数理解析研究所講究録
第559巻 1985年 1-18

退化する摩擦項をもつ波動方程式のエネルギー減衰

九大教養　中尾慎宏　(Mitsuhiro Nakao)

0. 序.

Ωをなめらかな境界$\partial\Omega$をもつR^Nの有界領域とし，次のような摩擦項をもつ波動方程式を考える。

$$\begin{cases} u_{tt} - \Delta u + a(x) u_t = f(x,t) \quad \text{in } \Omega \times (0,\infty) & (1) \\ u(x,0) = u_0(x), \quad u_t(x,0) = u_1(x), \quad u|_{\partial\Omega} = 0. & (2) \end{cases}$$

簡単のためしばらく $f \equiv 0$ としよう。よく知られているように，$a(x) \geq \varepsilon > 0$ ならば (1)—(2) の解 $u(t)$ のエネルギー

$$E(u(t)) \equiv \frac{1}{2}\left(\|u_t(t)\|^2 + \|\nabla u(t)\|^2 \right)$$

($\|\cdot\|$ は $L^2(\Omega)$ ノルム) は $t \to \infty$ のとき指数的に減衰する。(くわしい評価については Rauch [11] 参照。) もし $a(x) \geq 0$ で $a(x) = 0$ となり得るならばどうであろうか。Iwasaki [3], Dafermos [1] によれば Ω のある開集合で $a(x) > 0$

ならば $\lim_{t\to\infty} E(u(t))=0$ が成立する。この事実の証明はしかし，力学系の理論や概周期関数の性質に依拠しており，従って decay rate について何らかの示唆を与えるものではない。

この報告では，$a(x)$ に対するある分りやすい条件下 (1.6) で (1)−(2) の解のエネルギー減衰評価を導こう。さらに $N=1$ の場合には，同様の方法で非線型方程式：

$$\begin{cases} u_{tt}-u_{xx}+\rho(x,u_t)+\beta(x,u)=f(x,t) \quad \text{in } I\times[0,\infty) \\ u(0)=u_0,\quad u_t(0)=u_1 \quad ,\quad u|_{\partial I}=0 \end{cases} \tag{3}$$

（I は R の区間）も取扱えることを示したい。ここで ρ は $\rho\sim a(x)|u_t|^r u_t$ ，$\beta(x,u)$ は $\beta(x,u)\sim b(x)|u|^\alpha u$ のような非線型性をもつものである。

Russell [12] は抽象的な議論を展開しているが，それを (1)−(2) に適用すると次を得る：

$$E(u(t))\le C_k(1+t)^{-k} \tag{4}$$

ここで k は (u_0,u_1) のなめらかさの程度（たとえば $(u_0,u_1)\in H_{k+1}\times H_k$ で compatibility 条件をみたす）で，$a(x)$ については次の条件が課されている：

$$\liminf_{j\to\infty} \left(\omega_j \|\sqrt{a}\,\phi_j\|_U \right) \geq \exists\, \delta > 0, \tag{5}$$

ただし，U は $U \subset L^2$ なる Hilbert 空間，ω_j は $-\Delta$ の固有値（Dirichlet 条件下），ϕ_j は正規化された固有関数（L^2で）。条件(5) を explicite に書き下すのは極めて困難と思えるし，また彼の証明方法は control theory を用いる点でもそれ程簡単ではない。この報告では

$$a(x) \geq 0\ , \quad a(x) > 0 \ \ a.e.\ x \in \Omega, \quad a(x)^{-1} \in L^p(\Omega)\ ,\ 0<p<\infty \tag{6}$$

の仮定の下で $\overbrace{(1)-(2) \text{ および } (3)}^{\text{エネルギー法のみを用いて}}$ の解のエネルギー減衰評価を導くことにある。Russell の結果およびわれわれのそれが示唆することは 'a(x) の degeneracy は解の regularity によって補償される' ということである。

1. 線型方程式.

