{\pi}{2}s_n 1 & -\sin\frac{\pi}{2}s_n 1\\ \sin\frac{\pi}{2}s_n 1 & \cos\frac{\pi}{2}s_n 1\end{bmatrix}$

1 は $u_{n-1,j-2^{n-2}}$ が属す $C(T^n)$ 成分の行列環の単位元

$u_{n,j}(s_1,\cdots,s_n)=u_{n-1,j-2^{n-2}}(s_1,\cdots,s_{n-1})$

以上の様に $K_i(C(T^n))$ $(i=0,1)$ の生成元を定める。

2\. ${S_n}_*^{-1(i)}$ $(i=0,1,\ n\geqq 2)$ を表現する行列

$SL(n,\mathbb{Z})$ は $S_n\equiv\begin{bmatrix}1&1\\0&1\end{bmatrix}\oplus I_{n-2}$ と $P_n\equiv\begin{bmatrix}0&1&0&\cdots&0\\0&0&1&\cdots&0\\\vdots&\vdots&\vdots&\ddots&\vdots\\0&0&0&\cdots&1\\(-1)^{n-1}&0&0&\cdots&0\end{bmatrix}$

とから生成される。$\forall\sigma\in SL(n,\mathbb{Z})$ に対して $\sigma_*^{-1(i)}$ $(i=0,1)$

を求めることは難しいので $SL(n,\mathbb{Z})$ の生成元 S_n と P_n に対して

${S_n}_*^{-1(i)}$, ${P_n}_*^{-1(i)}$ を求める。ここでは ${S_n}_*^{-1(i)}$ の行列の形を求める。

$n=2$ のとき

$$S_2=\begin{bmatrix}1&1\\0&1\end{bmatrix}$$

$i=0$ のとき　定義に従って、$K_0(C(T^2))$ の生成元 $\{[p_{2,j}]-[q_{2,j}]\}_{j=1}^{2}$

を求めると、$p_{21}(s_1,s_2)=1$ 　$q_{21}(s_1,s_2)=0$

$$p_{22}(s_1,s_2)=R(s_2)\begin{bmatrix}e^{-2\pi i s_1}&0\\0&1\end{bmatrix}R(s_2)^*\begin{bmatrix}1&0\\0&0\end{bmatrix}R(s_2)\begin{bmatrix}e^{2\pi i s_2}&0\\0&1\end{bmatrix}R(s_2)^*$$

$$q_{22}(s_1,s_2)=\begin{bmatrix}1&0\\0&0\end{bmatrix}$$

明らかに、${S_2}_*^{-1(0)}([p_{21}])=[p_{21}]$ 　${S_2}_*^{-1(0)}([q_{2j}])=[q_{2,j}]$ 　$(j=1,2)$

$$(S_2^{-1}p_{22})(s_1,s_2)=R(s_2)\begin{bmatrix}e^{-2\pi i(s_1+s_2)}&0\\0&1\end{bmatrix}R(s_2)^*\begin{bmatrix}1&0\\0&0\end{bmatrix}R(s_2)\begin{bmatrix}e^{2\pi i(s_1+s_2)}&0\\0&1\end{bmatrix}R(s_2)^*$$

$U(s_1,s_2)\equiv R(s_2)\begin{bmatrix}e^{2\pi i s_2}&0\\0&1\end{bmatrix}R(s_2)^*$ とおけば 　$U\in U_2(C(T^2))$

$U(S_2^{-1}p_{22})U^*=p_{22}$ だから 　${S_2}_*^{-1(0)}([p_{22}])=[p_{22}]$

$$\therefore\ {S_2}_*^{-1(0)}=\begin{bmatrix}1&0\\0&1\end{bmatrix}$$

$i=1$ のとき　$K_1(C(T^2))$ の生成元 $\{[u_{2j}]\}_{j=1}^{2}$ を求めると、

$$u_{21}(s_1, s_2) = e^{2\pi i s_2} \qquad u_{22}(s_1, s_2) = e^{2\pi i s_1}$$

$$(S_2^{-1} u_{21})(s_1, s_2) = e^{2\pi i s_2} \qquad \therefore S_{2*}^{-1(1)}([u_{21}]) = [u_{21}]$$

$$(S_2^{-1} u_{22})(s_1, s_2) = e^{2\pi i (s_1 + s_2)} \qquad \therefore S_{2*}^{-1(1)}([u_{22}]) = [u_{21}] + [u_{22}]$$

$$\therefore S_{2*}^{-1(1)} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$n \geqq 3$ のとき．　次の補題を示す。

補題1　　$\forall X \in SL(2, \mathbb{Z})$ に対して、

$$(X \oplus I_{n-2})_*^{-1(i)} = (X \oplus I_{n-3})_*^{-1(0)} \oplus (X \oplus I_{n-3})_*^{-1(1)} \qquad i = 0, 1 \quad n \geqq 3$$

が成り立つ。

証）$i=0$ のとき、$K_0(C(T^n))$ の生成元を $K_i(C(T^{n-1}))$ $(i=0,1)$

の生成元で表わす。

$1 \leqq j \leqq 2^{n-2}$ のとき

$$p_{n,j}(s_1, \cdots, s_n) = p_{n-1,j}(s_1, \cdots, s_{n-1}) \qquad q_{n,j}(s_1, \cdots, s_n) = q_{n-1,j}(s_1, \cdots, s_{n-1})$$

