数理解析研究所講究録
第 559 巻 1985 年 102-115

非線形半群の積公式とその応用

新潟大・工　小林 良和
(Yoshikazu Kobayashi)

X を Banach 空間、X_0 を X の閉部分集合，$\{C_h\}_{h>0}$ を X_0 から それ自身の中への縮小作用素の族とする；

$$\|C_h u - C_h \hat{u}\| \leqq \|u - \hat{u}\| \quad , u, \hat{u} \in X_0.$$

このとき，もし各 $u \in X_0$，$t \geqq 0$ に対し，X での極限

$$(1) \qquad T(t)u = \lim_{h \downarrow 0} C_h^{[t/h]} u$$

が有界な $t \geqq 0$ に対し一様に存在するならば、作用素の族 $\{T(t)\}_{t\geqq 0}$ は X_0 上の縮小半群になる。半群 $\{T(t)\}_{t\geqq 0}$ に対するこのような等式を（一般）積公式という。今，$u_0 \in X_0$ とし，各 $h>0$ に対し

$$u_h(t) = C_h^{[t/h]} u_0 \quad , t \geqq 0$$

とおくと，明らかに

$$\begin{cases} h^{-1}(u_h(t+h) - u_h(t)) = h^{-1}(C_h - I) u_h(t) \ , t \geqq 0 \\ u_h(0) = u_0 \end{cases}$$

がみたされる。ただし，I は X における恒等作用素である。よって，もし，適当な意味で

$$\lim_{h \downarrow 0} h^{-1}(C_h - I) = A$$

が確定するならば，

$$u(t) = T(t)u_0 = \lim_{h \downarrow 0} u_h(t)$$

は初期値問題

$$\begin{cases} \dfrac{du}{dt}(t) = Au(t) & , t > 0 \\ u(0) = u_0 \end{cases}$$

の解を与えると期待できる。この意味で，積公式はこのような発展方程式の解に対する1つの近似解法を与える。

実際にどのような状況下で積公式が成り立つかという問題は詳しく調べられているが，典型的な場合は次で与えられる。

定理1.（[3]） X_0 は X の閉凸集合，各 C_h は X_0 からそれ自身への縮小作用素，$A: X \to 2^X$ は $\overline{D(A)} = X_0$ であるような m-消散作用素とし，A で生成される X_0 上の縮小半群を $\{T(t)\}_{t \geq 0}$ とする。もし各 $w \in X_0$，$\lambda > 0$ に対し

(2) $$\lim_{h \downarrow 0} (I - \lambda h^{-1}(C_h - I))^{-1} w = (I - \lambda A)^{-1} w$$

ならば，積公式 (1) が各 $u \in X_0$，$t \geq 0$ に対し成り立ち，収束は有界な $t \geq 0$ に対し一様である。

ここでは，この定理を次の方程式の初期値問題の解の1つの表現を得るために用いる；

(3) $$u_t = \Delta\psi(u) \quad , t>0, \quad x\in\mathbb{R}^N$$

ただし，ここで $\psi:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ は非減少で C^1 級，$\psi(0)=0$ なるものとする。

この (3) に対する初期値問題の解作用素が $L^1(\mathbb{R}^N)$ 上の縮小半群を構成することは [1], [10] 等により示されている。以下の議論に都合のよい形でこれをまとめておく。

$L^1(\mathbb{R}^N)$ の作用素 A_0 を

$$A_0 u = \Delta\psi(u), \quad u\in D(A_0)=\{u\in L^1(\mathbb{R}^N)\cap L^\infty(\mathbb{R}^N);\ \Delta\psi(u)\in L^1(\mathbb{R}^N)\}$$

