数理解析研究所講究録
第 560 巻 1985 年 98-109

Ｊｏｒｄａｎ　写像の線形性について

山形大学（工）　羽毛田　穣祐（Jôusuke Hakeda)

昨年、野田の“作用素論と作用素環論研究集会”で次の定理を報告した。

定理Ａ　　Ｍを可変な直和因子を持たないＡＷ*代数、ＮをＣ*代数、ϕをＭからＮへの　*半群同形写像とする。

［即ち　ϕは次の　(i)～　(iii)を満足する。
(i)　$\phi(xy)=\phi(x)\phi(y)$　　$x, y\in M$
(ii)　$\phi(x^*)=\phi(x)^*$　　$x\in M$
(iii)　ϕ　は全単射である。］

このときϕは加法的である。　更にＭの中心射影元ｅが一意に存在して、ϕはＭｅ上では線形写像、Ｍ(1-e)上では共役線形写像になっている。

この「定理Ａ」に関して、斎藤（和）は　ＪＢＷ代数で定理Ａと同様の結果が成立するであろうと予想した。　昨年の野田の研究集会の報告には次の定理も含まれていた。

定理Ｂ　　ＭをI_1型　，I_2型　，I_3型　の直和因子を持たない　ＪＢＷ代数（積は○で表わす）。　Ｎを　ＪＢＷ代数（Ｎの積も○で表わす）。　ϕをＭからＮへの Jordan 写像とする。

［即ち　ϕは次の（ｉ），(ii)を満足する。
(i)　$\phi(x\circ y)=\phi(x)\circ\phi(y)$　　$x, y\in M$
(ii)　ϕ　は全単射である。］

このときϕは線形写像である。

この「定理B」は　”斎藤の予想”に対する部分的解答にもなっている。一般にＪＢＷ代数は　I_n 型　，I_∞型　，II型　，III型　のＪＢＷ代数の直和に分解され、I_2 型　，I_3 型　を除いた各型の　ＪＢＷ代数は von Neumann　代数に良く似た面があり、I_2 型　，I_3 型は von Neumann　代数とまったく状況が異なっていることが知られている。（例えば spin factor　とか Cayley 代数$\mathbb{O}$上の　3×3　エルミート行列に　$x \circ y = (1/2)(xy + yx)$ で積$\circ$を定義した　Jordan 代数$H_3(\mathbb{O})$ 等）。

Jordan　代数の積は非結合的であるが、特に　$H_3(\mathbb{O})$　等では Cayley 代数の積が非結合的であることが、直接計算を著しく困難にしている。　例外 Jordan 代数（特に　$H_3(\mathbb{O})$）に於ける“定理Ｂ”に相当する結果も、昨年末に一応得られたが、証明法は具体的な　$H_3(\mathbb{O})$ の中での計算に依っており、「定理Ｂ」の証明とは異なったものである。

この報告ではこれらの場合をI_2 型　の場合も含む統一的な方法によって“斎藤の予想”に対する最終的な結果を与える。

定義　　実 Jordan 代数Ｍ（積は$\circ$で表わす）からある実代数Ｎ（積はＭと同じ記号$\circ$で表わす）への写像ϕがＭ上の Jordan 写像であるとはϕがＭからＮへの全射かつ積同形写像をいう。

即ちϕは次の条件　(i)，(ii)　を満足する。

(i)　$\phi(x \circ y) = \phi(x) \circ \phi(y)$　　　$x, y \in M$

(ii)　ϕは全単射である。

以後Ｍは unital な実 Jordan 代数，ϕはＭからある実代数Ｎへの Jordan 写像を表わすものとし，定理等の記述を除いて、特に付加する条件のみを記述することにする。

主定理　　ＭをI_1 型　直和因子を持たないＪＢＷ代数，Ｎを実 Jordan Banach 代数，ϕをＭからＮへの Jordan 写像とする。このときϕは線形写像である。
この定理はI_1 型　直和因子を持たないＪＢＷ代数Ｍの“代数的構造”がＭの“積構造”によって完全に定まってしまうことを示している。

