数理解析研究所講究録
第560巻 1985年 73-80

Derivationの拡張と基底状態の安定性

東工大理学部　生西明夫　(Akio Ikunishi)

§1. 序論

αを局所コンパクト可換群GのC^*-代数Aにおける作用としよう。δはAにおける$*$-derivationで$\hat{G}$の各コンパクト集合Kに対応するスペクトル空間$A^\alpha(K)$上で有界であるとする。このようなδでも再双対A^{**}においてclosableであるかどうかは明らかではない。しかしながら，次のように十分大きな定義域を持つA^{**}における$*$-derivationに拡張することはできる。$A^\alpha(K)^{**}$とA^{**}におけるσ-弱閉包$\overline{A^\alpha(K)}$を同一視して，$\delta^B=\bigcup_{K:\text{コンパクト}}(\delta|A^\alpha(K))^{**}$とおくと$\delta^B$は$*$-derivationである。加えて，$\pi$が$A$の表現で$\bar{\alpha}\circ\pi=\pi\circ\alpha$なる$\pi(A)''(=M)$における作用$\bar{\alpha}$があるならば，$\tilde{\delta}\circ\bar{\pi}=\bar{\pi}\circ\delta^B$なる$M$における$*$-derivation $\tilde{\delta}$が存在して，その定義域は$\bigcup_{K:\text{コンパクト}}M^{\bar{\alpha}}(K)$であり$\tilde{\delta}|M^{\bar{\alpha}}(K)$は$\sigma$-弱連続である。ここで$\bar{\pi}$は$\pi$の$A^{**}$への自然な拡張である。

これは，πが既約であるときには岸本[4]によって証明され

たことである。また、上のことは可換でないコンパクト群に対しても成り立つ。

特に、α が一径数群で、δ が α の生成作用素 δ_0 に関して相対有界であるなら、すなわち、ある a と b に対して $\|\delta(x)\| \leq a\|x\| + b\|\delta_0(x)\|$ $(x \in D(\delta_0))$ であるなら、$\tilde{\delta}$ も $\tilde{\alpha}$ の生成作用素 $\tilde{\delta}_0$ に対して、$\|\tilde{\delta}(x)\| \leq a\|x\| + b\|\tilde{\delta}_0(x)\|$ $(x \in D(\tilde{\delta}_0))$ である。これは C^*-力学系の基底状態の安定性の問題に応用される。

$(A, \mathbb{R}, \alpha)$ を基底状態を持つ C^*-力学系とし、δ を α の生成作用素 δ_0 と同じ定義域を持つ *-derivation とする。このとき、δ は δ_0 に関して相対有界であり、$b<1$ なら $\delta_0+\delta$ は C^*-力学系を生成することはよく知られている([6, 1])。Batty は A が I 型で $b<1$ なら $\delta_0+\delta$ によって生成される C^*-力学系も基底状態を持つことを示した。黒瀬[5]は先の岸本の結果を使って一般の C^*-代数に対して一般化を試みたが、$\tilde{\delta}$ の relative bound の評価が不十分であるため、十分小さな λ に対して $\delta_0+\lambda\delta$ も基底状態を持つという結果にとどまっている。先に述べた我々の結果を適用すれば、任意の C^*-代数 A と $b<1$ なる δ_0 に対して $\delta_0+\delta$ によって生成される C^*-力学系も基底状態を持つことが示される。

§2. Derivation の拡張

αを局所コンパクト可換群GのC^*代数Aにおける作用，πを$\bar{\alpha}\circ\pi=\pi\circ\alpha$なる$\pi(A)''(=M)$における作用$\bar{\alpha}$があるような$A$の表現とする。このとき，$\hat{G}$のコンパクト集合$K$に対して$\alpha|A^\alpha(K)$はノルムについて連続であるので$\alpha^{**}|\overline{A^\alpha(K)}$もそうである。したがって，$B$を$\bigcup_{K:\text{コンパクト}}\overline{A^\alpha(K)}$の$A^{**}$でのノルムについての閉包とすると，$\alpha^{**}|B$は$G$の$C^*$代数$B$における連続な作用となる。さらに，$\overline{A^\alpha(K)}\subset B^{\alpha^{**}|B}(K)$
$=\cap\{\overline{A^\alpha(K+V)}\mid V:0\text{のコンパクト近傍}\}$である。$\tilde{\pi}$を$\pi$の$A^{**}$への自然な拡張とすると，あるコンパクト集合$K$に対して$e_\iota\in B^{\alpha^{**}|B}(K)$であるような$\ker\tilde{\pi}\cap B$の approximate identity (e_ι)があるので，$\ker\tilde{\pi}\cap B$は単位元eを持つ。もちろん，eはA^{**}の中心と$B^{\alpha^{**}|B}$に属する。このことから，$B^{\alpha^{**}|B}(K)(1-e)$と$M^{\bar{\alpha}}(K)$は等距離的同型である。

