数理解析研究所講究録
第560巻 1985年 58-63

単位区間上の閉微分の特異点の集合について

新潟大 理 富山淳 (Jun Tomiyama)

1. 単位区間 $I=[0,1]$ 上の閉微分の構造は黒瀬[2],[3]の結果によって殆んど明らかにされてきたが最後に残った問題に特異点の話がある。その問題点をはっきりさせるのが本稿の目的である。それには先ず黒瀬の基本構造定理をのべねばならない。δ を $C(I)$ 上の閉微分とする。$C(I)$ は I 上の実数値連続関数の全体である。δ の定義域を $\mathcal{D}(\delta)$ とかく。

$$A_\delta = \{ t\in I \mid \mathcal{D}(\delta) \text{ のある関数 } f \text{ について } \delta(f)(t)\neq 0 \}$$

$$\hat{B}_\delta = \{ t\in I \mid \exists U : t \text{の nbd. } K>0$$
$$\|f\|_U \leq K\|\delta(f)\|_U \quad \forall f\in\mathcal{D}(\delta),\ f(t)=0 \}$$

$B_\delta = A_\delta \cap \hat{B}_\delta$ とおくと，A_δ は開集合であるが基本定理は 1° B_δ が A_δ の dense な開集合であること

2° B_δ 上に連続関数 μ_δ があって，μ_δ は B_δ 内の任意の閉区間 J 上に support が J であるような non-atomic measure を induce し，δ の J への制限 δ_J (閉微分になる)は $\mu_\delta|J$ による積分の逆と

して与えられる。ここで δ_J はこのような閉微分としてその range $R(\delta_J)=C(J)$, かつその kernel $K(\delta)=(\lambda 1_J)$ という性質をみたす。

即ち δ の構造は B_δ 内では完全に決定されるわけである。更に $\overline{A}_\delta$ の外の閉区間上では δ は 0 微分になっている。そこで $\overline{A}_\delta \sim B_\delta$ の点を δ の特異点、この集合を δ の singularity と呼ぶことにする。この部分が δ の最後の構造をきめるわけである。

2. Singularity のあらわれ方. 簡単のために $A_\delta = I$ で B_δ が $(0,1]$ の場合を考えてみよう。このとき μ_δ の性質としては次の3つの場合が考えられる

1° $\lim_{t\to 0}\mu_\delta(t)$ が存在して μ_δ の I 上への拡大が有界変分になる場合

2° μ_δ は連続には拡大出来るがその拡大 $\hat{\mu}_\delta$ が有界変分にならない場合

3° $\lim_{t\to 0}\mu_\delta(t)$ が存在しないとき。

1° の場合は I 上の測度 $\hat{\mu}_\delta$（関数と同一視している）による積分の逆としての微分 $\delta_{\hat{\mu}_\delta}$ を考えると、δ はその拡大になっている。

$\delta_{\hat{\mu}_\delta}$ は特異点を全然持たないからこのときの $\{0\}$ はいわば除去可能な特異点と言える。これに対して 2°, 3° は singularity に差はあるとしても 1° のように $\mathfrak{D}(\delta)$ から何か関数を取り去って除去するわけにはいかない。次に $A_\delta = B_\delta = (0,1]$ で 1° が又成

りたつ場合を考えてみると、δは今度はδ_{μ_δ}を$f\in\mathcal{D}(\delta_{\mu_\delta})$でかつ$\delta_{\mu_\delta}(f)(0)=0$に制限した形になっている。従ってこの時も$\{0\}$は除去可能特異点と言って良いであろう。

一般の場合のsingularityのあらわれ方の中で比較的はっきりしているのは次のような場合である。I上の単調な連続関数φが、Iの中のどの開部分区間でもstrictに単調にならないときφは一般化されたCantor関数(以下g.c.fと略する)と呼ばれている。このような関数は定義からほとんど到る所で定数になり定数関数でなければIの中の所々に奇妙な増加点(減少点)をもっている。今$\varphi\in\mathcal{D}(\delta)$としてみよう。このとき閉微分$\delta$と$\varphi$の性質から$\delta(\varphi)=0$となる。従って$\varphi$の増加点(減少点)は定義から$B_\delta$の点になり得ない。即ち$\delta$の特異点になっているわけである。このような事柄は通常の微分$\frac{d}{dt}$ ($\mathcal{D}(\frac{d}{dt})=C^1(I)$)の拡大になるような$\delta$を考えると起こってくる。([1])。

3. 具体的な結果. 前節で考えたμ_δの拡大によるsingularityは現象としてはそうであっても理論にはなりにくい。そこで次の形で問題を考える。

問題1. 閉微分δのどのようなglobalな性質がどのようなsingularityをひきおこすか?

