数理解析研究所講究録
第 560 巻 1985 年 12-25

双曲型葉層 C^*-環について

都立大理　髙井博司

§0. 序　　2次元 torus T^2 上の Kronecker 葉層 $\mathcal{F}_\theta$ ($\theta \notin Q$) について，その葉層 C^*-環 $C^*(T^2, \mathcal{F}_\theta)$ は，無理数回転 C^*-環 $\mathcal{O}\!\iota_\theta$ に安定同型である。Pimsner-Voiculescu の結果から，$\mathcal{O}\!\iota_\theta$ は $K_0(\mathcal{B}_\theta) \simeq \mathbb{Z} + \theta\mathbb{Z}$ なる (AF)-環 $\mathcal{B}_\theta$ に埋め込み可能であることを使って，$C^*(T^2, \mathcal{F}_\theta)$ の K-理論 $K_*(T^2/\mathcal{F}_\theta)$ は $K^*(T^2)$ に同型であることが示される。よって $C^*(T^2, \mathcal{F}_\theta)$ は (AF)-環ではない。一方 $C^*(T^2, \mathcal{F}_\theta)$ は C^*-接合積 $C(T^2) \times \mathbb{R}$ に同型であるから，strongly aminable (SA) である。しかるに (AF) と (SA) の差は多大であるので，$C^*(T^2, \mathcal{F}_\theta)$ をもっと詳しく代数的性質を調べる必要がある。今 $\theta \in \bigcup_{g \in SL(2,\mathbb{Z})} Sp(g)$ とすると $\mathcal{F}_\theta$ は双曲型 (minimal) 葉層となる事実より，上記結果は次の問題を提起させる：

(I)　$(M, \mathcal{F})$ を (topological mixing) 微分同相 g から作られる双曲型葉層化多様体としたとき，その葉層 C^*-環 $C^*(M, \mathcal{F})$ は I-型 C^*-環の inductive limit (AI)-環か？

(II)　(I) の setting で，$C^*(M, \mathcal{F})$ は (AF) でなく，かつ

適当な (AF) に埋め込み可能か？

(III) (I) の *setting* で, $K_j(M/\mathcal{F})$ は $K^{j+\dim\mathcal{F}}(M)$ に同型か？ $(j=0,1)$

本稿では上記 (I)〜(III) それぞれについて現在まで得られた結果を報告する. 即ち, 先ず (III) については次の結果がある：

<u>定理（[7]）</u> M が *infra-homogeneous* ならば, (III) が成り立つ。

しかし Handel-Thurston により, *infra-homogeneous* でない適当な3次元多様体 M^3 上に双曲型葉層 $\mathcal{F}$ が存在するので, $(M^3,\mathcal{F})$ について (III) が成り立つかどうか *check* が必要である。

(I)〜(II) については次が得られる：

[I] (I) の *setting* で, $C^*(M,\mathcal{F})$ は *approximately homogeneous* (AH) である.

[II] $\mathcal{F}$ が *transversely* (K-)*oriented* かつ $\operatorname{codim}\mathcal{F}$ が奇数ならば, $C^*(M,\mathcal{F})$ は (AF) でない。更に A を $\mathcal{G}$ の *transition matrix* としたとき, $C^*(M,\mathcal{F})$ は Cuntz-Krieger (AF)-環 $\mathcal{O}_A$ に埋め込み可能である, ただし $\mathcal{O}_A$ は Cuntz-Krieger 環 $\mathcal{O}_A$ の *gauge* 作用による不動点全体 $\mathcal{O}_A^{\tau}$ と *compact* 作用素全体の成す C^*-環 $\mathcal{C}(\mathcal{H})$ との *tensor* 積 $\mathcal{O}_A^{\tau}\otimes\mathcal{C}(\mathcal{H})$ である。