$2^{n-2}+1 \leqq j \leqq 2^{n-1}$ のとき

$$p_{n,j}(s_1, \cdots, s_n) = R(s_n) \begin{bmatrix} u_{n-1, j-2^{n-2}}^*(s_1, \cdots, s_{n-1}) & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} R(s_n)^* \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} R(s_n)$$
$$\times \begin{bmatrix} u_{n-1, j-2^{n-2}}(s_1, \cdots, s_{n-1}) & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} R(s_n)^*$$

$$q_{n,j}(s_1, \cdots, s_n) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$X_n \equiv X \oplus I_{n-2}$ とおく。

$1 \leqq j \leqq 2^{n-2}$ のとき

$$(X_n^{-1} p_{n,j})(s_1, \cdots, s_n) = (X_{n-1}^{-1} p_{n-1,j})(s_1, \cdots, s_{n-1})$$

$$(X_n^{-1} q_{n,j})(s_1, \cdots, s_n) = (X_{n-1}^{-1} q_{n-1,j})(s_1, \cdots, s_{n-1})$$

よって、$X_{n*}^{-1(0)}([p_{n,j}] - [q_{n,j}]) = [X_{n-1}^{-1} p_{n-1,j}] - [X_{n-1}^{-1} q_{n-1,j}]$

$$= \beta_*^{(0)}([X_{n-1}^{-1} p_{n-1,j}] - [X_{n-1}^{-1} q_{n-1,j}]) = (\beta_*^{(0)} \circ X_{n-1*}^{-1(0)})([p_{n-1,j}] - [q_{n-1,j}])$$

$$= \beta_*^{(0)}\Big(\sum_{k=1}^{2^{n-2}} a_{k,j}([p_{n-1,k}] - [q_{n-1,k}])\Big) = \sum_{k=1}^{2^{n-2}} a_{k,j}([p_{n,k}] - [q_{n,k}])$$

但し、$[a_{k,l}]$ は、$X_{n-1*}^{-1(0)}$ を表現する行列である。

$2^{n-2}+1 \leqq j \leqq 2^{n-1}$ のとき、

$$(X_n^{-1} p_{n,j})(s_1,\cdots,s_n)=R(s_n)\begin{bmatrix}(X_{n-1}^{-1}u_{n-1,j-2^{n-2}}^{*})(s_1,\cdots,s_{n-1}) & 0\\ 0 & 1\end{bmatrix}R(s_n)^*$$
$$\times\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & 0\end{bmatrix}R(s_n)\begin{bmatrix}(X_{n-1}^{-1}u_{n-1,j-2^{n-2}})(s_1,\cdots,s_{n-1}) & 0\\ 0 & 1\end{bmatrix}R(s_n)^*$$

$$(X_n^{-1}q_{n,j})(s_1,\cdots,s_n)=q_{n,j}(s_1,\cdots,s_n)$$

よって、$X_{n\,*}^{-1(0)}([p_{n,j}]-[q_{n,j}])=(\gamma_*^{(0)}\circ\mathcal{S}_1)([X_{n-1}^{-1}u_{n-1,j-2^{n-2}}])$

$$=(\gamma_*^{(0)}\circ\mathcal{S}_1\circ X_{n-1\,*}^{-1(1)})([u_{n-1,j-2^{n-2}}])$$
$$=(\gamma_*^{(0)}\circ\mathcal{S}_1)\Big(\sum_{k=1}^{2^{n-2}}b_{kj}[u_{n-1,k}]\Big)=\sum_{k=1}^{2^{n-2}}b_{kj}(\gamma_*^{(0)}\circ\mathcal{S}_1)([u_{n-1,k}])$$
$$=\sum_{k=1}^{2^{n-2}}b_{kj}([p_{n,k+2^{n-2}}]-[q_{n,k+2^{n-2}}])$$

但し、$[b_{k\ell}]$は、$X_{n-1\,*}^{-1(1)}$を表現する行列である。

故に、$X_{n\,*}^{-1(0)}=X_{n-1\,*}^{-1(0)}\oplus X_{n-1\,*}^{-1(1)}$

$i=1$のときにも、$K_1(C(T^n))$の生成元を$K_i(C(T^{n-1}))$ $(i=0,1)$の生成元で表わし全く同様のことを行なえばよい。(証終)

補題1により、

$$S_{n\,*}^{-1(0)}=S_{n\,*}^{-1(1)}=\bigoplus_1^{2^{n-3}}(S_{2\,*}^{-1(0)}\oplus S_{2\,*}^{-1(1)})=\bigoplus_1^{2^{n-3}}\begin{bmatrix}1&0&0&0\\0&1&0&0\\0&0&1&1\\0&0&0&1\end{bmatrix}$$

以上のことをまとめて、

命題

$$S_{2\,*}^{-1(0)}=\begin{bmatrix}1&0\\0&1\end{bmatrix}\qquad S_{2\,*}^{-1(1)}=\begin{bmatrix}1&1\\0&1\end{bmatrix}$$
$$S_{n\,*}^{-1(i)}=\bigoplus_1^{2^{n-3}}\begin{bmatrix}1&0&0&0\\0&1&0&0\\0&0&1&1\\0&0&0&1\end{bmatrix}\qquad i=0,1\ ,\ n\geqq3$$