で定める。ただし Δ は超函数の意味で考える。さらに $L^1(\mathbb{R}^N)$ の作用素 A を A_0 の閉包として定める。このとき A は $\overline{D(A)} = L^1(\mathbb{R}^N)$ であるような m－消散作用素になる。A で生成される $L^1(\mathbb{R}^N)$ 上の縮小半群を $\{T(t)\}_{t\geqq 0}$ とかく。$u_0\in L^1(\mathbb{R}^N)\cap L^\infty(\mathbb{R}^N)$ のとき，$u(t,x)=(T(t)u_0)(x)$ は $C([0,\infty);L^1(\mathbb{R}^N))\cap L^\infty((0,\infty)\times\mathbb{R}^N)$ に属し，(3) が超函数の意味でみたされる。

この半群 $\{T(t)\}_{t\geqq 0}$ に対する1つの積公式を与えるために，次の条件をみたす急減少函数 $\rho:\mathbb{R}^N\to\mathbb{R}$ を1つ考える：

(4) $$\rho\geqq 0, \quad \int_{\mathbb{R}^N}\rho(\xi)d\xi = 1, \quad \int_{\mathbb{R}^N}\xi_i\rho(\xi)d\xi = 0,$$

$$\int_{\mathbb{R}^N}\xi_i\xi_j\rho(\xi)d\xi = \delta_{ij}, \quad i,j=1,2,\cdots,N.$$

（たとえば，$\rho(\xi)=(2\pi)^{-N/2}e^{-|\xi|^2/2}$.）この ρ を用いて，各 $h>0$ に対し，$\rho_h:\mathbb{R}^N\times\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ を

$$\rho_h(\xi,\eta)=\left(\frac{h}{2\psi'(\eta)+h}\right)^{N/2}\rho\left(\left(\frac{h}{2\psi'(\eta)+h}\right)^{1/2}\xi\right)$$

で，さらに作用素 $C_h:L^1(\mathbb{R}^N)\to L^1(\mathbb{R}^N)$ を

(5) $$C(C_h u)(x)=\int_{\mathbb{R}^N}\left(\int_0^{u(x-h\xi)}\rho_h(\xi,\eta)d\eta\right)d\xi\ ,\ x\in\mathbb{R}^N,$$

$(u\in L^1(\mathbb{R}^N))$ で定める。 このとき，各 C_h は $L^1(\mathbb{R}^N)$ から

それ自身の中への縮小作用素になる。実際に，$u,\hat{u}\in L^1(\mathbb{R}^N)$

のとき，

$$\begin{aligned}&C(C_h u)(x)-C(C_h\hat{u})(x)\\&=\int_{\mathbb{R}^N}\left(\int_{\hat{u}(x-h\xi)}^{u(x-h\xi)}\rho_h(\xi,\eta)d\eta\right)d\xi\\&=\int_{\mathbb{R}^N}\left(\int_0^1\rho_h(\xi,\theta u(x-h\xi)+(1-\theta)\hat{u}(x-h\xi))d\theta\right.\\&\qquad\left.\cdot(u(x-h\xi)-\hat{u}(x-h\xi))\right)d\xi\end{aligned}$$

だから，Fubiniの定理により，

$$\begin{aligned}&\int_{\mathbb{R}^N}|C(C_h u)(x)-C(C_h\hat{u})(x)|dx\\&\leqq\int_{\mathbb{R}^N}\int_{\mathbb{R}^N}\int_0^1\rho_h(\xi,\theta u(x-h\xi)+(1-\theta)\hat{u}(x-h\xi))d\theta\\&\qquad\cdot|u(x-h\xi)-\hat{u}(x-h\xi)|\,d\xi dx\\&=\int_{\mathbb{R}^N}\int_{\mathbb{R}^N}\int_0^1\rho_h(\xi,\theta u(x)+(1-\theta)\hat{u}(x))\,d\theta\\&\qquad|u(x)-\hat{u}(x)|dx\,d\xi\\&=\int_{\mathbb{R}^N}|u(x)-\hat{u}(x)|dx\end{aligned}$$

である。同様に，$\|C_h u\|_1\leqq\|u\|_1$ となる。これらの

作用素 C_h を用いて半群 $\{T(t)\}_{t\geqq0}$ は次のように表現さ

れる。

定理2. 各 $u \in L^1(\mathbb{R}^N)$, $t \geqq 0$ に対し

$$(6) \qquad T(t)u = \lim_{h \downarrow 0} C_h^{[t/h]} u \quad \text{in } L^1(\mathbb{R}^N)$$