1.　Ｊｏｒｄａｎ　代数の古典論からの準備

特別 Jordan 代数の議論を一般の Jordan 代数に拡張するために、次の"Macdonaldの定理"と"Shirshof-Cohnの定理"は強力である。

Ｍａｃｄｏｎａｌｄの定理
変数ｃについて１次の３変数ａ，ｂ，ｃの Jordan 多項等式 $p(a, b, z) = 0$ が全ての特別 Jordan 代数で成立するならば、 $p(a, b, c) = 0$ は任意の Jordan 代数で成立する。

Ｓｈｉｒｓｈｏｆ－Ｃｏｈｎ の定理
$M[a, b, 1]$ を $a, b, 1$ で生成された Jordan 部分代数とする。このとき $M[a, b, 1]$ は特別 Jordan 代数である。

$\{abc\} = (a\circ b)\circ c + (b\circ c)\circ a - (c\circ a)\circ b$ を Jordan 三重積とよぶ。 $T_a b = a\circ b$, $U_{a,c}\, b = \{abc\}$, $U_a = U_{a,a}$ で Jordan代数上の線形作用素 T_a , $U_{a,c}$, U_a を定義する。 作用素間の交換子積を $[T_a , T_b]$ 等と表わす (i.e. $[T_a , T_b] = T_a T_b - T_b T_a$)。

補題 1.1 $4\{abc\}^2 = 4\{a\{b(a\circ c)b\}a\} - 2\{aba\}\circ\{cbc\} + \{a\{bc^2 b\}a\} + \{c\{ba^2 b\}c\}$ が成立する。

定義 1.2 ａとｂ $(a, b\in M)$ が作用素可換 (operator commute) であるとは、 $[T_a , T_b] = 0$ が成立することとする (i.e. 任意の $x\in M$ に対して $a\circ(b\circ x) = b\circ(a\circ x)$)。
任意の Jordan 代数で任意のａに対して $[T_a, T_{a^2}] = 0$ が成立することより、次の補題が導かれる。

補題 1.3 $[T_a , T_{b\circ c}] + [T_b , T_{c\circ a}] + [T_c , T_{a\circ b}] = 0$ が成立する。

また直交する巾等元に関する計算に次の補題は有力である。

補題 1.4 $E_n = \{e_i : i = 1, 2, ..., n\}$ を和が単位元１になる直交する巾等元の集合とする (i.e. $e_i{}^2 = e_i$, $e_i\circ e_j = 0$, $\Sigma e_i = 1$)。このとき $e, f, g\in E_n$ に対して

$$
T_e U_{f,g} = \begin{cases} U_e & (e = f = g) \\ 1/2\ U_{f,g} & (e \in \{f, g\}) \\ 0 & (e \in \{f, g\},\ n \geqq 3 \text{の場合}) \end{cases}
$$

が成立する。

補題 1.5　直交するMの巾等元eとfに対して、$(U_e\ x) \circ (U_f\ y) = 0$ が成立する。

2.　Jordan 写像の基本的性質

補題 2.1　$\phi(0) = 0,\ \phi(1) = 1$

証明　ϕが全射であることより $a \in M$ が存在して $\phi(a) = 0$
従って　$\phi(0) = \phi(0 \circ a) = \phi(0) \circ 0 = 0$
また任意の$x \in M$に対して　$\phi(x) = \phi(1 \circ x) = \phi(1) \circ \phi(x)$
よりϕが全射であるから$\phi(1)$はNの単位元である。

補題 2.2　eとfがMの直交する巾等元ならば
$\phi(e + f) = \phi(e) + \phi(f)$ が成立する。

証明　$\phi(e),\ \phi(f),\ \phi(e) + \phi(f)$はNの巾等元であり、$\phi(e)$と$\phi(f)$は直交する。従って　$h = \phi(\phi(e) + \phi(f))$とおくと、hはMの巾等元である。
$\phi(e \circ h) = \phi(e) \circ \phi(h) = \phi(e) \circ (\phi(e) + \phi(f)) = \phi(e)$
従って　ϕが単射であることより　$e \circ h = e$、同様にして　$f \circ h = f$
故に　$(e + f) \circ h = e + f$　が成立するから
$\phi(e + f) = \phi((e + f) \circ h) = \phi(e + f) \circ \phi(h)$
$\quad = \phi(e + f) \circ \phi(e) + \phi(e + f) \circ \phi(f) = \phi(e) + \phi(f)$。

