数理解析研究所講究録
第560巻 1985年 64-72

Passivity on UHF C^*-algebras

阪大基礎工　楠田雅治 (Masaharu Kusuda)

$\mathfrak{A}$をC^*-環，αを$\mathfrak{A}$の強連続1径数自己同型写像群とする。本稿ではαとして1径数しか扱わないので，3つの組，$(\mathfrak{A}, \mathbb{R}, \alpha)$を単に$C^*$-力学系と呼ぶことにする。

さて熱力学の第2法則に基づいてPusz-Woronowicz [5]は受動状態の概念を導入した。われわれにとってわかりやすい数学的定式化は次のものである。すなわち，φを$\mathfrak{A}$の状態としたとき，φが$\mathfrak{A}$の受動状態であるとは，

$$-i\varphi(u^*\delta(u)) \geq 0$$

が$\mathfrak{A}$のユニタリー群の単位元の連結成分とδの定義域$D(\delta)$に属するすべての元uに対して成立することである。ただしδはαの生成作用素とする。このφはもちろんα-不変な状態であり，いくつかのα-不変状態の重要なクラスを含む。例えば，β-KMS状態 $(\beta \geq 0)$ や基底状態などはすべて受動状態である。実際，基底状態が，受動的なのは基底状態の定義あるいは特徴付けから明らかであり，

$\beta > 0$ のときは Sewell の条件 $-i\beta\varphi(x^*\delta(x)) \geqq \varphi(x^*x)\log\left(\frac{\varphi(x^*x)}{\varphi(xx^*)}\right)$ $(^\forall x \in D(\delta))$ からすぐわかる。さらに $\beta = 0$ のときは、φ はトレースだから、δ が微分であることを使えば、容易に $\varphi(x^*\delta(x)) = 0$ となって上の事がわかる。逆は一般には成り立たない。実際、受動状態の凸結合は受動的である。しかし、異なる β に対するKMS状態の凸結合はKMS状態でも基底状態でもない。

今 $x = x^* \in D(\delta)$ なら、$t \in \mathbb{R}$ に対して

$$
\begin{aligned}
&-i\varphi(e^{-itx}\delta(e^{itx})) \\
&= t\varphi(\delta(x)) + \frac{t^2}{2}i\varphi([\delta(x), x]) + O(t^3)
\end{aligned}
$$

とテーラー展開できる。φ が受動状態ならば、上の式は

$$
(1)\quad \begin{cases} \varphi(\delta(x)) = 0 \\ i\varphi([\delta(x), x]) \geqq 0 \end{cases}
$$

を意味する。さらに $[\delta(x), x] = \delta(x^2) - 2x\delta(x)$ だから

$$
(2)\qquad -i\varphi(x\delta(x)) \geqq 0
$$

を得る。すなわち (1) $\Rightarrow$ (2) がわかる。容易に (2) $\Rightarrow$ (1) もわかるから、次の3つの条件

(i) φ は受動状態、

(ii) $\varphi(\delta(x)) = 0$、$i\varphi([\delta(x), x]) \geqq 0$ $\quad ^\forall x \in D(\delta)$, $(x = x^*)$.

(iii) $-i\varphi(x\delta(x)) \geqq 0$ $\quad ^\forall x = x^* \in D(\delta)$

を考えると、(i) $\Rightarrow$ (ii) $\Leftrightarrow$ (iii) がわかる。

φが$\mathfrak{A}$上のα－不変状態としよう。$(-\infty, 0)$に対する$\mathfrak{A}$のスペクトル部分空間を$\mathfrak{A}^{\alpha}((-\infty,0))$とする。$\mathfrak{A}^{\alpha}((-\infty,0)) \ni {}^{\forall}x$に対して，

$$\varphi(x^*x) \leqq \varphi(xx^*)$$

が成り立つときφはスペクトル的受動状態と呼ばれる。De Cannière [1] はφがスペクトル的受動状態になるための必要十分条件は条件(iii)，すなわち，$D(\delta) \ni {}^{\forall}x = x^*$に対して$-i\varphi(x\delta(x)) \geqq 0$が成り立つであることを示した。したがって受動状態はいつもスペクトル的受動状態である。今条件(i)～(iii)が同値かどうか考えたいが，一般にはわからない。そこで少し限定されたC*－力学系の下で考えることにする。その枠組を今説明することにしよう。

境[6, 7, 8]は，UHF C*環上の可換正規*－微分の概念を導入した。その微分は次の様に定義される。$\mathfrak{A}$をUHF C*－環とする。δ_0が可換正規*微分であるとは，$\mathfrak{A}$の有限I型部分因子の増加列$\{\mathfrak{A}_n\}$が存在して$1 \in \mathfrak{A}_n$，$\bigcup_{n=1}^{\infty}\mathfrak{A}_n$が$\mathfrak{A}$で稠密，かつ$D(\delta_0)$に等しい。さらに，$\mathfrak{A}$の自己共役元の列$\{h_n\}$が存在して，それらは互いに可換で$\delta_0(x) = i[h_n, x]$，${}^{\forall}x \in \mathfrak{A}_n$ $(n=1, 2, \cdots)$が成り立つ時である。この時[6]によってδ_0は自然にδに拡張できて，$\exp(t\delta)(x) = \lim_{n\to\infty} \exp(t\delta_{ih_n})(x)$ ${}^{\forall}x \in \mathfrak{A}$.