3 $P_{n\,*}^{-1(i)}$ $(i=0,1\quad n\geqq2)$を表現する行列

ここでは、$P_{n\,*}^{-1(i)}$の行列の形を求める。

$n=2$ のとき

$$P_2=\begin{bmatrix}0&1\\-1&0\end{bmatrix}$$

$i=0$ のとき、明らかに $P_{2*}^{-1(0)}([p_{21}])=[p_{21}]$ $P_{2*}^{-1(0)}([\rho_{2j}])=[\rho_{2j}]$ $j=1,2$

$$(P_2^{-1}p_{22})(s_1,s_2)=R(1-s_1)\begin{bmatrix}e^{-2\pi i s_2}&0\\0&1\end{bmatrix}R(1-s_1)^*\begin{bmatrix}1&0\\0&0\end{bmatrix}R(1-s_1)\begin{bmatrix}e^{2\pi i s_2}&0\\0&1\end{bmatrix}R(1-s_1)^*$$

$$V(s_1,s_2)\equiv R(1-s_1)\begin{bmatrix}e^{-2\pi i s_2}&0\\0&1\end{bmatrix}R(1-s_1)^*\begin{bmatrix}e^{-2\pi i(1-s_1)s_2}&0\\0&e^{2\pi i(1-s_1)s_2}\end{bmatrix}R(s_2)$$
$$\times\begin{bmatrix}e^{2\pi i s_1}&0\\0&1\end{bmatrix}R(s_2)^*$$

とおくと、 $V\in U_2(C(T^2))$ $V^*(P_2^{-1}p_{22})V=p_{22}$

よって、 $P_{2*}^{-1(0)}([p_{22}])=[p_{22}]$ $\therefore$ $P_{2*}^{-1(0)}=\begin{bmatrix}1&0\\0&1\end{bmatrix}$

$i=1$ のとき、明らかに $P_{2*}^{-1(1)}([u_{21}])=-[u_{22}]$, $P_{2*}^{-1(1)}([u_{22}])=[u_{21}]$

$$\therefore P_{2*}^{-1(1)}=\begin{bmatrix}0&1\\-1&0\end{bmatrix}$$

$n\geqq 3$ のとき、$P_{n*}^{-1(i)}$ $(i=0,1)$ を求めるため次の補題を示す。

補題2

$$P_{n*}^{-1(i)}=(P_{n-1*}^{-1(0)}\oplus P_{n-1*}^{-1(1)})(I_{n-2}\oplus P_2^{-1})_*^{(i)}\qquad i=0,1\qquad n\geqq 3$$

証) $T_n\equiv T_2\oplus I_{n-2}$ $T_2\equiv P_2$ とおくと、$P_n=(1\oplus P_{n-1})T_n$

この等式より、$P_{n*}^{-1(i)}=T_{n*}^{-1(i)}(1\oplus T_{n-1})_*^{-1(i)}\cdots(I_{n-3}\oplus T_3)_*^{-1(i)}(I_{n-2}\oplus T_2)_*^{-1(i)}$

補題1と同様にして、

$$(I_{n-k}\oplus T_k)_*^{-1(i)}=(I_{n-k}\oplus T_{k-1})_*^{-1(0)}\oplus(I_{n-k}\oplus T_{k-1})_*^{-1(1)}$$
$$3\leqq k\leqq n\qquad i=0,1$$

上の2つの等式により、

$$P_{n*}^{-1(i)}=(P_{n-1*}^{-1(0)}\oplus P_{n-1*}^{-1(1)})(I_{n-2}\oplus T_2)_*^{-1(i)}\qquad i=0,1$$

(証終)

この補題2より、$P_{n*}^{-1(i)}$ を表現する行列を求めるためには、

$(I_{n-2}\oplus T_2)_*^{-1(i)}$ を表現する行列を求めればよい。以下、

$(I_{n-2}\oplus T_2)_*^{-1(i)}$ $(i=0,1, n\geqq 3)$ の行列の形を決定する。

$A_n \equiv I_{n-2} \oplus T_2$ とおく。

$i=0$ のとき

$K_0(C(T^n))$ の生成元を $K_i(C(T^{n-2}))$ $(i=0,1)$ の生成元で表わす。

ここで組 $(s_1, \cdots, s_{n-2})$ を $\overline{s}$ で表わす。

$1 \leqq j \leqq 2^{n-3}$ のとき

$$p_{n,j}(\overline{s}, s_{n-1}, s_n) = p_{n-2,j}(\overline{s}) \quad q_{n,j}(\overline{s}, s_{n-1}, s_n) = q_{n-2,j}(\overline{s})$$

$2^{n-3}+1 \leqq j \leqq 2^{n-2}$ のとき

$$p_{n,j}(\overline{s}, s_{n-1}, s_n) = R(s_{n-1})\begin{bmatrix} u_{n-2,j-2^{n-3}}^{*}(\overline{s}) & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} R(s_{n-1})^{*} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} R(s_{n-1})$$
$$\times \begin{bmatrix} u_{n-2,j-2^{n-3}}(\overline{s}) & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} R(s_{n-1})^{*}$$

$$q_{n,j}(\overline{s}, s_{n-1}, s_n) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$2^{n-2} \leqq j \leqq 2^{n-2}+2^{n-3}$ のとき、