以下 [I]〜[II] を順次その概略を述べることにする。

§1. 準備　compact C^∞－多様体 M 上の topologically mixing な微分同相写像 φ で双曲型であるものを考える。そのとき

$$W(x) = \{ y \in M \mid d(\varphi^n(x), \varphi^n(y)) \longrightarrow 0 \ (n \to +\infty) \}, (x \in M)$$

なる集合は M の部分多様体で，$\mathcal{F} = \{W(x)\}_{x \in M}$ は M の葉層構造を与える。φ が top. mixing より，$\mathcal{F}$ は minimal になる。即ち任意の $W(x)$ は M で dense になる。φ の transition matrix を A とすると，$A^m > 0$ なる $m \geq 1$ が存在する。(M, φ) の symbolic dynamics を (Σ_A, σ) で表わすと，即ち

$$(1.1) \quad \begin{cases} \Sigma_A = \{ \omega \in \prod_{-\infty}^{\infty} \{1, \cdots, n\} \mid A_{\omega_j \omega_{j+1}} = 1 \} \\ \sigma(\omega)_j = \omega_{j+1} \quad (j \in \mathbb{Z}) \end{cases}$$

とすると，$\pi : \Sigma_A \to M$ なる surjective continuous 写像で

$$(1.2) \qquad \pi \circ \sigma = \varphi \circ \pi$$

を満たすものがとれる。今 $\{\omega^{(k)}\}_{k=1}^{n} \subset \Sigma_A$ を $V(\pi(\omega^{(k)})) \cap V(\pi(\omega^{(l)})) = \phi$ $(k \neq l)$ となる様に選ぶ，ただし

$$V(x) = \{ y \in M \mid d(\varphi^n(x), \varphi^n(y)) \longrightarrow 0 \ (n \to -\infty) \}$$

なる M の部分多様体である。そこで Σ_A^+ の compact open 集合 E_k を

$$E_k = \{ \omega \in \Sigma_A^+ \mid \omega_0 = k \} \quad (1 \leq k \leq n)$$

とおくと，$\Sigma_A^+ = \bigcup_{k=1}^{n} E_k$ は明らかである。そのとき $\omega \in E_k$ に対して，

$$\tilde{\omega}_j = \omega_j \ (j \geq 0), \quad \omega_j^{(k)} \ (j < 0)$$

とおき,

$$\pi_+(\omega) = \pi(\tilde{\omega})$$

とおくと, π_+ は Σ_A^+ から $\bigcup_{k=1}^n \nabla(\pi(\omega^{(k)}))$ の中への continuous 写像となる。今 $K = \pi_+(\Sigma_A^+)$ とおくと, φ が top. mixing より, $\mathrm{int}\,K \cap W(x) \neq \phi$ $(W(x) \in \mathcal{F})$ なる性質を持つ compact 集合で, proper である。即ち, $K = \overline{\mathrm{int}\,K}$ $\left(\text{in } \bigcup_{k=1}^n \nabla(\pi(\omega^{(k)}))\right)$ が成り立つ。(Σ_A^+, σ_+) を (Σ_A, σ) の future part とする。

今 Σ_A^+ の dense G_δ-set $\tilde{\Sigma}$ を

$$(1,3) \qquad \tilde{\Sigma} = \bigcap_{j=-\infty}^{\infty} \sigma_+^{-j} \left(\bigcap_{a \in \Sigma_A^+} \bigcup_{k=0}^{\infty} \{ \omega \in \Sigma_A^+ \mid \omega_k = a_k \text{ or } C_{\omega_k} \cap C_{a_k} = \phi \} \right)$$

とおく, ただし

$$C_k = \pi(F_k), \quad F_k = \{ \omega \in \Sigma_A \mid \omega_0 = k \} \quad (1 \le k \le n)$$

なる M の Markov 分割である。$L = \pi_+(\tilde{\Sigma})$ とおくと, π_+ は $\tilde{\Sigma}$ から L への bijection となる。更に $\tilde{\Sigma} \times \tilde{\Sigma}$ の関係 $\tilde{\mathcal{F}}$ を,

$$(\omega, \omega') \in \tilde{\mathcal{F}} \iff \exists n \ge 0 ; \ \omega_j = \omega'_j \ (\forall j \ge n)$$