この節では，(1)−(2) について考える。存在定理を念のため書くと，たとえば，

定理 A. (cf. [2])　$m \geq 0$（整数），$a \in \mathcal{B}^{\max(m,2)}$，$f \in \bigcap_{i=0}^{m} \mathcal{E}_t^i(H_{m-i}) \cap \mathcal{E}_t^{m+1}(L^2)$ で $(u_0, u_1) \in H_{m+2} \cap \mathring{H}_1 \times H_{m+1} \cap \mathring{H}_1$ は $m+1$ 次の compatibility 条件をみたすとする。このとき (1)−(2) は $u \in \bigcap_{i=0}^{m+1} \mathcal{E}_t^i(H_{m+2-i})$ なる一意解をもつ。

先ず次の簡単な評価をみよう。

命題1. 定理Aの仮定に加えて,

$$M_0 \equiv \sup_{\substack{t \in R^+ \\ 0 \le i \le m}} \| f^{(i)}(t) \|_{H_{m-i}} < \infty \qquad \left(f^{(i)} \equiv \frac{\partial^i}{\partial t^i} f \right)$$

かつ

$$M_1 \equiv \max_{0 \le i \le m+1} \min \left(\int_0^\infty \int_\Omega a^{-1} |f^{(i)}|^2 dx dt , \int_0^\infty \| f^{(i)}(t) \| dt \right) < \infty$$

とする。このとき,

$$\sum_{i=0}^{m+1} \left\| \frac{\partial^i}{\partial t^i} u(t) \right\|_{H_{m+2-i}} \le C_0 < \infty$$

が成立する。ここで C_0 は $\|u_0\|_{H_{m+2}}$, $\|u_1\|_{H_{m+1}}$, M_0, M_1 に依存する定数。

略証) M_1 については $\int_0^\infty \| f^{(i)}(t) \| dt < \infty$, $i=1, \cdots m+1$ の方を仮定する。 $\frac{\partial^i}{\partial t^i} u = U$, $i=0,1,\cdots,m+1$, とおくと U は

$$\begin{cases} U_{tt} - \Delta U + a(x) U_t = f^{(i)} & (7) \\ U(0) = u_i , \quad U_t(0) = u_{i+1} , \quad U|_{\partial\Omega} = 0 \end{cases}$$

の解である。ここで $\{u_k\}_{k=2}^{m+1}$ は次で定まる。

$$u_k = -a\, u_{k-1} - \Delta u_{k-2} + f^{(k-2)}(x,0) . \qquad (8)$$

Compatibility 条件より $(u_k, u_{k+1}) \in H_2 \cap \mathring{H}_1 \times \mathring{H}_1$, $k=1,\cdots,m$, に注意。 (7) × U_t を積分して,

$$E(U(t)) + \int_0^t\int_\Omega a\, U_t^2\, dx\, ds = E(U(0)) + \int_0^t\int_\Omega f^{(\alpha)} U_t\, dx\, ds$$
$$\leq E(U(0)) + \int_0^t \|f^{(\alpha)}\| \sqrt{E(U(s))}\, ds$$

これより

$$E(U(t)) \leq \left(\sqrt{E(U(0))} + \frac{1}{2}\int_0^\infty \|f^{(\alpha)}(s)\|\, ds\right)^2 < \infty. \qquad (9)$$

(9)と楕円型方程式の正則性定理より結論が従う。

系 1. $m \geq m_0 \equiv [N/2]$ とする。この時，命題 1 の仮定の下で

$$\sup_{\substack{x\in\Omega \\ t\in R^+}} |u_t(x,t)| \leq C_0 < \infty.$$

略証） Sobolev の埋蔵定理よりあきらか。

結論と証明を述べよう。（[8] より少し結果は良くなっている。）

定理 1.（[8]） $a(x)$ について (6) を仮定する。m を $[N/2]$ に対して命題 1 の仮定がみたされているとする。さらに

$$\delta_0(t)^2 + \delta(t)^{(2p(m+1)+N)/2p(m+1)} = o\left(t^{-1-2p(m+1)/N}\right), \quad t\to\infty,$$