補題 2.3　eとfをMの巾等元（直交していなくとも良い）とする。このとき　$\phi(e - f) = \phi(e) - \phi(f)$　が成立する。

証明　$g = 1 - e,\ x = e - f$ とおくと、
$\phi(x) = ((\phi(e) + \phi(f)) \circ \phi(x)) \circ (\phi(e) + \phi(f))$
$\quad = \phi((e \circ x) \circ e) + \phi((e \circ x) \circ f) + \phi((f \circ x) \circ e)$
$\quad\quad + \phi((f \circ x) \circ f)$

$(e\circ x)\circ e=(e\circ(1-f))\circ e$ と $\phi(1-e)=1-\phi(e)$
(補題 2.1 及び 2.2 より)

$$\begin{aligned}\phi((e\circ x)\circ e)&=(\phi(e)\circ\phi(1-f))\circ\phi(e)\\&=(\phi(e)\circ(1-\phi(f)))\circ\phi(e)\\&=(\phi(e)\circ\phi(e))\circ\phi(e)\\&\qquad-(\phi(e)\circ\phi(f))\circ\phi(e)\\&=(\phi(e)\circ(\phi(e)-\phi(f)))\circ\phi(e)\end{aligned}$$

$$\phi((e\circ x)\circ f)=0=(\phi(e)\circ(\phi(e)-\phi(f)))\circ\phi(f)$$

同様に

$$\phi((f\circ x)\circ e)=(\phi(f)\circ(\phi(e)-\phi(f)))\circ\phi(e)$$

$$\begin{aligned}\phi((f\circ x)\circ f)&=\phi(-f)=-\phi(f)\\&=(\phi(f)\circ(\phi(e)-\phi(f)))\circ\phi(f)\end{aligned}$$

従って

$$\begin{aligned}\phi(x)&=((\phi(e)+\phi(f))\circ(\phi(e)-\phi(f)))\circ(\phi(e)\\&\qquad+\phi(f))\\&=\phi(e)-\phi(f)\end{aligned}$$

補題 2.4 e と f を M の nontrivial な直交する巾等元とするとき、任意の $x, y\in M$ に対して $\phi(\{exe\}+\{fyf\})$
$=\phi(\{exe\})+\phi(\{fyf\})$ が成立する。

証明 $T_e U_e=U_e$, $T_e U_f=0$ が成立しているから、

$$(e+f)\circ(\{exe\}+\{fyf\})=\{exe\}+\{fyf\}$$

従って

$$\phi(\{exe\}+\{fyf\})=\phi(e+f)\circ\phi(\{exe\}+\{fyf\})$$

一方 補題 2.2より $\phi(e+f)=\phi(e)+\phi(f)$ だから

$$\begin{aligned}&\phi(\{exe\}+\{fyf\})\\&=(\phi(e)+\phi(f))\circ\phi(\{exe\}+\{fyf\})\\&=\phi(e)\circ\phi(\{exe\})+\phi(e)\circ\phi(\{fyf\})\\&\qquad+\phi(f)\circ\phi(\{exe\})+\phi(f)\circ\phi(\{fyf\})\\&=\phi(\{exe\})+\phi(\{fyf\})\end{aligned}$$

補題 2.5 e と f を M の nontrivial な直交する巾等元とするとき任意の $\alpha, \beta\in C$ に対して $\phi(\alpha e+\beta f)=\phi(\alpha e)+\phi(\beta f)$ が成立する。

証明 補題 2.4 に於いて $x=\alpha\cdot 1$, $y=\beta\cdot 1$ と置くと補題を得る。

定義 2.6　直交する巾等元　EとFに対して　$s^2=e+f$
かつ　$\{ses\}=f$　となる部分対称元sが存在するときeとfは強連結と呼ぶ。

補題 2.7　eをMの nontrivial な巾等元とする。もしeと直交するMの巾等元fが存在してeとfが強連結ならば任意のMの元x，yに対して、
$\phi(\{exe\}+\{eye\})=\phi(\{exe\})+\phi(\{eye\})$が成立する。