で導入すると, $(\tilde{\Sigma}, \tilde{\mathcal{F}})$ と $(L, \mathcal{F})$ は π_+ によって関係同値になる。更に $\{\nabla(\pi(\omega^{(k)}))\}_{k=1}^n$ 上の longitudinal Lebesgue 測度 $m^{(u)}$ に対して,

$$m^{(u)}(K \setminus L) = 0$$

が成り立つ。φ が top. mixing より $\mathrm{int}_K(L) = \phi$ である。実際, もし $L \supset U \neq \phi$ なる open (in K) set がとれると, $\phi \neq \pi_+^{-1}(U) \subset \tilde{\Sigma}$

なる Σ_A^+ の open set について, σ_+ が expanding かつ top. mixing より, $\sigma_+^k(\pi_+^{-1}(U)) = \Sigma_A^+$ なる $k \in \mathbb{Z}$ が存在する。よって $\tilde{L} = \Sigma_A^+$ となる。従って任意の $a, b \in \Sigma_A^+$ について, $a_k = b_k$ 又は $C_{a_k} \cap C_{b_k} = \phi$ なる $k \geq 0$ が存在する。一方適当な $a, b \in \Sigma_A^+$ に対して, $a_k \neq b_k$ かつ $\partial C_{a_k} \cap \partial C_{b_k} \neq \phi$ $(k \geq 0)$ となるから矛盾である。よって L は "irrational numbers" の拡張とみることができる。

<u>§2. 葉層 C^*-環</u>　$(M, \mathcal{F})$ を minimal 双曲型葉層化多様体とし, $\mathcal{G}$ をその holonomy groupoid とする。s, r をそれぞれ $\mathcal{G}$ から M への source map, range map とし, $A, B \subset M$ に対して $\mathcal{G}_B^A = s^{-1}(B) \cap r^{-1}(A)$ とおくと, $\mathcal{G}$ の top. subgroupoid になる。さらに $\mathcal{G}$ に $\mathcal{F}$ から induce される葉層が存在する。$(M, \mathcal{F})$ の葉層 C^*-環 $C^*(M, \mathcal{F})$ を $\mathcal{G}$ の reduced groupoid C^*-環 $C_r^*(\mathcal{G})$ として定義する。

さて, K, L を §1 の集合とし, $C_r^*(\mathcal{G}_K^K)$, $C_r^*(\mathcal{G}_L^L)$ を考える。K は $\mathcal{F}$ の sufficient transversal であるから (∂K は多様体でないかも知れないが) 次の命題が成り立つ:

<u>命題 2.1</u>　$C^*(M, \mathcal{F})$ は $C_r^*(\mathcal{G}_K^K)$ に安定同型である.

$\mathcal{F}$ は minimal より $C^*(M, \mathcal{F})$ は simple C^*-環である。よって上記命題より $C_r^*(\mathcal{G}_K^K)$ も simple である。$C_r^*(\mathcal{G}_K^K)$ の multiplier C^*-環の projection χ_L を $\chi_L(\gamma) = 1\ (\gamma \in L),\ 0\ (\gamma \notin L)$ で

で定義する。そのとき hereditary C^*-環 $\chi_L C_r^*(G_K^K)\chi_L$ は $C_r^*(G_L^L)$ に安定同型になり，$\chi_L C_r^*(G_K^K)\chi_L$ は $\overline{C_r^*(G_K^K)\chi_L C_r^*(G_K^K)}$ に安定同型であるから $C_r^*(G_K^K)$ の simplicity より次の結果を得る：

<u>命題 2.2</u>　$C_r^*(G_K^K)$ は $C_r^*(G_L^L)$ と安定同型である。

そこで $n\geq 0$ に対して，

$$G_n = \{ \gamma \in G_L^L \mid \pi_4^{-1}(s(\gamma))_j = \pi_4^{-1}(r(\gamma))_j \ (\forall j \geq n) \}$$