が成り立つ。収束は有界な $t \geqq 0$ に対し一様である。

公式(6)は保存型1階方程式

$$u_t + \nabla \cdot \phi(u) = 0$$

の初期値問題に対する Giga-Miyakawa [4], 私自身の研究 [5], [6] と, 方程式

$$u_t + \nabla \cdot \phi(u) = \mu \Delta u \qquad (\mu > 0)$$

に対する Miyakawa [8] の研究に示唆されたものである。方程式(3)が線形 $(\psi'(u) = \mu > 0)$ の場合, $\rho(\xi) = (2\pi)^{-N/2} e^{-|\xi|^2/2}$, $\rho_h(\xi, u) = (h/2\mu)^{N/2} \rho((h/2\mu)^{1/2}\xi)$ とおいて C_h を定めれば, C_h 自身がよく知られた熱方程式の初期値問題の解の積分表示を与える。またこの場合等式(6)自身は中心極限定理の特別な形とみなすことができる。

定理1を用いて定理2を示すためには, 今考えている $\{C_h\}_{h>0}$ に対し等式(2)を調べればよい。このため, いくつかの補題を準備する。$y \in \mathbb{R}^N$ に対し, $\tau^y : L^1(\mathbb{R}^N) \to L^1(\mathbb{R}^N)$ を

$$(\tau^y u)(x) = u(x+y) \quad , \quad x \in \mathbb{R}^N$$

で定める。また,

$$\mathrm{sign}(\eta)=\begin{cases}1 & ; \quad \eta>0\\ 0 & ; \quad \eta=0\\ -1 & ; \quad \eta<0\end{cases}$$

とおく。

補題1. $u, \hat{u} \in L^1(\mathbb{R}^N)$, $h>0$ とする。このとき、

(i) $\|C_h u - C_h \hat{u}\|_1 \leqq \|u-\hat{u}\|_1$

(ii) $\|C_h u\|_1 \leqq \|u\|_1$

(iii) $\tau^y C_h = C_h \tau^y$, $y \in \mathbb{R}^N$

(iv) $u \in L^\infty(\mathbb{R}^N)$ のとき、 $C_h u \in L^\infty(\mathbb{R}^N)$ で

$\|C_h u\|_\infty \leqq \|u\|_\infty$

(v) $|(C_h u)(x)| - |u(x)|$

(7) $\leqq \int_{\mathbb{R}^N} \int_{u(x)}^{u(x-h\xi)} \mathrm{sign}(\eta)\,\rho_h(\xi,\eta)\,d\eta\,d\xi, \quad x \in \mathbb{R}^N$

証明. (i)(ii) はすでに示した。(iii) は明らか。(iv) を示すために $u \in L^\infty(\mathbb{R}^N)$ とする。任意の $k \in \mathbb{R}$ に対し

$$\int_{\mathbb{R}^N} \left(\int_0^k \rho_h(\xi,\eta)\,d\eta \right) d\xi = k$$

である。よって、

(8) $$(C_h u)(x) - k = \int_{\mathbb{R}^N} \left(\int_k^{u(x-h\xi)} \rho_h(\xi,\eta)\,d\eta \right) d\xi$$

が成り立つ。ここで、$k = \pm \|u\|_\infty$ とおけば、$\rho_h \geqq 0$ だから、それぞれ

$$(C_h u)(x) - \|u\|_\infty \leqq 0, \qquad (C_h u)(x) + \|u\|_\infty \geqq 0$$

を得る。よって (iv) が成り立つ。

不等式 (7) を示す。$\mathrm{sign}(\cdot)$ は非減少だから、(8) より、任意の $k \in \mathbb{R}$ に対し、

$$\mathrm{sign}(k)(C(C_h u)(x)-k)$$
$$=\int_{\mathbb{R}^N}\left(\int_k^{u(x-h\xi)}\mathrm{sign}(k)\rho_h(\xi,\eta)d\eta\right)d\xi$$
$$\leqq\int_{\mathbb{R}^N}\left(\int_k^{u(x-h\xi)}\mathrm{sign}(\eta)\rho_h(\xi,\eta)d\eta\right)d\xi$$