ここで $\delta_{ih_n} = [ih_n, \cdot]$ を表わすものとする。今，
$\alpha_t = \exp(t\delta)$ とおいて UHF C^*-環の C^* 力学系
$(\mathfrak{A}, \mathbb{R}, \alpha)$ を得る。この状況において当初の問題を考える。

もし $\delta(D(\delta)) \subset D(\delta)$ ならば δ は有限型と言う。

定理　δ が有限型であるとき次の条件 (i) ～ (iv) は同値。

(i) $\mathfrak{A}$ の状態 φ は α に対してスペクトル的受動状態である。

(ii) $\varphi(\delta(x)) = 0$ かつ $i\varphi([\delta(x), x]) \geq 0$　$\forall x = x^* \in D(\delta)$ が成り立つ。

(iii) $-i\varphi(x\delta(x)) \geq 0$　$\forall x = x^* \in D(\delta)$ が成り立つ。

(iv) $\mathfrak{A}$ の状態 φ は α に対して受動状態である。

定理を証明するためにまず補題を示す。

補題．$(\mathfrak{A}, \mathbb{R}, \alpha)$ を C^* 力学系，$\mathfrak{A}$ は有限次元 C^* 環とする。そのとき $\mathfrak{A}$ 上のスペクトル的受動状態 φ は，受動状態である。

証明．まず $\mathfrak{A}$ が $n \times n$ 全行列環と仮定しよう。
τ を $\mathfrak{A}$ 上のトレース状態とすると φ は，$\mathfrak{A}$ の正の元 ρ によって $\varphi(x) = \tau(\rho x)$，$\tau(\rho) = 1$　$x \in \mathfrak{A}$ の様に表わされる。

今αは $\alpha_t(x)=e^{ith}xe^{-ith}$ $x\in\mathfrak{A}$, $(h=h^*\in\mathfrak{A})$ と書かれ，ρとhは可換である。$h=\sum_{i=1}^{n}h_i e_{ii}$
$h_i\in\mathbb{R}$, $\rho=\sum_{i=1}^{n}\rho_i e_{ii}$ $\rho_i\geqq 0$. $\sum\rho_i=1$ と仮定してよい。ここで $\{e_{ij}\}$ は $\mathfrak{A}$の行列単位である。$x=e_{ij}+e_{ji}$ ととると

$$-i\varphi(x\delta(x)) = (\rho_i-\rho_j)(h_j-h_i)\geqq 0$$

となることに注意しよう。$\mathfrak{A}\ni u=(u_{ij})$ をユニタリー行列とする。そのとき

$$\tau(\rho u^*hu)=\sum_{i,j}\rho_i h_j|u_{ij}|^2$$

$$\tau(\rho h)=\sum\rho_i h_i$$

が成り立つ。$(|u_{ij}|^2)_{i,j}$ は重確率行列だから，Birkhoff-von Neumannの定理から

$$\tau(\rho u^*hu)=\sum_\sigma\lambda_\sigma\sum_i\rho_i h_{\sigma(i)}$$

$\lambda_\sigma\geqq 0$. $\sum_\sigma\lambda_\sigma=1$ と表わせる。ここでσは$1,2,\cdots,n$の置換全体を動くものとする。$(\rho_i-\rho_j)(h_j-h_i)\geqq 0$ だから

$$\sum_i\rho_i h_{\sigma(i)}\geqq\sum_i\rho_i h_i$$

を得る。これは $-i\varphi(u^*\delta(u))\geqq 0$ を意味する。

次に一般の有限次元C^*環の場合を考える。αは有界微分δによって $\alpha_t=e^{t\delta}$と表わされ，$\mathfrak{A}=\mathfrak{A}^{**}$ だから，$\delta=[ih,\cdot]$ $h\in\mathfrak{A}^{*s}\mathfrak{A}$と書けることに注意する。

$\mathfrak{A}$は有限次元だから $\mathfrak{A}=\sum^{\oplus}\mathfrak{A}p_j$ と中心分解できる。

$\delta(p_j)=0$ に注意して計算すれば $\mathfrak{A}\ni u$ をユニタリーとすると

$$-i\varphi(u^*\delta(u))=\sum_j -i\varphi((up_j)^*\delta(up_j))\geqq 0$$

となる。　　　　　　　　　　　　　　　Q.E.D.