を仮定する。この時次が成立する。

$$E(u(t)) \le C_m\ (1+t)^{-2p(m+1)/N} \tag{10}$$

ここで，C_m は $\|u_0\|_{H_{m+2}}$, $\|u_1\|_{H_{m+1}}$ に依存する定数，

$$\delta_0(t) = \left(\int_t^{t+1} \|f(s)\|^2 ds\right)^{1/2}, \quad \delta_1(t) = \left(\int_t^{t+1}\int_\Omega a^{-1}(x) f(x,s)^2 dx ds\right)^{1/2}$$

である。

証明） 方程式 (1) × u_t を積分して，

$$\int_t^{t+1}\int_\Omega a(x) u_t^2 dx ds \le 2\{E(u(t)) - E(u(t+1))\} + \int_t^{t+1}\int_\Omega a^{-1}|f|^2 dx ds$$

$$\equiv D(t)^2. \tag{11}$$

ここで，仮定 (6) を用いると，

$$\int_t^{t+1} \|u_t(s)\|^2 ds = \int_t^{t+1}\int_\Omega a^{-p/(p+1)} a^{p/(p+1)} u_t^2 dx ds$$

$$\le \left(\int_\Omega a^{-p} dx\right)^{1/(p+1)} \left(\int_t^{t+1}\int_\Omega a |u_t|^{2(p+1)/p} dx ds\right)^{p/(p+1)}$$

$$\le \|a^{-1}\|_p^{p/(p+1)} \left(\int_t^{t+1}\int_\Omega a|u_t|^2 dx ds\right)^{p/(p+1)} \sup_{\substack{x\in\Omega \\ t\le s\le t+1}} |u_t(x,s)|^{2/(p+1)}$$

$$\le C\ D(t)^{2p/(p+1)} \sup_{\substack{x\in\Omega \\ t\le s\le t+1}} |u_t(x,s)|^{2/(p+1)}. \tag{12}$$

よって, $\exists t_1 \in [t, t+1]$, $\exists t_2 \in [t+3/4, t+1]$ s.t.

$$\|u_t(t_1)\|^2 \le C\ D(t)^{2p/(p+1)} \sup_{\substack{x\in\Omega \\ t\le s\le t+1}} |u_t(x,s)|^{2/(p+1)}. \quad (13)$$

次に, 方程式 $\times u$ を $\Omega\times[t_1, t_2]$ 上で積分すると,

$$\int_{t_1}^{t_2} \|\nabla u(s)\|^2 ds = (u(t_1), u_t(t_1)) - (u(t_2), u_t(t_2))$$

$$-\int_{t_1}^{t_2}\int_\Omega (a(x) u_t u + f u)\, dx ds$$

$$+\int_{t_1}^{t_2} \|u_t(s)\|^2 ds$$

$$\le \sum_{i=1}^{2} \|u(t_i)\|\ \|u_t(t_i)\| + \int_{t_1}^{t_2} \|u_t\|^2 ds$$

$$+\left(\int_{t_1}^{t_2}\int_\Omega a u_t^2 dx ds\right)^{1/2} \left(\int_{t_1}^{t_2} \|u(s)\|^2 ds\right)^{1/2} \|a\|_\infty$$

$$+\left(\int_{t_1}^{t_2} \|f(s)\|^2 ds\right)^{1/2} \left(\int_{t_1}^{t_2} \|u(s)\|^2 ds\right)^{1/2}.$$

さらに, (11), (12), (13) を用いて,

$$\int_{t_1}^{t_2} \|\nabla u(s)\|^2 ds \le C_0\ D(t)^{p/(p+1)} \sup_{t\le s\le t+1} \|u(s)\| \sup_{\substack{x\in\Omega \\ t\le s\le t+1}} |u_t(x,s)|^{1/(p+1)}$$

$$+ C_0 D(t)^{2p/(p+1)} \sup_{\substack{x\in\Omega \\ t\le s\le t+1}} |u_t(x,s)|^{2/(p+1)}$$

$$+ C_0 \left(D(t)^2 + \delta(t)^2 \right)$$

$$\equiv A(t)^2 .$$

これと(12)より

$$\int_{t_1}^{t_2} E(u(s))ds \le C A(t)^2$$

$$\therefore \quad \int_{t_1}^{t_2} E(u(t^*))ds \le C A(t)^2 , \quad \exists t^* \in [t_1, t_2] .$$