この問題で先ず問題になるのは前述のg.c.f. φが$\mathcal{D}(\delta)$に入っ

てくる場合である。この時φは必然的に$K(\delta)$に入るから一般に$K(\delta)$にはどんな関数が入っているかが問題になるがその為にgcfの定義を少しくmodifyする。

定義. I上の連続関数φが閉集合$\overline{A}_\delta$に関してgcfであるとは、φは単調でかつ$\overline{A}_\delta$の補集合でstrictに単調であり更に$\overline{A}_\delta$内のどの開部分区間でもstrictに単調ではないような関数であることである。

$\overline{A}_\delta = I$のときが普通のgcfの場合である。

この定義をもとに次のことが成り立つ。先ず$K(\delta)$はδが閉作用素なことから$C(I)$の閉部分環になるが

定理1. 任意の閉微分δに対して、$\overline{A}_\delta$に関するgcf φが存在して$K(\delta)$はφで生成される。

証明の詳細は[5]にゆずる。この定理からδのsingularityには$K(\delta)$がtrivialにならない限り上のような生成関数φの変化点によるものがあることになる。そして$R(\delta)$の方からの寄与が何もないときにはそれがδのsingularity全部になる。即ち

定理2. δを$R(\delta) = C(I)$であるような閉微分とする。このとき$I \sim B_\delta$は$K(\delta)$の生成関数φの変化点の集合である。

実際、$t_0 \in I \sim B_\delta$がφの変化点でないとすると、t_0を内点にもつような或る閉区間E上でφは定数になる。一方[3]の結果からδ_Eは閉微分でかつ$K(\delta_E) = K(\delta)|E$, したがって$K(\delta_E)$は定

数関数のみから成る. 更に仮定から $R(\delta_E)=C(E)$ となるから又黒瀬[2]の結果で δ_E は特異点をもたず $t_0\in B_{\delta_E}$, ゆえに t_0 は B_δ に入って矛盾になる.　　　　　　証明了.

この定理に関係する基本問題として,このとき $\mathfrak{D}(\delta)$ から φ をとり除いて singularity を全部消しさることが出来るか,即ち $\frac{d}{dt}$ の拡大微分の時のように I 上の non-atomic measure μ ($\mathrm{supp}\,\mu=I$) をみつけて δ が δ_μ の拡大になっているように出来るかということがあるが未解決である. B_δ はこのとき I で dense になっているが,上のことは必ずしも μ_δ が I 全体に連続かつ有界変分な関数であるように拡大出来ることを意味してはいない点は注意を要する. $R(\delta)$ からの寄与としては

問題2. $R(\delta)$ が $C(I)$ の閉部分空間の時, δ の singularity はどのようになるか?

$K(\delta)$ よりの影響は定理1で判明しているので,前述の $R(\delta)=C(I)$ の時の特異点の解消問題と上のことが当面のこの方面の課題と思われるが目下の所は何もわかってはいない.

文　献

1. F. M. Goodman, Closed derivations in commutative C^*-algebras, J. Funct. Anal., 39 (1980), 308 - 346
2. H. Kurose, An example of a non-quasi well-behaved derivations in $C(I)$, J. Funct. Anal., 43 (1981), 193-201
3. ———, closed derivations in $C(I)$, Tôhoku Math. J., 35 (1983), 341-347
4. J. Tomiyama, The theory of closed derivations in the algebra of continuous functions on the unit interval, Lecture at National Tsing Hua Univ., Taiwan 1983.
5. ———, On the closed derivations on the unit interval, preprint.