さて，δを$\bigcup_{K:\text{コンパクト}}A^\alpha(K)$において定義された$A$における$*$-derivationで，各コンパクト集合$K$に対して$\delta|A^\alpha(K)$は有界であるとしよう。このとき，$\delta^B=\bigcup_{K:\text{コンパクト}}(\delta|A^\alpha(K))^{**}$とおくと，$\delta$は$\bigcup_{K:\text{コンパクト}}B^{\alpha^{**}|B}(K)$において定義される$*$-derivationである。$e$が$A^{**}$の中心と$\delta^B$の定義域に属することに注意すれば，$\tilde{\delta}\circ\tilde{\pi}=\tilde{\pi}\circ\delta^B$なる$M$における$*$-derivation $\tilde{\delta}$が存在する。

コンパクト群に対しては，Aから$A^\alpha(\gamma)$ $(\gamma\in\hat{G})$への射影があるので，同様な議論ができる。このようにして，次の定理

を得る。

<u>定理1.</u> α を局所コンパクト可換群 G の C^*-代数 A における作用，π を $\bar{\alpha}\circ\pi=\pi\circ\alpha$ なる $\pi(A)''(=M)$ における作用 $\bar{\alpha}$ があるような A の表現とする。δ を各コンパクト集合 K に対して $A^{\alpha}(K)$ 上で有界であるような A における $*$-derivation としよう。

このとき，$\bigcup_{K:\text{コンパクト}} M^{\bar{\alpha}}(K)$ で定義される M における $*$-derivation $\tilde{\delta}$ で，$\tilde{\delta}\circ\pi\supset\pi\circ\delta$ かつ任意のコンパクト集合 K に対して $\tilde{\delta}\,|\,M^{\bar{\alpha}}(K)$ が σ-弱連続であるようなものがある。さらに，

$$\|\tilde{\delta}\,|\,M^{\alpha}(K)\|\leqq\inf\{\|\delta\,|\,A^{\alpha}(K+V)\|\ |\ V:0\text{のコンパクト近傍}\}$$

である。

同様なことが，コンパクト群に対しても成り立つ。ただし，コンパクト集合 K は $\hat{G}$ の点 γ で置き換えられる。

<u>命題2.</u> α を C^*-代数 A の $*$-自己同型の一径数群，π を $\bar{\alpha}\circ\pi=\pi\circ\alpha$ なる $\pi(A)''(=M)$ における一径数群 $\bar{\alpha}$ があるような A の表現とする。δ_0 を α の生成作用素，δ を δ_0 と同じ定義域を持つ A における $*$-derivation とする。

もし，ある a と b に対して

$$\|\delta(x)\|\leqq a\|x\|+b\|\delta_0(x)\|\quad,\ x\in D(\delta_0)$$

であるなら，$\bar{\alpha}$ の生成作用素 $\bar{\delta}_0$ と同じ定義域を持つ M におけ

る *derivation $\tilde{\delta}$ があって，$\bar{\delta}_0 \ni (x, \bar{\delta}_0(x)) \longmapsto \tilde{\delta}(x)$ は σ-弱連続かつ，

$$\|\tilde{\delta}(x)\| \leq a\|x\| + b\|\bar{\delta}_0(x)\| \quad , x \in D(\bar{\delta}_0)$$

である．

証明. ノルム $a\|\cdot\| + b\|\delta_0(\cdot)\|$ を持ったバナッハ空間としての $D(\delta_0)$ から A への写像として，δ はノルムが 1 以下である．したがって，δ^{**} もそうであり，かつ δ^B の拡張である．それゆえ，定理 1 によって得られる $\tilde{\delta}$ は命題の結論を $\bigcup_{K:\text{コンパクト}} M^{\alpha}(K)$ 上で満たす．このとき，$\tilde{\delta}\circ(1+\bar{\delta}_0)$ は $\bigcup_{K:\text{コンパクト}} M^{\alpha}(K)$ 上で σ-弱連続かつ有界なので，M 上へ拡張でき，したがって，$\tilde{\delta}$ も $D(\bar{\delta}_0)$ 上へ拡張できて，これが求める性質を満たす．