証明　直交する巾等元eとfが強連結だから、ある部分対称元sが存在して
$s^2=e+f$　かつ　$\{ses\}=f$　が成立する。
$r=2\{esf\}$，$p=1/2(e+f+r)$，$q=1/2(e+f-r)$　とおくと
補題 1.1 により　$r^2=\{e\{sfs\}e+\{f\{ses\}f\}$
Shirshov-Cohn の定理より

$$\{sfs\}=\{s\{ses\}s\}=\{s^2es^2\}$$
$$=\{(e+f)e(e+f)\}=e$$

従って　$r^2=e+f$
更に　$\{rer\}=2(e\circ r)\circ r-r^2\circ e$，補題 1.4 により
$e\circ r=1/2r$（$f\circ r=1/2r$）　従って　$\{rer\}=r^2-r^2\circ e$

$$=r^2\circ(1-e)=(e+f)\circ(1-e)=f$$

かつ　$\{ere\}=2(e\circ r)\circ e-r\circ e=0$
またp，qは直交する巾等元で　$\{epe\}=1/2e+1/2\{ere\}=1/2e$
同様にして　$\{eqe\}=1/2e$
$x_1=4\{exe\}$，$y_1=4\{eye\}$　とおくと Macdonald の定理により
$\{exe\}=\{\{epe\}(4x)\{epe\}\}=\{e\{px_1p\}e\}$　と
$\{eye\}=\{e\{qy_1q\}e\}$　が得られる。
従って　$\{exe\}+\{eye\}$

$$=\{e(\{px_1p\}+\{qy_1q\})e\}$$
$$=((2e-1)\circ(\{px_1p\}+\{qy_1q\})\circ e$$

と

$$\phi(\{px_1p\}+\{qy_1q\})$$
$$=\phi(\{px_1p\})+\phi(\{qy_1q\})$$

（補題 2.4 より）

$$\phi(\{exe\}+\{eye\})=(\phi(2e-1)\circ(\phi(\{px_1p\})+\phi(\{qx_1q\})))\circ\phi(e)$$
$$=\phi(\{exe\})+\phi(\{eye\})$$

を得る。

定義 2.8　次の (i)〜(iii) を満足するMのn個の巾等作用素の集合E_nをMの対角単位と呼ぶ。

(i)　E_n の全ての元の和がMの単位元1に等しい。
(ii)　E_n の任意の2元は直交している。
(iii)　E_n の任意の2元は強連結である。

補題 2.9　Mが対角単位 E_n $(n \geqq 2)$ を持てば ϕ は $R\cdot 1$ 上で加法的である。従って $R\cdot x$ 上加法的である。

証明　補題 2.7 に於いて $e=e_i$, $f=e_j$ $(i \neq j)$, $x=\alpha\cdot 1$, $y=\beta\cdot 1$ $(\alpha, \beta \in C)$ とおけば、

$$\phi(\alpha e_i+\beta e_i)=\phi(\alpha e_i)+\phi(\beta e_i) \qquad (i=1,2,\ldots,n)$$

故に

$$\begin{aligned}\phi(\alpha\cdot 1+\beta\cdot 1)&=\phi(\Sigma(\alpha+\beta)e_i)\\&=\Sigma\phi((\alpha+\beta)e_i) \qquad (\text{補題 2.5})\\&=\Sigma(\phi(\alpha e_i)+\phi(\beta e_i))\\&=\Sigma\phi(\alpha e_i)+\Sigma\phi(\beta e_i)\\&=\phi(\Sigma\alpha e_i)+\phi(\Sigma\beta e_i) \qquad (\text{補題 2.5})\\&=\phi(\alpha\cdot 1)+\phi(\beta\cdot 1)\end{aligned}$$

従って

$$\begin{aligned}\phi(\alpha x+\beta x)&=\phi((\alpha+\beta)\cdot 1)\circ\phi(x)\\&=(\phi(\alpha\cdot 1)+\phi(\beta\cdot 1))\circ\phi(x)\\&=\phi(\alpha x)+\phi(\beta x)\end{aligned}$$

を得る。

補題 2.10　Mに対角単位 E_n $(n \geqq 2)$ が存在するとき Mの対称元 s, t に対して (i.e. $s^2=1$, $t^2=1$) $\phi(s+t)=\phi(s)+\phi(t)$ が成立する。