もう一度エネルギー等式を用いることによって,

$$\sup_{t\le s\le t+1} E(u(s)) \le E(u(t^*)) + \int_t^{t+1}\int_\Omega \left(a u_t^2 + |f u_t| \right) dx ds$$

$$\le C A(t)^2 . \qquad (14)$$

$\|u(s)\| \le C \; E(u(s))^{1/2}$ および

$$\sup_{x\in\Omega} |u_t(x,s)| \le C \|u_t(s)\|^{\theta} \| u_t(s) \|_{H_{m+1}}^{1-\theta} \qquad (15)$$

$$\le C \; E(u(s))^{\theta/2} \qquad \text{(命題 1 より)}$$

with $\theta = 1 - N/2(m+1)$ に注意し，Youngの不等式を用いて(14)を整理すると次を得る。

$$\sup_{t\le s\le t+1} E(u(s)) \le C_0\{ D(t)^{4p(m+1)/(2p(m+1)+N)} + D(t)^2 + \delta(t)^2\}$$

$$\le C_0\{ D(t)^{4p(m+1)/(2p(m+1)+N)} + \delta(t)^2\} \quad (16)$$

（$D(t)$：有界に注意）．

$D(t)$ の定義（(11)）を思い出して，(16)を変形すると，

$$\sup_{t\le s\le t+1} E(u(s))^{\{p(m+1)+N\}/2p(m+1)}$$

$$\le C_0\{ E(u(t)) - E(u(t+1)) + C\delta_0(t)^2 + C\delta(t)^{\{2p(m+1)+N\}/2p(m+1)}\}.$$

これに次の補題を適用すれば (10) を得る。

<u>補題</u> 1.（[6]）　$\phi(t)$ を R^+ 上の非負値関数で，次をみたすものとする。

$$\sup_{t\le s\le t+1} \phi(s)^{1+\alpha} \le C(1+t)^r(\phi(t) - \phi(t+1)) + g(t),\ C>0$$

with $r \le 1$． この時，

(i) $\alpha>0$，$-\infty<r<1$ かつ $g(t) = o(t^{-(1-r)(\alpha+1)/\alpha})$ as $t\to\infty$

ならば

$$\varphi(t) \le C_0 (1+t)^{-(1-\gamma)/\alpha},$$

(ii) $\alpha>0$, $\gamma=1$ かつ $g(t) = (\log t)^{(1+\alpha)/\alpha}$ as $t\to\infty$ ならば,

$$\varphi(t) \le C_0 \left(\log(t+2)\right)^{-1/\alpha}.$$

ここで C_0 は $\varphi(0)$ 等に依存する定数。

注意. [8] では (15) の代りに系1を用いたので結果は少し粗くなっている。しかし高階エネルギーの評価も与えている。

2. 非線型方程式.

この節では空間一次元の非線型波動方程式 (3) を考察する。簡単のため $\rho(x,u_t) = a(x)|u_t|^r u_t$, $-1<r<\infty$, とする。$a(x)$ については (6) の他 有界性 $a\in L^\infty(I)$ のみを仮定する。$\beta(x,u)$ はカラテオドリ条件をみたし, u について微分可能 かつ 次を満足するものとする。

(i) $\beta(x,u)u \ge 0$ (ii) $|\beta(x,u)| + |\frac{\partial}{\partial u}\beta(x,u)| \le C(M)$ a.e. $x\in I$

$\forall$ $|u|\le M$.