が成り立つ。一方，任意の $k\in\mathbb{R}$ に対し，

$$|k|-|u(x)|=-\int_k^{u(x)}\mathrm{sign}(\eta)d\eta$$
$$=-\int_{\mathbb{R}^N}\left(\int_k^{u(x)}\mathrm{sign}(\eta)\rho_h(\xi,\eta)d\eta\right)d\xi$$

が成り立つ。よって，

$$|k|-|u(x)|+\mathrm{sign}(k)(C(C_h u)(x)-k)$$
$$\leqq\int_{\mathbb{R}^N}\left(\int_{u(x)}^{u(x-h\xi)}\mathrm{sign}(\eta)\rho_h(\xi,\eta)d\eta\right)d\xi$$

を得る。ここで，$k=C(C_h u)(x)$ とおけば，さらに (7) を得る。（証明終）

簡単のため，$A_h=h^{-1}(C_h-I)$ とかき，さらに $J_{\lambda,h}=(I-\lambda A_h)^{-1}$ とかく。補題 1 の C_h の各性質から，容易に A_h のレゾルベント $J_{\lambda,h}$ の次の各性質が導かれる。

補題2. $w,\hat{w}\in L^1(\mathbb{R}^N)$，$\lambda,h>0$ とする。このとき

(i) $\|J_{\lambda,h}w-J_{\lambda,h}\hat{w}\|_1\leqq\|w-\hat{w}\|_1$

(ii) $\|J_{\lambda,h}w\|_1\leqq\|w\|_1$

(iii) $\tau_y J_{\lambda,h}=J_{\lambda,h}\tau_y$ 　　，$y\in\mathbb{R}^N$

(iv) $w\in L^\infty(\mathbb{R}^N)$ ならば，$J_{\lambda,h}w\in L^\infty(\mathbb{R}^N)$ で

$$\|J_{\lambda,h}w\|_\infty \leqq \|w\|_\infty$$

(v) $\lambda^{-1}(|(J_{\lambda,h}w)(x)| - |w(x)|)$

(9) $\leqq h^{-1}\int_{\mathbb{R}^N}\left(\int_{(J_{\lambda,h}w)(x)}^{(J_{\lambda,h}w)(x-h\xi)} \mathrm{sign}(\eta)\, \rho_h(\xi,\eta)\, d\eta\right) d\xi,\ x \in \mathbb{R}^N.$

証明．いづれも容易である。(v)のみ示す。(7)で $u = J_{\lambda,h}w$ とおけば

$$|(C_h J_{\lambda,h}w)(x)| - |(J_{\lambda,h}w)(x)|$$

$$\leqq \int_{\mathbb{R}^N}\left(\int_{(J_{\lambda,h}w)(x)}^{(J_{\lambda,h}w)(x-h\xi)} \mathrm{sign}(\eta)\, \rho_h(\xi,\eta)\, d\eta\right) d\xi$$

である。$J_{\lambda,h}w$ の定義により

$$C_h J_{\lambda,h}w - J_{\lambda,h}w = \frac{h}{\lambda}(J_{\lambda,h}w - w)$$

だから

$$|(C_h J_{\lambda,h}w)(x)| - |(J_{\lambda,h}w)(x)|$$

$$\geqq \mathrm{sign}((J_{\lambda,h}w)(x))\,((C_h J_{\lambda,h}w)(x) - (J_{\lambda,h}w)(x))$$

$$= \mathrm{sign}((J_{\lambda,h}w)(x))\,\frac{h}{\lambda}((J_{\lambda,h}w)(x) - w(x))$$

$$\geqq \frac{h}{\lambda}(|(J_{\lambda,h}w)(x)| - |w(x)|)$$

である。よって．(9)が成り立つ。（証明終）

補題3．$w \in L^1(\mathbb{R}^N) \cap L^\infty(\mathbb{R}^N)$，$\lambda > 0$ のとき，集合 $\{J_{\lambda,h}w\,;\ 0 < h < 1\}$ は $L^1(\mathbb{R}^N)$ で precompact である。