とおくと，G_n は G_L^L の top. subgroupoid で，$G_L^L = \bigcup_{n=0}^{\infty} G_n$，$G_n \subset G_{n+1}$，$(G_n)^0 = L$ $(n\geq 0)$ が成り立つ。今 $f \in C_c(G_n)$, $x \in L$, $\xi \in L^2(G_n^x)$ に対して，

$$(2.1) \qquad (R_x(f)\xi)(\gamma) = \int_{G_n^x} f(\gamma^{-1}\delta)\xi(\delta)\, d\nu^x(\delta)$$

とおく，ただし ν^x は $\mathcal{F}$ から canonical に作られる G_n^x 上の measure である。K が $\mathcal{F}$ の transversal であるから，$\mathcal{F}$ が holonomy を持たないことと相交って，

$$(R_x(f)\xi)(x, s(\gamma)) = \sum_{y \in G_n^x} f(s(\gamma), y)\xi(x, y)$$

となる。$\mathcal{H}(x) = L^2(G_n^x)$ とおくと $\dim \mathcal{H}(x) < +\infty$ となり，$x \mapsto R_x(f)\xi$ が連続であるから，$x \mapsto \|R_x(f)\|$ も連続になる。よって $x \mapsto R_x(f)$ は L 上の $\mathcal{B}(\mathcal{H}(x)) = M_{m_n(x)}(\mathbb{C})$ を fibre に持つ continuous field になる。更に対応

$$f \in C_c(G_n) \longleftrightarrow (x \mapsto R_x(f))$$

により，$C_r^*(G_n)$ と $C\mathcal{F}(L, M_{m_n(\cdot)}(\mathbb{C})) = \mathfrak{A}_n$ の同型対応を与える。今 $C_c(G_n)$ から $C_c(G_L^L)$ への canonical imbedding j_n を

考える。即ち $f\in C_c(G_n)$ に対して $j_n(f)\in C_c(G_L^L)$, $j_n(f)|_{G_n}=f$
$j_n(f)|_{G_n^c}=0$ を満たす。そのとき j_n は $*$-homomorphism になる。更に $x\in L$, $f\in C_c(G_n)$ に対して、

(2.2) $$\|R_x^{G_L^L}\circ j_n(f)\|\le \sup_{y\in L}\|R_y^{G_n}(f)\|$$

が成り立つ。ただし $R_x^{G_L^L}$, $R_y^{G_n}$ はそれぞれ $C_c(G_L^L)$, $C_c(G_n)$ の R_x, R_y である。実際、$\xi\in l^2(G_L^x)$ に対して

(2.3) $$(R_x^{G_L^L}\circ j_n(f)\xi)(\gamma)=\sum_{\delta\in G_L^x} j_n(f)(\gamma^{-1}\delta)\,\xi(\delta)$$

より、$j_n(f)(\gamma^{-1}\delta)\neq 0$ ならば $\gamma^{-1}\delta\in G_n$ が成り立つ。そこで $\gamma,\delta\in s^{-1}(L)\cap G_L^x$ に対して

$$\gamma\sim\delta \leftrightarrows \gamma^{-1}\delta\in G_n$$

とすると、"$\sim$" は同値関係になり、$[\gamma]$ を γ の類とすると、

$$s^{-1}(L)\cap G_L^x = \bigcup_\gamma [\gamma]$$

と分割される。更に $[\gamma]\to L$ を $\delta\in[\gamma]\to s(\delta)\in L$ で与えると位相同型を与える。そのとき