$$p_{n,j}(\overline{s}, s_{n-1}, s_n) = R(s_n)\begin{bmatrix} e^{2\pi i s_{n-1}} q_{n-2,j-2^{n-2}}(\overline{s}) & e^{-2\pi i s_{n-1}} p_{n-2,j-2^{n-2}}(\overline{s}) & 0 \\ & 0 & 1 \end{bmatrix}$$
$$\times R(s_n)^{*} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} R(s_n) \begin{bmatrix} e^{2\pi i s_{n-1}} p_{n-2,j-2^{n-2}}(\overline{s}), e^{-2\pi i s_{n-1}} q_{n-2,j-2^{n-2}}(\overline{s}) & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} R(s_n)^{*}$$

$$q_{n,j}(\overline{s}, s_{n-1}, s_n) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$2^{n-2}+2^{n-3}+1 \leqq j \leqq 2^{n-1}$ のとき

$$p_{n,j}(\overline{s}, s_{n-1}, s_n) = R(s_n)\begin{bmatrix} u_{n-2,j-2^{n-2}-2^{n-3}}^{*}(\overline{s}) & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} R(s_n)^{*} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} R(s_n)$$
$$\times \begin{bmatrix} u_{n-2,j-2^{n-2}-2^{n-3}}(\overline{s}) & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} R(s_n)^{*}$$

$$q_{n,j}(\overline{s}, s_{n-1}, s_n) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$A_{n*}^{-1(0)}$ でそれぞれの生成元をうつすと、

$1 \leqq j \leqq 2^{n-3}$ のとき、 $A_{n*}^{-1(0)}([p_{n,j}]) = [p_{n,j}]$ $\quad A_{n*}^{-1(0)}([q_{n,j}]) = [q_{n,j}]$

$2^{n-3}+1 \leqq j \leqq 2^{n-2}$ のとき、 $A_{n*}^{-1(0)}([p_{n,j}]) = [p_{n,j+2^{n-3}}]$ $\quad A_{n*}^{-1(0)}([q_{n,j}]) = [q_{n,j+2^{n-3}}]$

$2^{n-2}+1 \leqq j \leqq 2^{n-2}+2^{n-3}$ のとき、

$$a_{n+1,j}(\overline{s}, s_{n+1}) \equiv e^{2\pi i s_{n-1}} p_{n-2,j-2^{n-2}}(\overline{s}) \quad b_{n+1,j}(\overline{s}, s_{n+1}) \equiv e^{2\pi i s_{n-1}} q_{n-2,j-2^{n-2}}(\overline{s})$$

とおくと、 $[p_{n,j}] - [q_{n,j}] = \mathcal{S}_1([a_{n-1,j}]) - \mathcal{S}_1([b_{n-1,j}])$

$$e_{n,j}(\vec{s}, s_{n-1}, s_n) \equiv R(s_n)\begin{bmatrix} a_{n-1,j}^*(\vec{s}, s_{n-1}) & 0 \\ 0 & 1\end{bmatrix} R(s_n)^* \begin{bmatrix}1&0\\0&0\end{bmatrix} R(s_n) \times \begin{bmatrix} a_{n-1,j}(\vec{s}, s_{n-1}) & 0\\ 0 & 1\end{bmatrix} R(s_n)^*$$

$$f_{n,j}(\vec{s}, s_{n-1}, s_n) \equiv R(s_n)\begin{bmatrix} b_{n-1,j}^*(\vec{s}, s_{n-1}) & 0 \\ 0 & 1\end{bmatrix} R(s_n)^* \begin{bmatrix}1&0\\0&0\end{bmatrix} R(s_n) \times \begin{bmatrix} b_{n-1,j}(\vec{s}, s_{n-1}) & 0\\ 0 & 1\end{bmatrix} R(s_n)^*$$

とおくと、

$[e_{n,j}]-[q_{n,j}] = \delta_1([a_{n-1,j}])$　　$[f_{n,j}]-[q_{n,j}] = \delta_1([b_{n-1,j}])$

∴ $[p_{n,j}]-[q_{n,j}] = [e_{n,j}]-[q_{n,j}]-[f_{n,j}]+[q_{n,j}] = [e_{n,j}]-[f_{n,j}]$

よって、$A_{n*}^{-1(c)}([e_{n,j}]-[f_{n,j}])$を求めればよい。

$$V_{n,j}(\vec{s}, s_{n-1}, s_n) \equiv R(1-s_{n-1})\begin{bmatrix} e^{-2\pi i s_n p_{n-2,j-2^{n-2}}(\vec{s})} & 0\\ 0 & 1\end{bmatrix} R(1-s_{n-1})^* \times \begin{bmatrix} v_1(\vec{s}, s_{n-1}, s_n) & 0\\ 0 & v_2(\vec{s}, s_{n-1}, s_n)\end{bmatrix} R(s_n) \begin{bmatrix} e^{2\pi i s_{n-1} p_{n-2,j-2^{n-2}}(\vec{s})} & 0\\ 0 & 1\end{bmatrix} R(s_n)^*$$

$$v_1(\vec{s}, s_{n-1}, s_n) \equiv e^{-2\pi i (1-s_{n-1}) s_n p_{n-2,j-2^{n-2}}(\vec{s})}$$
$$v_2(\vec{s}, s_{n-1}, s_n) \equiv e^{2\pi i (1-s_{n-1}) s_n p_{n-2,j-2^{n-2}}(\vec{s})}$$

とおくと、　$V_{n,j} \in \bigcup_k U_k(C(T^n))$

かつ　$V_{n,j}^*(A_n^{-1} e_{n,j}) V_{n,j} = e_{n,j}$ となるから $A_{n*}^{-1(c)}([e_{n,j}]) = [e_{n,j}]$