(3) の解の存在定理とそれがみたす差分不等式を次に述べる。細かい減衰評価はこの不等式から導かれる。

命題 2、 $-1 < r \le 2/p$ とする。 $(u_0, u_1) \in H_2 \cap \mathring{H}_1 \times \mathring{H}_1$, $f \in W^{1,2}_{loc}(R^+; L^2)$ に対して (3) は次のような解を一意的にもつ。

$$u \in W^{2,\infty}_{loc}(R^+; L^2) \cap W^{1,\infty}_{loc}(R^+; \mathring{H}_1) \cap L^2_{loc}(R^+; H_2 \cap \mathring{H}_1).$$

さらに次の不等式が成立する。

$$\sup_{t \le s \le t+1} E(u(s)) \le C \Big\{ D(t)^{4p(r+2)/(4p+pr+2)} \sup_{t \le s \le t+1} \| u_{tx}(s) \|^{\frac{2(2-pr)}{4p+pr+2}}$$

$$+ D(t)^{2(r+1)} + D(t)^{r+2} + \delta(t)^2 \Big\}. \qquad (17)$$

但し

$$E(u(t)) = \frac{1}{2} \| u_t(t) \|^2 + \frac{1}{2} \| u_x(t) \|^2 + \int_I \int_0^u \beta(x, s) \, ds \, dx,$$

$$D(t)^{r+2} = C \{ E(u(t)) - E(u(t+1)) \} + C \, \delta_0(t)^{(r+2)/(r+1)},$$

$$\delta(t)^2 = \int_t^{t+1} \| f(s) \|^2 ds, \qquad \delta_0(t)^2 = \int_t^{t+1} \int_I a^{-1} | f(s) |^2 dx \, ds.$$

上の命題において，解の存在証明は standard であり (cf. Lions & Strauss [4] etc.) (17) の導出は定理 1 の証明における (16) と平行になされるので証明はすべて省略する。(くわしくは [10]).

注意． $r \geqq 2/p$ のときは (17) の代わりに次を得る：

$$\sup_{t \leq s \leq t+1} E(u(s)) \leq C\{D(t)^2 + D(t)^{2(r+1)} + D(t)^{r+2} + \delta(t)^2\}.$$

これから，$\delta_0(t)^{(r+2)/(r+1)} + \delta(t)^{r+2} = o(t^{-1-2/r})$ の下で，

$$E(u(t)) \leq C_0(1+t)^{-2/r} \tag{18}$$

が従うが，この結果は nondegenerate な場合 $(a(t) \geqq \varepsilon_0 > 0)$ と一致する。([5]) (18) のためにはデータについては，$(u_0, u_1) \in \mathring{H}_1 \times L^2$，$f \in L^2_{loc}(R^+; L^2)$ で十分であることも注意しておく。退化しない場合には，もっと一般の発展方程式に対してくわしい結果が得られている (N. [6, 7], Yamada [13])。

以後，命題 2 の解 $u(t)$ について考える。(17) から $E(u(t))$ の decay 評価が導かれるわけだが，典型例として次の二つの定理をあげておこう。いずれも略証を与える。

定理 2.　$-1 < r \leq 2/p$ で，$\beta(x,u) \equiv 0$ とする。このとき，

$$\int_0^\infty \| f_t(t) \| dt < \infty, \quad \delta_0(t)^{(r+2)/(r+1)} + \delta(t)^{r+2} = o(t^{-1-\gamma_0})$$

の下で次が成立する。

$$E(u(t)) \leq C_1 (1+t)^{-\gamma_0}.$$

但し，C_1 は $\|u_0\|_{H_2}$, $\|u_1\|_{H_1}$ に依存する定数，γ_0 は次の定数である。

$$\gamma_0 = \begin{cases} 4p/(2+pr) & \text{if } p \geq -2(r+1)/r(r+3) \\ -2(r+1)/r & \text{if } 0 < p < \quad 〃 \end{cases}$$

定理 3.　$0 \leq r \leq 2$, $2r/(r^2+2r+4) < p \leq 2/r$ とし，β についてさらに次を仮定する；

$$\left| \frac{\partial}{\partial u} \beta(x,u) \right| \leq k_1 \, a(t)^{(2-pr)/(r+2)} |u|^\alpha, \quad \alpha \geq 0.$$

このとき，

(i) $\alpha > r(pr+2)/2p(r+2)$, $\delta_0(t)^{(r+2)/(r+1)} + \delta(t)^{(4p+pr+2)/2p} = o(t^{-1-4p/(pr+2)})$, $\int_0^\infty \| f_t \|^2 dt < \infty$ の下で

$$E(u(t)) \leq C_1 (1+t)^{-4p/(pr+2)},$$

iii) $0 \le \alpha \le r(pr+2)/2p(r+2)$, $\delta_0(t)^{(r+2)/(r+1)}(1+t)^{b_0} + \delta(t)^{(4p+2+pr)/2p} = O(t^{-1-4p/(pr+2)})$, $\int_0^\infty \|f_t\|^2 dt < \infty$