$$G_L^x=\bigcup_\gamma[\gamma]\cup(s^{-1}(L)^c\cap G_L^x)$$

となる。よって (2.3) は $\delta\in[\gamma]$ について、$\xi\in l^2([\gamma])$ とすると、

$$\begin{aligned}(R_x^{G_L^L}\circ j_n(f)\xi)(\delta) &= \sum_{[\gamma]\ni\eta} f(\delta^{-1}\eta)\,\xi(\eta)\\ &= \sum_{[\gamma]\ni\eta} f(\delta^{-1}\gamma\gamma^{-1}\eta)\,\xi(\gamma\gamma^{-1}\eta)\\ &= \sum_{G_n^{s(\gamma)}\ni\eta} f((\gamma^{-1}\delta)^{-1}\eta)\,\xi(\gamma\eta)\\ &= (R^{G_n}_{s(\gamma)}(f)\xi_\gamma)(\gamma^{-1}\delta)\end{aligned}$$

ただし $\xi_\gamma(\eta)=\xi(\gamma\eta)$ である。よって $l^2([\gamma])$ から $l^2(G_n^{s(\gamma)})$

への unitary u_γ で $\xi \mapsto \xi_\gamma$ となるものをとると，$\gamma \in G_{L^\circ}^x$ について，

$$u_\gamma \, R_x^{G_L^L} \circ \delta_n(f) \, u_\gamma^{-1} = R_{s(\gamma)}^{G_n}(f)$$

を得る。よって

$$
\begin{aligned}
R_x^{G_L^L} \circ \delta_n(f) &= \bigoplus_\gamma R_x^{G_L^L} \circ \delta_n(f) \big|_{[\gamma]} \\
&= \bigoplus_\gamma u_\gamma \, R_x^{G_L^L} \circ \delta_n(f) \, u_\gamma^{-1} \qquad (2.4) \\
&= \bigoplus_\gamma R_{s(\gamma)}^{G_n}(f)
\end{aligned}
$$

が成り立つ。これは (2.2) を意味する。従って δ_n は $C_r^*(G_n)$ から $C_r^*(G_L^L)$ への *isometric* $*$-*homomorphism* を意味する。上記と同様な議論により，$C_r^*(G_n)$ から $C_r^*(G_{n+1})$ への *isometric* $*$-*homomorphism* $\delta_{n+1,n}$ で

$$\delta_{n+1} \circ \delta_{n+1,n} = \delta_n$$

となるものがとれる。$G_L^L = \varinjlim G_n$ より，

$$
\begin{cases}
f_n * f * f_n^* \in C_c(G_n) & (f \in C_c(G_L^L)) \\
\| f_n * f * f_n^* - f \| \longrightarrow 0 \quad (n \to +\infty) & (f \in C_c(G_L^L))
\end{cases}
$$

となる $f_n \in C_c(G_n)$ $(n \geq 0)$ を考えると，

$$C_r^*(G_L^L) \simeq \varinjlim (\mathfrak{A}_n, \delta_{n+1,n}), \quad \mathfrak{A}_n \cong CF(L, M_{m_n(\cdot)}(\mathbb{C}))$$

が得られる．よって命題 1 ~ 2 より $\dim \mathcal{F} \geq 1$ とすると，

$$
\begin{cases}
C_r^*(M, \mathcal{F}) \simeq \varinjlim (\mathfrak{A}_n \otimes \mathcal{C}(\mathcal{H}), \delta_{n+1,n} \otimes id) \\
\mathfrak{A}_n \simeq CF(L, M_{m_n(\cdot)}(\mathbb{C}))
\end{cases}
$$

となる。$\mathfrak{A}_n \otimes \mathcal{C}(\mathcal{H})$ は L 上の *diagonal* $M_{m_n(\cdot)}(\mathbb{C}) \otimes \mathcal{C}(\mathcal{H})$ -*bundle*

の continuous field C^*-環で，L は paracompact space で，$M_{m_{j}(\cdot)}(\mathbb{C})\otimes \mathcal{C}(\mathcal{H})$ は可算無限次元 Hilbert space 上の compact 作用素全体の成す C^*-環より，Dixmier-Douady により，trivial continuous field，即ち $C_0(L)\otimes \mathcal{C}(\mathcal{H})$ になる。以上をまとめると次の結果が得られる：