$p_{n-2,j-2^{n-2}}$の代わりに、$q_{n-2,j-2^{n-2}}$にして同様のことをすれば

$$A_{n*}^{-1(c)}([f_{n,j}]) = [f_{n,j}]$$

$$\therefore\ A_{n*}^{-1(c)}([p_{n,j}]-[q_{n,j}]) = [p_{n,j}]-[q_{n,j}]$$

$2^{n-2}+2^{n-3}+1 \leqq j \leqq 2^{n-1}$のとき、

$$V_{n,j}(\vec{s}, s_{n-1}, s_n) \equiv R(1-s_{n-1})\begin{bmatrix} u_{n-2,j-2^{n-2}-2^{n-3}}^*(\vec{s}) & 0\\ 0 & 1\end{bmatrix} R(1-s_{n-1})^* R(s_{n-1}) \times \begin{bmatrix} u_{n-2,j-2^{n-2}-2^{n-3}}^*(\vec{s}) & 0\\ 0 & 1\end{bmatrix} R(s_{n-1})^*$$

とおくと、　$V_{n,j} \in \bigcup_k U_k(C(T^n))$

$p'_{n,j} \equiv V_{n,j}^*(A_n^{-1} p_{n,j}) V_{n,j}$ とおくと、

$$p'_{n,j}(\vec{s}, s_{n-1}, s_n) = R(s_{n-1})\begin{bmatrix} u_{n-2,j-2^{n-2}-2^{n-3}}(\vec{s}) & 0\\ 0 & 1\end{bmatrix} R(s_{n-1})^* \begin{bmatrix}1&0\\0&0\end{bmatrix} R(s_{n-1}) \times \begin{bmatrix} u_{n-2,j-2^{n-2}-2^{n-3}}^*(\vec{s}) & 0\\ 0 & 1\end{bmatrix} R(s_{n-1})^*$$ だから、

$$[p'_{n,j}] = \delta_1([u_{n-2,j-2^{n-2}-2^{n-3}}{}^*]) + [q_{n,j}]$$
$$= -\delta_1([u_{n-2,j-2^{n-2}-2^{n-3}}]) + [q_{n,j}]$$
$$= -[p_{n,j-2^{n-2}}] + [q_{n,j-2^{n-2}}] + [q_{n,j}]$$

$A_{n*}^{-1(0)}([q_{n,j}]) = [q_{n,j}]$　$[q_{n,j}] = [q_{n,j-2^{n-2}}]$であることを考えて

$$A_{n*}^{-1(0)}([p_{n,j}] - [q_{n,j}]) = -([p_{n,j-2^{n-2}}] - [q_{n,j-2^{n-2}}])$$

ゆえに、$(I_{n-2} \oplus T_2)_*^{-1(0)} = \begin{bmatrix} I_{2^{n-3}} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -I_{2^{n-3}} \\ 0 & 0 & I_{2^{n-3}} & 0 \\ 0 & I_{2^{n-3}} & 0 & 0 \end{bmatrix}$

$i = 1$ のとき、

$K_1(C(T^n))$の生成元を$K_i(C(T^{n-2}))$ $(i=0,1)$ の生成元で表す。

$1 \leqq j \leqq 2^{n-3}$ のとき

$$u_{n,j}(\vec{s}, s_{n-1}, s_n) = e^{2\pi i s_n p_{n-2,j}(\vec{s})} \cdot e^{-2\pi i s_n q_{n-2,j}(\vec{s})}$$

$2^{n-3}+1 \leqq j \leqq 2^{n-2}$ のとき

$$u_{n,j}(\vec{s}, s_{n-1}, s_n) = R(s_{n-1})\begin{bmatrix} u_{n-2,j-2^{n-3}}{}^*(\vec{s}) & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} R(s_{n-1})^* \begin{bmatrix} e^{2\pi i s_n} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$
$$\times R(s_{n-1})\begin{bmatrix} u_{n-2,j-2^{n-3}}(\vec{s}) & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} R(s_{n-1})^* \begin{bmatrix} e^{-2\pi i s_n} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$2^{n-2}+1 \leqq j \leqq 2^{n-2}+2^{n-3}$ のとき

$$u_{n,j}(\vec{s}, s_{n-1}, s_n) = e^{2\pi i s_{n-1} p_{n-2,j-2^{n-2}}(\vec{s})} \cdot e^{-2\pi i s_{n-1} q_{n-2,j-2^{n-2}}(\vec{s})}$$

$2^{n-2}+2^{n-3}+1 \leqq j \leqq 2^{n-1}$ のとき

$$u_{n,j}(\vec{s}, s_{n-1}, s_n) = u_{n-2,j-2^{n-2}-2^{n-3}}(\vec{s})$$

$A_{n*}^{-1(1)}$ で生成元をうつすと、

$1 \leqq j \leqq 2^{n-3}$ のとき

$$A_{n*}^{-1(1)}([u_{n,j}]) = -[u_{n,j+2^{n-2}}]$$

$2^{n-2}+1 \leqq j \leqq 2^{n-2}+2^{n-3}$ のとき

$$A_{n*}^{-1(1)}([u_{n,j}]) = [u_{n,j-2^{n-2}}]$$

$2^{n-2}+2^{n-3}+1 \leqq j \leqq 2^{n-1}$ のとき

$$A_{n*}^{-1(1)}([u_{n,j}]) = [u_{n,j}]$$

$2^{n-3}+1 \leqq j \leqq 2^{n-2}$ のとき、

$[A_n^{-1} u_{n,j}]$を計算する前に、次のことに注意しておく。

$K_1(C(T^n))$の生成元は定義のしかたから、次の様に書ける。

$$u_{n,j}(s_1,\cdots,s_n)=e^{2\pi i s_k p_{k-1}(s_1,\cdots,s_{k-1})}\cdot e^{-2\pi i s_k q_{k-1}(s_1,\cdots,s_{k-1})}$$