証明　$e=1/2(1+s)$, $f=1/2(1-t)$ とおくと、eとfは巾等元となる。
$s=2e-1$, $t=1-2f$ だから $s+t=2(e-f)$
従って 補題 2.3 と 補題 2.5 と 補題 2.9 により

$$\begin{aligned}\phi(s+t)&=\phi(2(e-f))=2\phi(e-f)\\&=2(\phi(e)-\phi(f))\\&=\phi(e)-(1-\phi(e))+(1-\phi(f))-\phi(f)\\&=\phi(e)+\phi(-(1-e))+\phi(1-f)+\phi(-f)\\&=\phi(e-(1-e))+\phi(1-f)-f)\\&=\phi(s)+\phi(t)\end{aligned}$$

補題 2.11　Mが対角単位E_n（$n \geq 2$）を持てば
$\phi(x) = \sum_i \phi(\{e_i x e_i\}) + 2\sum_{i<j} \phi(\{e_i x e_j\}$ が成立する。

証明　$\sum_i \phi(e_i) = 1$ より

$$\phi(x) = ((2\sum_i \phi(e_i) - 1) \circ \phi(x)) \circ (\sum_i \phi(e_i))$$

$$= 2\sum_i (\phi(e_i) \circ \phi(x)) \circ \phi(e_i)$$

$$+ 2\sum_{i \neq j} (\phi(e_i) \circ \phi(x)) \circ \phi(e_j)$$

$$- \sum_i \phi(x)\, \phi(e_i)$$

$$= \sum_i ((2\phi(e_i) - 1) \circ \phi(x)) \circ (e_i)$$

$$+ 2\sum_{i \neq j} (\phi(e_i) \circ \phi(x)) \circ \phi(e_j)$$

$$\begin{aligned} 2\phi(e_i) - 1 &= \phi(e_i) - (1 - \phi(e_i)) \\ &= \phi(e_i) - \phi(1 - e_i) = \phi(-(1 - e_i)) \\ &= \phi(e_i - (1 - e_i)) = \phi(2e_i - 1) \end{aligned}$$

従って　$(\phi(2e_i - 1) \circ \phi(x) \circ \phi(e_i)$

$$= \phi(((2e_i - 1) \circ x) \circ e_i)$$

$$= \phi(\{e_i x e_i\})$$

直交する巾等元　e_i と e_i は
作用素可換から　$(e_i \circ x) \circ e_j = (e_j \circ x) \circ e_i$
だから　$i \neq j$　に対して

$$(\phi(e_i) \circ \phi(x) \circ \phi(e_j)) + (\phi(e_j) \circ \phi(x)) \circ \phi(e_i)$$

$$\begin{aligned} &= \phi((e_i \circ x) \circ e_j) + \phi((e_j \circ x) \circ e_i) \\ &= 2\phi((e_i \circ x) \circ e_j) \\ &= \phi(2(e_i \circ x) \circ e_j) \qquad \text{（補題 2.9）} \\ &= \phi(\{e_i x e_j\}) \end{aligned}$$

この補題 2.11 はMが対角単位E_n（$n \geq 2$）を持てば　写像　$\phi_i : x \longmapsto \phi(\{e_i x e_i\})$ と　写像$\phi_{i,j} : x \longmapsto \phi(\{e_i x e_j\})$
が加法的ならばϕは加法的であることを示している。既にϕ_i の加法性は補題 2.7

で示されているのでϕの加法性を示すためには $\phi_{i,j}$ の加法性を示せば良いことがわかる。

命題 2.12　Mが対角単位E_n ($n \geqq 4$) を持つ実 Jordan 代数ならば M上の Jordan 写像ϕは加法的である。

証明　互いに異なる添数 i, j, m, nに対して、部分対称元 $s_{i,j}$ と $s_{m,n}$ が存在して $s^2 = e_i + e_m$, $s^2 = e_j + e_n$, $\{s_{i,m}\ e_i\ s_{i,m}\} = e_m$, $\{s_{j,n}\ e_j\ s_{j,n}\} = e_n$ が成立する。
$r = 2\{e_i\ s_{i,m}\ e_m\}$, $t = 2\{e_j\ s_{j,n}\ e_n\}$, $s = r + t$,
$e = e_i + e_j$, $f = e_n + e_m$ とおくと補題 1.1 により
$r^2 = e_i + e_m$, $t^2 = e_j + e_n$
また補題 1.4 より $r \circ t = 0$ 従って $s^2 = e + f$ が成立し、
$\{r e r\} = e_m$, $\{t e t\} = e_n$, $\{r e t\} = 0$ 従って $\{s e s\} = f$が成立する。故に巾等元eとfは部分対称元sによって強連結である。
従って 補題 2.7 により
$\phi(\{exe\} + \{eye\}) = \phi(\{exe\}) + \phi(\{eye\})$ が成立する。補題 1.4 により