<u>定理 2.3</u>　$(M,\mathcal{F})$ を minimal 双曲型葉層化多様体としたとき，その C^*-環 $C^*(M,\mathcal{F})$ は approximately homogeneous (AH) になる。

$\dim \mathcal{F}=0$ ならば，定義より $C^*(M,\mathcal{F})\simeq C(M)$ となるから明らかである。

<u>系 2.4</u>　$\theta \in \bigcup_{g\in SL(2,\mathbb{Z})} Sp(g)\setminus \mathbb{Q}$ ならば，θ の無理数回転 C^*-環 $\mathfrak{A}_\theta$ は (AH) であるが (AF) ではない。

仮定より T^2 の minimal 双曲型葉層 $\mathcal{F}_\theta$ が定まり，その C^*-環 $C^*(T^2,\mathcal{F}_\theta)$ は $\mathfrak{A}_\theta$ に安定同型である。よって定理 2.3 より結論を得る。

<u>§3. K-理論</u>　本節では §2 での C^*-環 $C^*(M,\mathcal{F})$ の analytic K-理論の動向を調べてみることにする。§2 の記号を使うと

$$K(M/\mathcal{F}) = \varinjlim \left(K(L), (\delta_{m+1,n})_* \right)$$

が成り立つ。そこで $(\delta_{m+1,n})_*$ を調べることにする。定義より

$$\delta_{m+1,n}(f) = x \longmapsto R_x^{q_{m+1}} \circ \delta_{m+1,n}(f) .$$

§2 の (2.4) より,

$$R_x^{G_{m+1}} \circ j_{m+1,n}(f) = \oplus_{\gamma \in G_{m+1}^x \cap s^{-1}(L)} R_{s(\gamma)}^{G_n}(f)$$

を得る。§2 の同値関係 "∼" を使うと, (2.4) より

$$R_x^{G_{m+1}} \circ j_{m+1,n}(f) = \bigoplus_{[\gamma] \in G_{m+1}^x/\sim} R_{s(\gamma)}^{G_n}(f)$$

が成り立つ。

$[\gamma] = \gamma \circ G_n$, $[\gamma] \ni \delta \mapsto s(\delta) \in L$ は位相同型である。更に任意の $x, y \in L$ に対して, $\# G_{m+1}^x/\sim \; = \; \# G_{m+1}^y/\sim \; (\equiv m_{m+1})$ より,

$$x \mapsto R_x^{G_{m+1}} \circ j_{m,n}(f) = \left(x \mapsto R_x^{G_n}(f)\right)^{\oplus m_{m+1}}$$

が得られるので, $(j_{m+1,n})_* : K(L) \to K(L)$ は

$$(j_{m+1,n})_*(\xi) = m_{m+1}\,\xi \quad (\xi \in K(L))$$

を満たす。今 $j : K(L) \to K(M/\mathcal{F})$ を

$$j(\xi) = (\xi, m_1\xi, m_1 m_2 \xi, \cdots, m_1 \cdots m_n \xi, \cdots\cdots) \quad (\xi \in K(L))$$

とおくと, *homomorphism* であり, $K(L)_{t.f}$ を $K(L)$ の *torsion free part* とすると, j は $K(L)_{t.f}$ 上 *injective* になる。よって次の結果を得る:

<u>定理 3.1</u> $(M, \mathcal{F})$ を *transversely (K-) oriented* 葉層多様体で, codim $\mathcal{F}$ は *odd* とする。もし $\mathcal{F}$ が *minimal* 双曲型ならば, 葉層 C^*-環 $C^*(M, \mathcal{F})$ は (AH) であるが (AF) ではない。