$$p_{k-1},\ q_{k-1}\in\bigcup_{N=1}^{\infty}\mathrm{Proj}\,M_N(C(T^{k-1}))\qquad k\in\mathbb{N}\qquad 1\leq k\leq n$$

$A^{-1(1)}_{n*}([u_{n,j}])$ $(2^{n-3}+1\leq j\leq 2^{n-2})$ の計算をする。

生成元を定める unitary $u_{n,j}$ の定義より

$$[u_{n,j}]=(\mathcal{S}_0\circ\mathcal{S}_1)([u_{n-2,\,j-2^{n-3}}])$$

上で注意したことにより

$$u_{n-2,\,j-2^{n-3}}(s_1,\cdots,s_{n-2})=e^{2\pi i s_k p_{k-1}(s_1,\cdots,s_{k-1})}\cdot e^{-2\pi i s_k q_{k-1}(s_1,\cdots,s_{k-1})}\quad 1\leq k\leq n-2$$

よって、$a(s_1,\cdots,s_{n-2})\equiv e^{2\pi i s_k p_{k-1}(s_1,\cdots,s_{k-1})}$, $b(s_1\cdots s_{n-2})\equiv e^{-2\pi i s_k q_{k-1}(s_1,\cdots,s_{k-1})}$

とおくと、$[u_{n,j}]=(\mathcal{S}_0\circ\mathcal{S}_1)([a])-(\mathcal{S}_0\circ\mathcal{S}_1)([b])$

$[w_1]\equiv(\mathcal{S}_0\circ\mathcal{S}_1)([a])$, $[w_2]\equiv(\mathcal{S}_0\circ\mathcal{S}_1)([b])$ を suspension の定義に従って書き下すと、

$$w_1(s_1,\cdots,s_n)=R(s_{n-1})\begin{bmatrix}e^{2\pi i s_k p_{k-1}(s_1,\cdots,s_{k-1})}&0\\0&1\end{bmatrix}R(s_{n-1})^*\begin{bmatrix}e^{2\pi i s_n}&0\\0&1\end{bmatrix}R(s_{n-1})$$
$$\times\begin{bmatrix}e^{2\pi i s_k p_{k-1}(s_1,\cdots,s_{k-1})}&0\\0&1\end{bmatrix}R(s_{n-1})^*\begin{bmatrix}e^{-2\pi i s_n}&0\\0&1\end{bmatrix}$$

$$w_2(s_1,\cdots,s_n)=R(s_{n-1})\begin{bmatrix}e^{-2\pi i s_k q_{k-1}(s_1,\cdots,s_{k-1})}&0\\0&1\end{bmatrix}R(s_{n-1})^*\begin{bmatrix}e^{2\pi i s_n}&0\\0&1\end{bmatrix}R(s_{n-1})$$
$$\times\begin{bmatrix}e^{2\pi i s_k q_{k-1}(s_1,\cdots,s_{k-1})}&0\\0&1\end{bmatrix}R(s_{n-1})^*\begin{bmatrix}e^{-2\pi i s_n}&0\\0&1\end{bmatrix}$$

従って、$A^{-1(1)}_{n*}([u_{n,j}])$ の代わりに $A^{-1(1)}_{n*}([w_1]-[w_2])$ を計算すればよい。 $\tilde{s}\equiv(s_1,\cdots,s_{k-1})$ とおいて、

$$(A_n^{-1}w_1)(s_1,\cdots,s_n)=R(s_n)\begin{bmatrix}e^{-2\pi i s_k p_{k-1}(\tilde{s})}&0\\0&1\end{bmatrix}R(s_n)^*\begin{bmatrix}e^{-2\pi i s_{n-1}}&0\\0&1\end{bmatrix}R(s_n)$$
$$\times\begin{bmatrix}e^{2\pi i s_k p_{k-1}(\tilde{s})}&0\\0&1\end{bmatrix}R(s_n)^*\begin{bmatrix}e^{2\pi i s_{n-1}}&0\\0&1\end{bmatrix}$$
$$=\begin{bmatrix}e^{-2\pi i s_{n-1}}&0\\0&1\end{bmatrix}R(s_n)R(s_n)^*\begin{bmatrix}e^{2\pi i s_{n-1}}&0\\0&1\end{bmatrix}R(s_n)\begin{bmatrix}e^{-2\pi i s_k p_{k-1}(\tilde{s})}&0\\0&1\end{bmatrix}$$

$$\times R(s_n)^*\begin{bmatrix} e^{-2\pi i s_{n-1}} & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} R(s_n) \begin{bmatrix} e^{2\pi i s_k p_{k-1}(\hat{s})} & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} R(s_n)^* \begin{bmatrix} e^{2\pi i s_{n-1}} & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\overset{1}{\sim} R(s_n) R(s_n)^* \begin{bmatrix} e^{2\pi i s_{n-1}} & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} R(s_n) \begin{bmatrix} e^{-2\pi i s_k p_{k-1}(\hat{s})} & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} R(s_n)^* \begin{bmatrix} e^{-2\pi i s_{n-1}} & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$
$$\times R(s_n) \begin{bmatrix} e^{2\pi i s_k p_{k-1}(\hat{s})} & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} R(s_n)^*$$