証明．$w \in L^1(\mathbb{R}^N) \cap L^\infty(\mathbb{R}^N)$，$\lambda > 0$ とし，$u_h = J_{\lambda,h}w$ とおく。補題2(ii)より

(10) $$\sup_{h>0} \|u_h\|_1 \leqq \|w\|_1$$

である。補題2 (i) (iii) より

$$\|\tau^y u_h - u_h\|_1 = \|J_{\lambda,h}\tau^y w - J_{\lambda,h} w\|_1$$
$$\leqq \|\tau^y w - w\|_1, \quad y \in \mathbb{R}^N.$$

よって，

(11) $$\sup_{h>0} \|\tau^y u_h - u_h\|_1 \longrightarrow 0 \quad (y \to 0)$$

である。(10), (11) により 集合 $\{u_h ; 0<h<1\}$ は $L^1_{loc}(\mathbb{R}^N)$ で precompact である。したがって，この集合が $L^1(\mathbb{R}^N)$ で precompact であるためには

(12) $$\sup_{0<h<1} \int_{|x|>R} |u_h(x)|dx \longrightarrow 0 \quad (R \to \infty)$$

であればよい。これを示すために，$g \in C^\infty(\mathbb{R}^N)$ を

$$0 \leqq g \leqq 1, \quad g(s)=0 \quad (s \leqq 0), \quad g(s)=1, \ (s \geqq 1)$$

なものとし，さらに，各 $R>r>0$ に対し，$f^{R,r} \in C^\infty(\mathbb{R}^N)$ を

$$f^{R,r}(x) = g\left((R-r)^{-1}(|x|-r)\right), \quad x \in \mathbb{R}^N$$

で定める。明らかに，

(13) $$\int_{|x|<R} |u_h(x)|dx - \int_{|x|<r} |w(x)|dx$$
$$\leqq \int_{\mathbb{R}^N} \left(|u_h(x)| - |w(x)|\right) f^{R,r}(x)dx$$

である。補題2 (v) により

(14) $$\int_{\mathbb{R}^N} \left(|u_h(x)| - |w(x)|\right) f^{R,r}(x)dx$$

$$\leqq \frac{\lambda}{h}\int_{\mathbb{R}^N}\int_{\mathbb{R}^N}\left(\int_{u_h(x)}^{u_h(x-h\xi)} \mathrm{sign}(\eta)\rho_h(\xi,\eta)d\eta\right) f^{R,r}(x)\,dx\,d\xi$$

$$= \lambda\int_{\mathbb{R}^N}\int_{\mathbb{R}^N}\int_0^{u_h(x)} \mathrm{sign}(\eta)\rho_h(\xi,\eta)d\eta$$

$$h^{-1}(f^{R,r}(x+h\xi)-f^{R,r}(x))\,d\xi\,dx$$

$$= \lambda\int_{\mathbb{R}^N}\int_{\mathbb{R}^N}\int_0^{u_h(x)} \mathrm{sign}(\eta)\rho_h(\xi,\eta)d\eta$$

$$\{h^{-1}(f^{R,r}(x+h\xi)-f^{R,r}(x))-\xi\cdot\nabla f^{R,r}(x)\}\,d\xi\,dx$$

である。ただし，ここで $\int_{\mathbb{R}^N}\xi_i\rho_h(\xi,\eta)d\xi=0$ であることを用いた。

Taylor展開式により

$$h^{-1}(f^{R,r}(x+h\xi)-f^{R,r}(x))-\xi\cdot\nabla f^{R,r}(x)$$

$$\leqq \frac{Nh}{2}\sum_{i=1}^{N}|\xi_i|^2\cdot\sup_{i,j}\left\|\frac{\partial^2 f^{R,r}}{\partial x_i\partial x_j}\right\|_\infty$$