$$\begin{aligned} &\{e\ \{e_i\ x e_j\}\ e\} \\ &\quad = 2(e \circ \{e_i\ x e_j\}) \circ e - \{e_i\ x e_j\} \circ e \\ &\quad = \{e_i\ x e_j\} \end{aligned}$$

となり

$$\begin{aligned} &\phi(\{e_i\ x e_j\} + \{e_i\ y e_j\}) \\ &\quad = \phi(\{e\ \{e_i\ x e_j\}\ e\} + \{e\ \{e_i\ y e_j\}\ e\}) \\ &\quad = \phi(\{e_i\ x e_j\}) + \phi(\{e_i\ y e_j\}) \end{aligned}$$

だから 写像 $x \longmapsto \phi(\{e_i\ x e_j\})$ は任意の異なるi, jについて加法的である。 補題 2.7 と併せると結論を得る。

3.　Jordan　Banach代数上のJordan写像

この節では対称となるMは unital な実 Jordan Banach 代数とする。

補題 3.1　eとfを直交するMの巾等元とする。
このとき$\|x\| \leqq 1$となる $x \in M$に対して、$\{e x f\} = \{e s f\}$ となる対称元 sが存在する。

証明　$g=1-e$, $a=\{e\{xgx\}e\}$, $b=\{g\{xex\}g\}$とおく。$M_e(a)$ (resp. $M_g(b)$) はeとaを (resp. gとbを) 含むU_eM (resp. U_gM) の最小の閉部分代数とする。
$\{p_n(\lambda)\}$を$[-1, 1]$上$\sqrt{1-\lambda}$へ一様収束する多項式とする。
$\|x\|\leqq 1$ より $\|a\|\leqq 1$, $\|b\|\leqq 1$ であり
$e\circ\{exy\}=g\circ\{exg\}=1/2\{exg\}$ (補題 1.4) と
$a^K\circ\{exg\}=b^K\circ\{exg\}$ $(k=1,2,\ldots)$ が成立するから
$\{p_n(a)\}$ (resp. $\{p_n(b)\}$) は$\sqrt{e-a}$ (resp. $\sqrt{g-b}$) に一様収束する。従って$\sqrt{e-a}\circ\{exg\}=\sqrt{g-b}\circ\{exg\}$が成立する。
$s=\sqrt{e-a}-\sqrt{g-b}+2\{exg\}$とおくと
$\sqrt{e-a}\circ\sqrt{g-b}=0$ (補題 1.5)
補題 1.1 と上のことより sはMの 対称元となる。更にeとfは作用素可換であり、補題 1.4より

$$
\begin{aligned}
\{esf\} &= 2(e\circ s)\circ f\\
&= (\ e-a+2\{exg\})\circ f\\
&= 2\{exf\}\circ f\\
&= \{exf\}
\end{aligned}
$$

命題 3.2　Mが対角単位E_n $(n\geqq 2)$を持つ実 Jordan Banch 代数, Nが実 Jordan normed 代数ならばMからNへの Jordan 写像 ϕ は線形である。

証明　$\delta=\|x\|+\|y\|$, $x_1=\delta^{-1}x$, $y=\delta^{-1}y$とおくと、ある固定されたi, j $(i\neq j)$について、$\{e_i xe_j\}=\{e_i se_j\}$, $\{e_i y_1 e_j\}=\{e_i te_j\}$となる対称元$s$, tが存在する。
従って