但し、$u \overset{1}{\sim} v$ は、u の定める K_1 の元と v の定める K_1 の元が等しいことを表わす。

ここで
$$U(s_1, \dots, s_n, t) \equiv R(s_n t) R(s_n)^* \begin{bmatrix} e^{2\pi i s_{n-1}} & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} R(s_n) \begin{bmatrix} e^{-2\pi i s_k p_{k-1}(\hat{s})} & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$
$$\times R(s_n)^* \begin{bmatrix} e^{-2\pi i s_{n-1}} & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} R(s_n) \begin{bmatrix} e^{2\pi i s_k p_{k-1}(\hat{s})} & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} R(s_n t)^*$$

とかくと、 $U \in C(I, U.C(C(T^n)))$

従って
$$(A_n^{-1} w_1)(s_1, \dots, s_n) \overset{1}{\sim} R(s_n)^* \begin{bmatrix} e^{2\pi i s_{n-1}} & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} R(s_n) \begin{bmatrix} e^{-2\pi i s_k p_{k-1}(\hat{s})} & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$
$$\times R(s_n)^* \begin{bmatrix} e^{-2\pi i s_{n-1}} & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} R(s_n) \begin{bmatrix} e^{2\pi i s_k p_{k-1}(\hat{s})} & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$V(s_1, \dots, s_n) \equiv R(s_n)^* \begin{bmatrix} e^{2\pi i s_{n-1}} & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} R(s_n) \begin{bmatrix} v_1(s_1, \dots, s_n) & 0 \\ 0 & v_2(s_1, \dots, s_n) \end{bmatrix} R(s_{n-1})^* \begin{bmatrix} e^{2\pi i s_n} & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} R(s_{n-1})$$
$$v_1(s_1, \dots, s_n) \equiv e^{-2\pi i (1 - s_{n-1}) s_n}, \quad v_2(s_1, \dots, s_n) \equiv e^{2\pi i (1 - s_{n-1}) s_n}$$

とおくと、 $V \in \bigcup_{N=1}^{\infty} U_N(C(T^n))$ となるから、

$$(A_n^{-1} w_1)(s_1, \dots, s_n) \overset{1}{\sim} V^*(s_1, \dots, s_n) R(s_n)^* \begin{bmatrix} e^{2\pi i s_{n-1}} & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} R(s_n) \begin{bmatrix} e^{-2\pi i s_k p_{k-1}(\hat{s})} & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$
$$\times R(s_n)^* \begin{bmatrix} e^{-2\pi i s_{n-1}} & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} R(s_n) V(s_1, \dots, s_n) \begin{bmatrix} e^{2\pi i s_k p_{k-1}(\hat{s})} & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$
$$= R(s_{n-1})^* \begin{bmatrix} e^{-2\pi i s_n} & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} R(s_{n-1}) \begin{bmatrix} e^{-2\pi i s_k p_{k-1}(\hat{s})} & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} R(s_{n-1})^* \begin{bmatrix} e^{2\pi i s_n} & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$
$$\times R(s_{n-1}) \begin{bmatrix} e^{2\pi i s_k p_{k-1}(\hat{s})} & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$
$$= R(s_{n-1})^* \begin{bmatrix} e^{-2\pi i s_n} & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} R(s_{n-1}) \begin{bmatrix} e^{-2\pi i s_k p_{k-1}(\hat{s})} & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} R(s_{n-1})^* \begin{bmatrix} e^{2\pi i s_n} & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} R(s_{n-1})$$
$$\times \begin{bmatrix} e^{2\pi i s_k p_{k-1}(\hat{s})} & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} R(s_{n-1})^* \begin{bmatrix} e^{-2\pi i s_n} & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e^{2\pi i s_n} & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} R(s_{n-1})$$

ここで、
$$V'(s_1, \dots, s_n, t) \equiv R(s_{n-1} t)^* \begin{bmatrix} e^{-2\pi i s_n} & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} R(s_{n-1}) \begin{bmatrix} e^{-2\pi i s_k p_{k-1}(\hat{s})} & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} R(s_{n-1})^*$$

$$\times\begin{bmatrix} e^{2\pi i s_n} & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} R(s_{n-1})\begin{bmatrix} e^{2\pi i s_k p_{k-1}(s')} & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} R(s_{n-1})^*\begin{bmatrix} e^{-2\pi i s_n} & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} e^{2\pi i s_n} & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} R(s_{n-1}t)$$