一点 $p \in L$ の L への *natural imbedding* i の *push forward* 写像 $i!$ による, p 上の *line bundle* 1_p の *image* $i!(1_p) \in K(L)$ を考えると, *additive map* $\psi : K^1(L) \to \mathbb{R}$ を

$$\psi(\xi) = \langle ch\,\xi, [L]\rangle \quad (\xi \in K^1(L))$$

で定義すると, $\psi(i_!(1_p)) \neq 0$ となり $i_!(1_p) \in K^1(L)_{tf}$ となる。
よって $\delta(i_!(1_p)) \neq 0 \in K_1(M/\mathcal{F})$ を得る。

<u>§4. 埋め込み</u>　$\mathfrak{A}_\theta$ の $K_0(\mathcal{B}_\theta) \simeq \mathbb{Z}+\theta\mathbb{Z}$ なる (AF)-環 $\mathcal{B}_\theta$ への埋め込み可能なことは, $C^*(T^2, \mathcal{F}_\theta) \simeq \mathfrak{A}_\theta \otimes \mathcal{C}(L^2(S^1))$ より双曲型葉層 C^*-環の (AF)-環への埋め込み問題に移行させる好例を与えている。

今 $(M,\mathcal{F})$ を minimal 双曲型葉層化多様体とし, $A, \tilde{\Sigma}, \sigma$ は §1～§2 のものとする。$\tilde{\Sigma}$ の同相写像 g で

$$\sup_{w\in\tilde{\Sigma}} \delta(\sigma^k g(w), \sigma^k(w)) \longrightarrow 0 \quad (k\to+\infty)$$

なるもの全体 Δ を考える。ただし δ は Σ_A^+ 上の natural metric である。そのとき Δ は amenable 群になる。$g\in\Delta$ に対して u_g を g に対応する C^*-接合積 $C_0(\tilde{\Sigma})\times\Delta$ の multiplier 環の unitary とする。compact open set $V\,(\subset\tilde{\Sigma})$ に対して, χ_V をその特性関数としたとき,

$$u_g\chi_V - u_h\chi_V \quad (g|_V = h|_V)$$

で生成された $C_0(\tilde{\Sigma})\times\Delta$ の closed ideal を $\mathcal{J}$ とし,

$$\mathcal{B}_A = (C_0(\tilde{\Sigma})\times\Delta)/\mathcal{J}$$

を考える。$f\in C_c(G_L^L)$ に対して, $(w,g)\in\tilde{\Sigma}\times\Delta$ について,

$$\psi(f)(w,g) = f(\pi_L(w), \pi_L(gw))$$

とおくと, ψ は $C_r^*(G_L^L)$ から $C_0(\tilde{\Sigma})\times\Delta$ への *-homomorphism

になり，$\psi(f)(w,e) \notin \mathcal{I}$ より，ψ は $C_r^*(G_L^L)$ から $\mathcal{B}_A$ への non trivial な *-homomorphism を定める．$C^*(M,\mathfrak{F})$ は simple より，$\psi\otimes 1: C^*(M,\mathfrak{F}) \longrightarrow \mathcal{B}_A\otimes\mathcal{C}$ は into *-isomorphism を与える。今から $\mathcal{B}_A$ は $C_0(\Sigma)$ を含む stable な (AF)-環であることを示す。

実際 $1\le j\le n$ に対して，$A_{w(j)_0,j}=1$ なる $w(j)\in\Sigma$ をとり

$$Z_{w(j),j} = \{ w\in\Sigma \mid w_0 = w(j)_0,\ w_1 = j \}$$

とおくと，$Z_{w(j),j}$ は互いに disjoint な Σ の compact open set である．今 $\mathcal{B}_A$ の projection P を，

$$P = \sum_j \chi_{Z_{w(j),j}}$$

とおくと，$P\mathcal{B}_A P \simeq (\mathcal{O}_A)^\tau$ を示すことが出来るから，$\mathcal{B}_A \simeq (\mathcal{O}_A)^\tau \otimes \mathcal{C}(\mathcal{H})$ となる．ただし τ は Cuntz-Krieger 環 $\mathcal{O}_A$ 上の gauge 作用である．何故ならば $A_{(i,j)}=1$ なる (i,j) に対して $w', w''\in\Sigma$ を

$$(4.1)\qquad \begin{cases} (w')_0 = i, \quad A_{(w'')_0,i} = 1 \\ \sigma(Z_{w'',(i,j)}) = Z_{w',j} \end{cases}$$