定理 1 と岸本[4]の一連の補題によって，δ が生成作用素になるかどうかということについての系を二つ得る．

系 3. G は局所コンパクト可換群で，α, A, δ は定理 1 における と同じとする．さらに，A の表現の忠実な族 (π_ι) があって，$\bar{\alpha}_\iota \circ \pi_\iota = \pi_\iota \circ \alpha$ なる $\pi_\iota(A)''$ 上の作用 $\bar{\alpha}_\iota$ があり，各 $\bar{\alpha}_\iota$ は $\bar{\alpha}_\iota$-fixed unitary によって与えられているとする．

このとき，δ は closable で，その閉包 $\bar{\delta}$ は生成作用素であ

る。

<u>系4.</u>　Gを局所コンパクト群で，連結あるいは$H^2(G;\mathbb{T})=(0)$とする．Aは増加族(A_ι)に伴うUHF代数，αはA_ιを不変にするGのAにおける作用とする。δとπは定理1におけると同じとしよう。(特に，πとしてAの唯一つ tracial state に伴う表現を取れ．)

このとき，定理1において得られる$\tilde{\delta}$に対して，$\|h\| \leq \|\tilde{\delta}|A^{\alpha}\|$なる$h \in \pi(A)''_s$があって，$\tilde{\delta}-\delta_{ih}$は$\bar{\alpha}$と可換である。さらに$\delta$は closable で，閉包$\bar{\delta}$は生成作用素である．

§3. 基底状態の安定性

次の定理を示すために　残された問題は，δのδ_0-relative bound と$\tilde{\delta}$の$\bar{\delta}_0$-relative bound が一致することだけである．これは命題2によって得られている．

<u>定理5.</u>　$(A, \mathbb{R}, \alpha)$を基底状態を持つC^*-力学系とする。δをαの生成作用素δ_0と同じ定義域を持つ$*$-derivation とする．

もし，δのδ_0-bound が1より小さければ$\delta_0+\delta$はC^*-力学系を生成し，それは基底状態を持つ。

系6. $(A, \mathbb{R}, \alpha)$ と δ は定理5におけると同じとしよう。もし，δ の δ_0-bound が1以下で，$\delta_0+\delta$ の閉包が C^*-力学系を生成するなら，それは基底状態を持つ。

注. 上の系において，A が単純，特に，UHF代数なら，岸本[4]あるいは定理1によって $\delta_0+\delta$ は closable でその閉包は C^*-力学系を生成する。

~~UHF代数においては，基底状態の安定性はrelative bound~~ の

注. δ の δ_0-bound と $\tilde{\delta}$ の $\bar{\delta}_0$-bound が一致することは Kaplansky の density theorem の証明および derivation についての differential calculus からも得られる。正確には，$\|\delta(x)\| \le a\|x\| + b\|\delta_0(x)\|$ $(x \in D(\delta_0))$ なら任意の $\varepsilon > 0$ に対して a' があって，$\|\tilde{\delta}(x)\| \le a'\|x\| + (b+\varepsilon)\|\bar{\delta}_0(x)\|$ $(x \in D(\bar{\delta}_0))$ である。(c.f. [3])

また，次の不等式は簡単に得られる：

$$\|\tilde{\delta}(x)\| \le (a+2bn)\|x\| + (an^{-1}+2b)\|\bar{\delta}_0(x)\|.$$

したがって，$b<\frac{1}{2}$ なら $\delta_0+\delta$ は基底状態を持つ。pertubation theory においてよく知られた iteration によって，このことからも定理5を得ることができる。

UHF代数においては，基底状態の安定性は relative bound

の条件なしで成立するように思われるがδがαと可換であるときでさえわかっていない。

References

[1] C. J. K. Batty, Small perturbations of C*-dynamical systems, Commun. Math. Phys. 68 (1978), 39-43.

[2] ――――――, Perturbations of ground state of type I C*-algebras, Proc. Amer. Math. Soc. 78 (1980), 539-544.

[3] A. Ikunishi, Ground states and small perturbations for C*-dynamical systems.

[4] A. Kishimoto, Derivations with a domain condition, preprint.

[5] H. Kurose, Perturbations and ground states of C*-dynamical systems, preprint.

[6] R. Longo, Automatic relative boundedness of derivations in C*-algebras, J. Funct. Anal. 34 (1979), 21-28.