とかくと．　　$\nu' \in C(I, U_0(C(T^n)))$

従って，$(A_n^{-1} w_1)(s_1, \cdots, s_n) \overset{1}{\sim} \begin{bmatrix} e^{-2\pi i s_n} & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} R(s_{n-1})\begin{bmatrix} e^{-2\pi i s_k p_{k-1}(s')} & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} R(s_{n-1})^*$

$$\times\begin{bmatrix} e^{2\pi i s_n} & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} R(s_{n-1})\begin{bmatrix} e^{2\pi i s_k p_{k-1}(s')} & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} R(s_{n-1})^*\begin{bmatrix} e^{-2\pi i s_n} & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} e^{2\pi i s_n} & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\overset{1}{\sim} R(s_{n-1})\begin{bmatrix} e^{-2\pi i s_k p_{k-1}(s')} & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} R(s_{n-1})^*\begin{bmatrix} e^{2\pi i s_n} & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} R(s_{n-1})$$

$$\times\begin{bmatrix} e^{-2\pi i s_k p_{k-1}(s')} & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} R(s_{n-1})^*\begin{bmatrix} e^{-2\pi i s_n} & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = w_1(s_1, \cdots, s_n)$$

$$\therefore A_{n*}^{-1(1)}([w_1]) = [w_1]$$

w_2についても p_{k-1} の代わりに q_{k-1} として、w_1 と同様のことを行なえば　　$A_{n*}^{-1(1)}([w_2]) = [w_2]$

以上のことより　$(I_{n-2} \oplus T_2)_*^{-1(1)} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & I_{2^{n-3}} & 0 \\ 0 & I_{2^{n-3}} & 0 & 0 \\ -I_{2^{n-3}} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & I_{2^{n-3}} \end{bmatrix}$

命題

$$P_{n*}^{-1(0)} = \begin{array}{c} \\ \begin{bmatrix} 1 & 0 & & & & & & & 0 \\ 0 & 0 & & & & & & & (-1)^n \\ & 1 & 0 & & & & & \iddots & \\ & & 0 & & & & & & \\ & & 1 & & & & & (-1)^n & \\ & & & \ddots & & & 0 & 0 & \\ & & & & & & (-1)^n & 0 & \\ & & & & 1 & 0 & \cdots & 0 & \\ & & & & 0 & (-1)^n & & 0 & \end{bmatrix} \\ \uparrow \\ 2^{n-2}\text{列} \end{array}$$

$$P_{n*}^{-1(1)} = \begin{array}{c} 2^{n-2}\text{列} \\ \downarrow \\ \begin{bmatrix} & & & 0 & 1 & 0 & & \\ & & & (-1)^{n-1} & 0 & 0 & & \\ & & \iddots & & & 1 & 0 & \\ & & & & & 0 & 0 & \\ & & (-1)^{n-1} & & & & 1 & \\ & 0 & 0 & & & & & \ddots \\ & (-1)^{n-1} & 0 & & & & & \\ 0 & 0 & & & & & & 1 \\ (-1)^{n-1} & 0 & & & & & & 0 \end{bmatrix} \end{array}$$

となる。　　　　　但し書かれていない成分は 0

証) 計算をしてきた $(I_{n-2} \oplus T_2)_*^{-1(i)}$ $(i=0,1)$ 表現する行列、また、$P_{2*}^{-1(i)}$ $(i=0,1)$ を表現する行列、及び 補題2 を用いて帰納法により、命題は示される。　　　　(証終)

4. 例

接合積のK_i-groupをいくつか実際に計算してみる。

(i) $\sigma \equiv \begin{bmatrix} ab+1 & b \\ a & 1 \end{bmatrix} \in SL(2, \mathbb{Z})$　$a, b \in \mathbb{Z}$　$a \neq 0$, $b \neq 0$

とすると、　$K_0(C(T^2) \times_\sigma \mathbb{Z}) \cong \mathbb{Z}^2$

$K_1(C(T^2) \times_\sigma \mathbb{Z}) \cong \mathbb{Z}^2 \oplus \mathbb{Z}_{|a|} \oplus \mathbb{Z}_{|b|}$

(ii) $\sigma \equiv \begin{bmatrix} 1 & a \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \in SL(2, \mathbb{Z})$　$a \in \mathbb{Z}$　$a \neq 0$

とすると、　$K_0(C(T^2) \times_\sigma \mathbb{Z}) \cong \mathbb{Z}^3$

$K_1(C(T^2) \times_\sigma \mathbb{Z}) \cong \mathbb{Z}^3 \oplus \mathbb{Z}_{|a|}$

(iii) $\sigma \equiv \begin{bmatrix} 1 & a & b \\ 0 & 1 & c \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \in SL(3, \mathbb{Z})$　$a, b, c \in \mathbb{Z}$, $a \neq 0$, $b \neq 0$, $c \neq 0$

$\frac{b}{ac} \notin \mathbb{Z}$

とすると、　$K_i(C(T^3) \times_\sigma \mathbb{Z}) \cong \mathbb{Z}^4 \oplus \mathbb{Z}_{|c|} \oplus \mathbb{Z}_{|ac|}$
$(i = 0, 1)$

ここで、　$\mathbb{Z}_n \equiv \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$　n：整数

文　献

[1] A. Connes, *An analogue of Thom isomorphism for crossed products of a C^*-algebra by an action of $\mathbb{R}$*, Adv. Math. 39 (1981), 31-55.

[2] G. K. Pedersen, *C^*-algebras and their automorphism groups*, Academic Press, New York, (1979).

[3] M. Pimsner and D. Voiculescu, *Exact sequences for K-groups and Ext-groups of certain cross-product*

C^*-algebras, J. Operator Th. 4 (1980) 93-118.
[4] J. L. Taylor, "Banach algebras and topology," in Algebras and Analysis (J. H. Williamson, Ed.) Academic Press, New York, (1975).