定理の証明. δ_0は有限型だから $h_n\in D(\delta_0)$と仮定できる。$\mathfrak{A}_n$ と h_nで生成される$\mathfrak{A}$の C^*-部分環を $\mathfrak{B}_n$ とする。そのとき $\mathfrak{B}_n$ は α-不変だから, C^*-力学系$(\mathfrak{B}_n, \mathbb{R}, \alpha)$ $n=1,2,\cdots$ が考えられる。さらにすべてのnについて $\mathfrak{B}_n$ は有限次元C^*環である。

今φをスペクトル的受動状態として φ が受動的であることを示せばよい。補題から φ は $(\mathfrak{B}_n, \mathbb{R}, \alpha)$ に対して受動的であることがわかる。$D(\delta)\ni u$ をユニタリーとする。そのとき, 容易に, uは次の形,

$$e^{ia_1}e^{ia_2}\cdots\cdots e^{ia_m}$$

$$a_1=a_1^*,\ a_2=a_2^*,\ \cdots,\ a_m=a_m^*\in D(\delta)$$

と書けることがわかる。$\bigcup_{n=1}^{\infty}\mathfrak{A}_n$は$\delta$の核だから 各$j$ $(1\leqq j\leqq m)$に対して $\mathfrak{A}_n\ni a_{j(n)}$ $1\leqq j\leqq m$ が選べて $a_{j(n)}=a_{j(n)}^*$

$$\|a_{j(n)}-a_j\|\to 0$$

$$\|\delta(a_{j(n)})-\delta(a_j)\|\to 0 \qquad (n\to\infty)$$

とできる。そのとき各jに対して

$$\sup_n \|\delta(a_{j(n)})\| = C_j < +\infty \ ,$$

一方 Powers [3] から，

$$\delta(e^{ia_{j(n)}}) = i\int_0^1 e^{ita_{j(n)}}\delta(a_{j(n)})e^{i(1-t)a_{j(n)}}\,dt$$

$\forall n$ だから，各 j について

$$\sup_n \|\delta(e^{ia_{j(n)}})\| \leqq C_j \ .$$

今 $u_n = e^{ia_{1(n)}}e^{ia_{2(n)}}\cdots\cdots e^{ia_{m(n)}}$ とおく。すぐに，$u_n \in \mathfrak{B}_n$，かつ $\|u_n - u\| \longrightarrow 0 \quad (n\to\infty)$ がわかる。

さらに

$$\begin{aligned}\|\delta(u_n)\| &\leqq \sum_{j=1}^m \|\delta(e^{ia_{j(n)}})\| \\ &\leqq \sum_{j=1}^m C_j = C\end{aligned}$$

がすべての $n \geqq 1$ について成り立つ。$-i\varphi(u_n^*\delta(u_n)) \geqq 0$ だから，$\varphi(u_n^*\delta(u_n)) \longrightarrow \varphi(u^*\delta(u))$ を示せばよい。しかし $\varphi\circ\delta = 0$ に注意すれば，

$$\begin{aligned}&|\varphi(u_n^*\delta(u_n)) - \varphi(u^*\delta(u))| \\ &\leqq \|u_n - u\|\,\|\delta(u_n)\| + |\varphi(\delta(u^*)u_n) - \varphi(\delta(u^*)u)| \\ &\leqq (C + \|\delta(u)\|)\|u_n - u\| \longrightarrow 0 \quad (n\to\infty)\end{aligned}$$

が得られ証明が終わる。 Q.E.D.

文献

[1] J. De Cannière, A spectral characterization of KMS states, Comm. Math. Phys. 84 (1982), 187–206

[2] A. Lenard, Thermodynamical proof of the Gibbs formula for elementary quantum systems, J. Stat. Phys. 19 (1978), 575–586.

[3] R. T. Powers. A remark on the domain of an unbounded derivation of a C* algebra, J. Funct. Anal. 18 (1975) 85–95.

[4] R. T. Powers – S. Sakai, Unbounded derivations in operator algebras, J. Funct. Anal. 19 (1975), 81–95.

[5] W. Pusz – S. L. Woronowicz, Passive states and KMS states for general quantum systems Comm. Math. Phys. 58 (1978) 273–290

[6] S. Sakai, On commutative normal * derivations. Comm. Math. Phys. 43 (1975) 39–40

[7] S. Sakai, On commutative normal * derivations II, J. Funct. Anal. 21 (1976) 203–208.

[8] S. Sakai, On commutative normal *-derivations III, Tôhoku Math. Jour. 28 (1976) 583–590.