となる様に選ぶ。ただし

$$Z_{w'',(i,j)} = \{ w\in\Sigma \mid w_0 = (w'')_0,\ w_1 = i,\ w_2 = j \}$$

なる Σ の compact open set である．そこで $w(j), w', w''\in\Sigma$ と $j, (i,j)$ について，

$$
(4.2)\quad
\begin{cases}
U(w(i),(i,j),w'',(i,j))\,\sigma_+^{-1}\,U(w',j,a(j),j)\,\Xi_{a(j),j} = \Xi_{a(j),(i,j)} \\
U(w(i),(i,j),w'',(i,j)) : \Xi_{w'',(i,j)} \longrightarrow \Xi_{w(i),(i,j)} \\
U(w',j,a(j),j) : \Xi_{a(j),j} \longrightarrow \Xi_{w',j}
\end{cases}
$$

なる $U(\cdot) \in \Delta$ を考える。ただし σ_+^{-1} は $\Xi_{w',j}$ でのみとる。

そのとき

$$
S_i = \sum_{A_{i,j}=1} U(w(i),(i,j),w'',(i,j))\,\sigma_+^{-1}\,U(w',j,w(j),j)
$$

とおくと，S_i は $\mathcal{B}_A$ の *partial isometry* で

$$
S_i S_i^* = P_i, \qquad S_i^* S_i = Q_i
$$

とおくと，

$$
Q_i = \sum_j A_{i,j} P_j \quad , \quad P_j P_k = 0 \ (j \neq k) \, , \ P_j \leq P
$$

が成り立つ．よって $P\mathcal{B}_A P \simeq C^*(S_i)^\gamma = C^*\{\cancel{S_{j_m}^*} \cdots S_{j_1}^* P_k S_{j_1} \cdots S_{j_m} \mid k \geq 1,\ m \geq 1\}$ を得る。従って $\mathcal{B}_A \simeq \mathcal{O}_A^\gamma \otimes \mathcal{C}(\mathcal{H}) \left(\equiv \mathcal{P}_A\right)$ を得る。$\mathcal{B}_A$ は $\mathcal{B}_A \otimes \mathcal{C}(\mathcal{H}) \simeq \mathcal{B}_A$ なる (AF)－環で $C_0(\tilde{L})$ を含む．上記議論をまとめると次の結果を得る：

<u>定理 4.1</u>　$(M, \mathcal{F})$ を *minimal* 双曲型葉層化多様体とし A をその *transition matrix* とすると，葉層 C^*－環 $C^*(M, \mathcal{F})$ は (AF)－環 $\mathcal{P}_A \left(= \mathcal{O}_A^\gamma \otimes \mathcal{C}(\mathcal{H})\right)$ に忠実に埋め込み可能である。

<u>参考文献</u>

[1]　Bowen. R,　*Anosov foliations are hyperfinite*, Ann. Math., 106 (1977), 549－565.

[2] Bowen. R, Equilibrium states and ergodic theory of Anosov diffeomorphisms, Springer LNM 470 (1975).

[3] Connes. A, A survey of foliations and operator algebras, Proc. AMS 38 Part I (1983).

[4] Cuntz. J - Krieger. W, A class of C*-algebras and topological Markov chains I, II., Inv. Math 56 (1980), 251-268, 63 (1981), 25-40.

[5] Dixmier. J - Douady. A, Champs continus d'espaces hilbertiens et C*-algèbres, Bull. Soc. Math. France, 91 (1963), 227-284.

[6] Hilsum. M - Skandalis. G, Stabilité des C*-algèbres de feuilletages, Ann. Inst. Fourier., 33 (1983), 201-208.

[7] Takai. H, C*-algebras of Anosov foliations, Springer LNM (1985).