である。したがって，

$$\int_{\mathbb{R}^N}|\xi_i|^2\rho_h(\xi,\eta)d\xi = h^{-1}(2\varphi'(\eta)+h)$$

であることに注意すれば (14)より

$$\int_{\mathbb{R}^N}(|u_h(x)|-|w(x)|)f^{R,r}(x)dx$$

$$\leqq \lambda N^2\int_{\mathbb{R}^N}\int_0^{u_h(x)}\mathrm{sign}(\eta)\left(\varphi'(\eta)+\frac{h}{2}\right)d\eta\,dx\ \sup_{i,j}\left\|\frac{\partial^2 f^{R,r}}{\partial x_i\partial x_j}\right\|_\infty$$

$$\leqq \lambda N^2\left(\sup_{|\eta|\leqq\|u_h\|_\infty}\varphi'(\eta)+\frac{h}{2}\right)\int_{\mathbb{R}^N}|u_h(x)|dx\ \sup_{i,j}\left\|\frac{\partial^2 f^{R,r}}{\partial x_i\partial x_j}\right\|_\infty$$

$$\leq \lambda N^2 \Big(\sup_{|r| \leq \|w\|_\infty} + \frac{h}{2} \Big) \cdot \|w\|_1 \sup_{i,j} \Big\| \frac{\partial^2 f^{R,r}}{\partial x_i \partial x_j} \Big\|_\infty$$

であることが知られる。ただしここで (10) と補題2 (iv) より従う $\sup_{h>0} \|u_h\|_\infty \leq \|w\|_\infty$ を用いた。上式の最右辺は $R \to \infty$ のとき，有界な $h>0$ に関し，一様に 0 に収束する。よって，(13) により

$$\overline{\lim_{R\to\infty}} \Big(\sup_{0<h<1} \int_{|x|>R} |u_h(x)|\,dx \Big) \leq \int_{|x|>r} |w(x)|\,dx$$

を得る。右辺は $r \to \infty$ のとき 0 に収束するから (12) が成り立つことがわかる。（証明終）

定理2の証明．各 $w \in L^1(R^N)$, $\lambda > 0$ に対し

$$\lim_{h \downarrow 0} J_{\lambda,h} w = (I - \lambda A)^{-1} w \quad \text{in } L^1(R^N)$$

であることを示せばよい。$L^1(R^N) \cap L^\infty(R^N)$ は $L^1(R^N)$ で稠密で，$J_{\lambda,h}$, $(I-\lambda A)^{-1}$ は縮小的であるから，$w \in L^1(R^N) \cap L^\infty(R^N)$ に対しこれを示せば十分である。$w \in L^1(R^N) \cap L^\infty(R^N)$, $\lambda > 0$ を固定し，$u_h = J_{\lambda,h} w$ とかく。補題3により，集合 $\{u_h ; 0<h<1\}$ は $L^1(R^N)$ で precompact だから，ある $u \in L^1(R^N)$ とある列 $\{h(n)\}$ で

$$\| u_{h(n)} - u \|_1 \to 0, \quad u_{h(n)}(x) \to u(x) \text{ a.e}$$

$(n \to \infty)$ となるものがある。

$u \in D(A_0)$で，$\lambda^{-1}(u-w)=A_0 u$，したがって $u=(I-\lambda A_0)^{-1}w=(I-\lambda A)^{-1}w$ であることを示せばよい。

まず，補題2(iv)より，$u \in L^\infty(\mathbb{R}^N)$である。$f \in C_0^\infty(\mathbb{R}^N)$とする。

$$\lambda^{-1}(u_h(x)-w(x))=(A_h u_h)(x)=h^{-1}((C_h u_h)(x)-u_h(x))$$
$$=h^{-1}\int_{\mathbb{R}^N}\left(\int_{u_h(x)}^{u_h(x-h\xi)}\rho_h(\xi,\eta)d\eta\right)d\xi$$