の下で，

$$E(u(t)) \le C_1(\varepsilon)(1+t)^{-4p(1-b_0)/(pr+2)}, \quad \forall \varepsilon > 0,$$

ただし，$b_0 \equiv \dfrac{2-pr}{2p(r+2)} \cdot \dfrac{r(pr+2)-2p(r+2)\alpha}{2+pr-(2-pr)\alpha}$.

定理２の略証) $\frac{\partial}{\partial s}\rho(x,s) \ge 0$ だから，方程式(3)を t で微分した式から

$$E(u_t(t)) = \frac{1}{2}\|u_{tt}(t)\|^2 + \frac{1}{2}\|u_{tx}(t)\|^2$$

$$\le E(u_t(0)) + \int_0^t \|f_t(s)\| \sqrt{E(u_t(s))}\, ds. \qquad (19)$$

従って

$$E(u_t(t)) \le \left(\frac{1}{2}\int_0^t \|f_t(s)\| ds + \sqrt{E(u_t(0))}\right)^2 \le C_1 < \infty.$$

これを(17)に代入し，$D(t)$ の有界性(やさしい)を用いると

$$\sup_{t \le s \le t+1} E(u(s))^{(r+2)/\eta} \le C_1\{E(u(t)) - E(u(t+1)) + C\delta_0^{(r+2)/(r+1)} + C\delta(t)^{2(r+2)/\eta}\},$$

ただし，$\eta = \min(4p(r+2)/(4p+pr+2),\ 2(r+1),\ r+2)$.

これに補題1を適用すればよい。

定理3の略証) (19)の代わりに次を得る。

$$E(u_t(t)) + (r+1)\int_0^t\int_I a(x)|u_t|^r|u_{tt}|^2\,dx\,ds$$

$$\leq E(u_t(0)) + C\int_0^t\int_I a(x)^\theta |u_t||u_{tt}||u|^\alpha\,dx\,ds + \int_0^t \|f_t\|\|u_{tt}\|\,ds$$

$(\theta = (2-pr)/(r+2))$.

ここで、$\int_0^\infty\int_I a(x)|u_t|^{r+2}\,dx\,ds < \infty$ を用いると、

$$C\int_0^t\int_I a(x)^\theta|u_t||u_{tt}||u|^\alpha\,dx\,ds$$

$$\leq \frac{r+1}{2}\int_0^t\int_I a(x)|u_t|^r|u_{tt}|^2\,dx\,ds + C\left(\int_0^t \|u(s)\|_\infty^{\alpha(r+2)/r}\,ds\right)^{2r/(r+2)}$$

と変形でき、従ってより

$$E(u_t(t)) \leq E(u_t(0)) + C\int_0^t \|f_t(s)\|\sqrt{E(u_t(s))}\,ds$$

$$+ C\left(\int_0^t \|u(s)\|_\infty^{\alpha(r+2)/r}\,ds\right)^{2r/(r+2)}. \qquad (20)$$

先ず $\|u(t)\|_\infty$ の有界性 ($E(u(t))$: bdd. より) と (20) から

$$E(u_t(t)) \leq C_1(1+t)^{2r/(r+2)}.$$

これを命題２の(17)式に代入して，補題１を用いると

$$E(u(t)) \le C_1(1+t)^{-4p(1-\mu_0)/(pr+2)} \tag{21}$$

with $\mu_0 = r(2-pr)/2p(r+2)$ (<1). (20), (21)より

$$E(u_t(t)) \le C_1(1+t)^{q_1}$$

with $q_1 = \max\left(0, \frac{2r}{r+2} - \frac{4p\alpha(1-\mu_0)}{pr+2}\right)$. この評価式を用いると，命題２から(21)よりさらにsharpな結果を得ることになる。この操作をくり返すことによって，次が得られる。

$$\left\{\begin{array}{l} E(u(t)) \le C_1(1+t)^{-4p(1-\mu_k)/(pr+2)} \\ E(u_t(t)) \le C_1(1+t)^{q_{k+1}}, \end{array}\right. \tag{22}$$