$$
\begin{aligned}
&\phi(\{e_i(x+y)e_j\})\\
&=\phi(\delta\cdot 1)\circ\phi(\{e_i x_1 e_j\}+\{e_i y_1 e_j\})\\
&=\phi(\delta\cdot 1)\circ\phi(\{e_i se_j\}+\{e_i te_j\}) \quad (\text{補題 } 3.1)\\
&=\phi(\delta\cdot 1)\circ\phi(\{e_i(s+t)e_j\})\\
&=\phi(\delta\cdot 1)\circ\phi(2(e_i\circ(s+t)\circ e_j))\\
&=2\phi(\delta\cdot 1)\circ((\phi(e_i)\circ\phi(s+t))\circ\phi(e_j))\\
&=2\phi(\delta\cdot 1)\circ((\phi(e_i)\circ(\phi(s)+\phi(t)))\circ\phi(e_j))\\
&\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad (\text{補題 } 2.10)\\
&=\phi(\delta\cdot 1)\circ\phi(\{e_i se_j\})+\phi(\{e_i te_j\})\\
&=\phi(\{e_i xe_j\})+\phi(\{e_i ye_j\})
\end{aligned}
$$

故に 写像 $x\longmapsto\phi(\{e_i xe_j\})$ は加法的であり、補題 2.7 と併せ

ると　補題 2.11 により　ϕ はM上加法的である。
写像　ϕ が加法的だから任意の整数 n と任意の自然数 m に対して
$n\phi(x) = \phi(m(n/m\ x) = m\phi(n/m\ x)$　従って任意の有理数 p に対して　$\phi(px) = p\phi(x)$　全ての　$x \in M$ に対して成立する。
$[\lambda]$ が λ を越えない最大の整数を表わすものとする（Gauss の記号）。この時任意の正の数 λ に対して　ϕ が正値写像だから

$$0 \leqq \phi(\lambda \cdot 1) \leqq \phi((1/[1/\lambda]) \cdot 1) = (1/[1/\lambda]) \cdot 1$$

従って　$\lambda \longmapsto \phi(\lambda \cdot 1)$ は　$0 \in R$ で連続である（$\phi(-1) = -1$）。
故に　R上で連続であり、任意の実数 r に対して　$\phi(rx) = r\phi(x)$　（$x \in M$）が成立する。

主定理の証明　　Mは次の形に直和分解される。
即ち　$M = M_1 \oplus M_2 \oplus M_3 \oplus M_4 \oplus \cdots\cdots$
ここで M_1 は I_∞ 型ＪＢＷ代数、M_2 はⅡ型ＪＢＷ代数、M_3 はⅢ型ＪＢＷ代数、M_i　（$i \geqq 4$）は I_{n_i} 型（$n_i \geqq 2$）ＪＢＷ代数である。各 M_i は各々対角単位 E_{n_i}　（$n_1 = n_2 = n_3 = 4$, $n_i \geqq 2$ （$i \geqq 4$））を持つ実Jordan Banach 代数であるから、$p_i = 0 \oplus 0 \oplus \cdots\cdots \oplus 1 \oplus 0 \oplus \cdots\cdots$ とおくと、$M \circ p_i$ は M_i と同型な実 Jordan Banach　代数だから　$M \circ p_i$ と M_i を同一視することにする（i.e.　$M \circ p_i = M_i$）。　$\phi(M \circ p_i) = N_i$ とすると、N_i はNの Jordan　部分代数で　$\phi_i = \phi|(M_i \circ p_i)$ は $M_i \circ p_i$ から N_i への Jordan 写像である。
従って　命題 3.2　により線形写像である。Nと $\oplus N_i$ は
写像 $\eta : \phi(x) \longmapsto \oplus\phi(x) \circ \phi(p_i)$　によって代数的に Jordan 同形であり、Mと $\oplus(M \circ p_i)$ も　写像 $\theta : x \longmapsto \oplus\phi(M \circ p_i)$ によって代数的に Jordan 同形である。更に次の diagram　は可換となっているから ϕ は線形写像である。

$$\begin{tikzcd}
M \arrow[r, "\phi"] \arrow[d, "\theta"'] & N \arrow[d, "\eta"] \\
\oplus M_i \arrow[r, "\oplus\theta_i"'] & \oplus N_i
\end{tikzcd}$$

参　考　文　献

【１】　N.Jacobson, Structure and Representatins of Jordan dgdras, Amer.Math.Soc.Colloq.Publ.　３９，１９６８．

【２】　羽毛田　穣祐：　作用素代数上の乗法的写像の加法性について，作用素・作用素環論研究集会記録，１９８４．

【３】　H.H.Olson and E.Stormer, Jordan Operator Algebras, Pitman, １９８４．