だから

$$\int_{\mathbb{R}^N}\lambda^{-1}(u_h(x)-w(x))f(x)dx$$
$$=\int_{\mathbb{R}^N}\int_{\mathbb{R}^N}\int_0^{u_h(x)}\rho_h(\xi,\eta)d\eta\, h^{-1}(f(x+h\xi)-f(x))d\xi dx$$
$$=\int_{\mathbb{R}^N}\int_{\mathbb{R}^N}\int_0^{u_h(x)}\rho(\xi)h^{-1}(f(x+\sqrt{h(2\psi'(\eta)+h)}\xi)$$
$$-f(x))d\eta dx d\xi$$
$$=\int_{\mathbb{R}^N}\int_{\mathbb{R}^N}\int_0^{u_h(x)}\rho(\xi)\sqrt{\frac{2\psi'(\eta)+h}{h}}$$
$$\int_0^1 \xi\cdot(\nabla f(x+\sqrt{h(2\psi'(\eta)+h)}\theta\xi)-\nabla f(x))d\theta$$
$$d\eta dx d\xi$$

である。ここで $\int_{\mathbb{R}^N}\xi_i\rho(\xi)d\xi=0$ であることを再び用いた。

$|u_h(x)|\leq\|w\|_\infty$ a.e. であることに注意して，$h=h(n)\to 0$ とすれば，Lebesgue の収束定理により

$$\int_{\mathbb{R}^N} \lambda^{-1}(u(x)-w(x))f(x)dx$$

$$= \int_{\mathbb{R}^N}\int_{\mathbb{R}^N}\int_0^{u(x)} \rho(\xi)(2\psi'(\eta))\int_0^1 \theta d\theta$$

$$\sum_{i,j=1}^N \xi_i\xi_j \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(x)\, d\eta\, dx\, d\xi$$

$$= \int_{\mathbb{R}^N} \psi(u(x))\Delta f(x)dx$$

を得る。ただし，ここで $\int_{\mathbb{R}^N} \xi_i\xi_j\rho(\xi)d\xi = \delta_{ij}$ であることを用いた。よって，$\Delta\psi(u) = \lambda^{-1}(u-w) \in L^1(\mathbb{R}^N)$ で，$u \in D(A_0)$，$\lambda^{-1}(u-w) = A_0 u$ であることが示された。(証明終)

文 献

[1] Ph. Bénilan, H. Brezis and M. Crandall, A semilinear equation in L^1, Ann. Scu. Norm. Pisa 2(1975), 523-555.

[2] H. Brezis and M. Crandall, Uniqueness of solutions of the initial-value problem for $u_t - \Delta\phi(u)=0$, J. Math. Pure Appli. 58(1979), 153-163.

[3] H. Brezis and A. Pazy, Convergence and approximation of nonlinear semigroups in Banach spaces, J. Funct. Anal., 9 (1972), 63-74.

[4] Y. Giga and T. Miyakawa, A kinetic constructions of global solutions of first order quasilinear equations, Duke Math. J., 50(1983), 505-515.

[5] Y. Kobayashi, A new operator theoretic algorithm for solving first order scalar quasilinear equations, to appear.

[6] Y. Kobayashi, A product formula approach to first order quasilinear equations, Hiroshima Math. J., 14(1985), 589-509.

[7] 宮寺功, 非線形半群, 紀伊國屋 (1977)

[8] T. Miyakawa, A kinetic method to derive the viscosity term for scalar conservation law, Hiroshima Math. J., 14(1984), 299-310.

[9] S. Oharu and T. Takahashi, A convergence theorem of nonlinear semigroups and its application to first order quasilinear equations, J. Math. Soc. Japan, 26(1974), 124-160.

[10] M. Watanabe, An approach by difference to a quasi-linear parabolic equations, Proc. Japan Acad., 59(1983), 375-378.

[11] A.Vol'pert and S. Hudajev, Cauchy problems for degenerates second order quasilinear parabolic equation, Math. USSR Sbornik, (1969), 365-387.