ただし，$\mu_0 = \frac{r(2-pr)}{p(r+2)}$ (<1), $\mu_k = \frac{(2-pr)q_k}{4p}$ かつ

$$q_{k+1} = \max\left(0, \frac{2r}{r+2} - \frac{4p\alpha(1-\mu_k)}{pr+2}\right), \quad k=0,1,2,\cdots.$$

$$\left\{\begin{array}{ll} \mu_k = 0 \quad (k:\text{十分大}) & \text{if } r(pr+2)/2p(r+2) < \alpha \\ \lim_{k\to\infty} \mu_k = b_0 & \text{if } 0 < \alpha \le r(pr+2)/2p(r+2) \end{array}\right.$$

より，結論を得る。

最後に退化する場合ではないが，類似の方法で証明できる興味深いと思われる結果を一つつけ加えよう。

$$\rho(x,u_t)=k_0|u_t|^{-r}u_t,\quad 0<r<1,\ (\text{sublinear}),\quad \beta(u)=k_1|u|^{\alpha}u,\ \alpha\geq 0$$

とする。もちろん $k_0>0$，$k_1>0$.

定理 4.1（[9]）　$\delta_0(t)=o(t^{-(1-r)/r})$，$\int_0^\infty \|f_t\|^2 dt<\infty$ のとき，命題 1 の解 $u(t)$ に対して次が成立：

$$E(u(t))\leq C_1(1+t)^{2-2/r}.$$

さらに，$(1-r)(1+\alpha)>1$，$\delta_1(t)\equiv\left(\int_t^{t+1}\|f_t(s)\|^2 ds\right)^{1/2}=o(t^{-1/r})$ ならば

$$E(u_t(t))\leq C_1(1+t)^{-2/r}$$

も得る。

以上。

References

[1] C.Dafermos, Asymptotic behavior of solutions of evolution equations, in Nonlinear Evolution Equations,M.G.Crandall ed.,Academic Press, New York (1978).

[2] M.Ikawa, Mixed problems for hyperbolic equations of second order, J.Math.Soc.Japan,Vol.20(1968),p.580-608.

[3] N.Iwasaki, Local decay of solutions for symmetric hyperbolic systems with dissipative and coercive boundary conditions in exterior domains, Publ.R.I.M.S.,Kyoto Univ., Vol.5,No.2(1969),p.193-218.

[4] J.L.Lions and W.A.Strauss, Some non-linear evolution equations,Bull.Soc.Math. France,93(1965),p.43-96.

[5] M.Nakao, Convergence of solutions of the wave equations with a dissipative term to the steady state, Mem.Fac. Sci.Kyushu Univ.,30(1976),p.257-265.

[6] M.Nakao, A difference inequality and its applications to nonlinear evolution equations,J.Math.Soc.Japan 30(1978) p.747-762.

[7] M.Nakao, Asymptotic stability for some nonlinear evolution equations of second order with unbounded dissipative terms, J.Differential Equations,Vol.30,No.1(1978),54-63.

[8] M.Nakao, Energy decay for the wave equation with a degenerate dissipative term, Proc.Royal Soc. Edinburgh Sec.A (1985),to appear.

[9] M.Nakao, Periodic solutions and decay for some nonlinear wave equations with sublinear dissipative terms, to appear.

[10] M.Nakao, Energy decay for the nonlinear wave equations with degenerate dissipative terms, to appear.

[11] J.Rauch, Qualitative behavior of dissipative wave equations on bounded domains, Arch.Rational Mech.Anal.,Vol.62(1976) p.77-85.

[12] D.L.Russell, Decay rates for weakly damped systems in Hilbert space, J.Differential Equations,Vol.19(1975),p.334-370.

[13] Y.Yamada, On the decay of solutions for some nonlinear evolution equations of second order,Nagoya Math.J.(1979) p.69-98.