数理解析研究所講究録
第560巻 1985年 110-117

C^*-接合積上のトレースについて

岡大教養　梶原 毅
(Tsuyoshi Kajiwara)

§0. Introduction

局所コンパクト群 G が I 型でないときには既約ユニタリ表現全体を分類することは不可能とされており，別の対象を考えることが必要になる。G に対して群環 $C^*(G)$ または $C_r^*(G)$ を考えて，その原始イデアル空間の分類またその位相の研究は Effros，Hahn，Gootman，Rosenberg 等によって進展した。群 G が正規部分群 N によって群拡大の形になっていて G/N が amenable のときには Mackey 型の定理が成立することが知られている。[1].

一方，因子表現の中でもトレースを持つ表現は正規表現と呼ばれて特別の意味を持っており，また正規表現全体がスタンダード Borel 空間になることも知られている。ところが G が必ずしも離散でない場合にはトレースは有界な汎関数ではなくなってしまう。そのために $C_r^*(G)$ のトレースを N まで還元して議論することが容易でなくなり，これがトレースの理論がイデアル論ほどに完成されていない1つの理由である。

そこで，この問題に対する１ステップとして $C_r^*(G)$ 上のトレースで N から来ているものをいかに特徴づけるか，ということが考察の対象になる。N が G の閉正規部分群とするとき，$C_r^*(N)$ 上の適当なトレースは $C_r^*(G)$ まで誘導することができ，表現論的には Mackey の誘導表現 [4] に対応している。この誘導されたトレースを $C_r^*(G)$ と N によって決まる代数的なあるものによって規定することが本講演の目的である。ただし，$C_r^*(G)$ のかわりに C^*-接合積 $C_r^*(A, G, \alpha)$ を考えて少し一般化しても本質的には変わらないので，接合積の方を考察の対象とする。

§１． 主定理

(A, G, α) を C^*-力学系とし，N を G の閉正規部分群とする。C^*-接合積 $C = C_r^*(A, G, \alpha)$ と $D = C_r^*(A, N, \alpha)$ を考える。φ_0 は D 上の下半連続半有限（以下略）なトレースで，G の作用によって $\Delta_{G/N}$（G/N のモジュラー関数）-相対不変であるとする。

補題 1．[6]

φ_0 を C まで誘導することができ，対応する GNS 表現は誘導表現である。

次にこの誘導されたトレース（$\mathrm{Ind}_{N\uparrow G}\varphi_0$ とかく）を特徴づける代数的手段について説明する。Aはある Hilbert 空間 $\mathcal{H}$ 上に忠実に表現されているとする。このとき C は $L^2(\mathcal{H}, G)$ 上に自然に表現される。$L^2(\mathcal{H}, G)\otimes L^2(G/N)$ 上のユニタリ作用素 W を

$$(W\xi)(s, t) = \xi(s, \dot{s}\cdot t)$$

によって定義する。$x \in C$ に対して $\delta(x) = W^*(x\otimes 1)W$ とおくと δ は G/N の C 上の標準的な co-action を与える。また、λ で G/N の左正則表現を表すとき、$j(\lambda(\dot{x})) = \lambda(\dot{x}^{-1})$ は $C^*_r(G/N)$ の対合（同じ j で表す）を与える。

定義 2 [6]

C 上のトレース φ が (δ, j) 不変であるとは

$$\langle \delta(x), \varphi\otimes\omega\rangle = \langle x\otimes 1, \varphi\otimes\omega\rangle \quad \forall x\in C^+,\ \forall \omega\in C^*_r(G)^*_+$$

$$\langle (y^*\otimes 1)\delta(x), \varphi\otimes k\rangle = \langle \delta(y^*)(x\otimes 1), \varphi\otimes(k\circ j)\rangle \quad \forall x, y\in n_\varphi,\ \forall k\in A(G/N).$$

が成り立つことである。ここで n_φ は φ の L^2-元全体、$A(G/N)$ は G/N の Fourier 環を表す。

以上の準備のもとで主定理をのべることができる。

定理

C 上のトレース φ が N から誘導されているための必要十分条件は、φ が (δ, j) 不変なことである。

注意

Gが可換でNが自明な部分群であるときには(δ, τ)不変性は$\hat{G}$による双作用による不変性に対応し，このとき定理は，N. V. Pedersenの結果[5]になる。

§2. 証明の概略

上の定理はMackey–TakesakiのImprimitivity定理のトレース版と考えられ，証明もこれを用いて行なわれる。証明の際の問題点はC^*-環の状況とW^*-環の状況をつなぐところである。

φを$C = C_r^*(A, G, \alpha)$のトレースで(δ, τ)不変なものとする。$\mathcal{H}_\varphi$でφによるGNS表現のHilbert空間を表す。$k \in A(G/N)$に対してδ_kを$\delta_k(f)(g) = k(\dot{g})f(g)$　$(f \in C_c(A, G))$によって定義する。δ_kはC上の線型写像に拡張できる。明らかに$k \to \delta_k$は代数的な準同型を与えている。

補題 3.

$k \to \delta_k$は$A(G/N)$の$\mathcal{H}_\varphi$上の有界な$*$表現になる。さらに$C_0(G/N)$の有界な$*$表現に拡張することができる。

δ_kの定義から直ちに，この表現がGNS表現π_φに対してG/Nを底とするimprimitivity系をなすことがわかる。Mackey–Takesakiの定理により，次のことがわかる。

補題4.

π_φに対して$C^*_r(A, N, \alpha)$の表現π_0が一意的に存在して　$\pi_\varphi \cong \mathrm{Ind}_{N \uparrow G}\, \pi_0$ となる。

π_0はG-不変な表現である保証がないのでπ_0をGで平均した表現をΠで表す。（$\Pi = \int_G^\oplus g\,\pi_0 dg$）このとき$\mathrm{Ind}\,\pi_0$と$\mathrm{Ind}\,\Pi$はquasi-同値になるのでそれらの値域が生成するW^*環は代数的に同型になる。このW^*環をMで表す。MはΠによって生成されているとする方が都合が良い。$\tilde{\varphi}$でφのMへの正規拡張を表す。C^*-接合積の場合と同じように，$M = (\mathrm{Ind}\,\Pi(C))''$上に$G/N$のcoactionを標準的に定義することができる。これに対しても同じ記号δを用いる。このときKac環のW^*-環上への作用についてのStratila-Voiculescu-Zidoの結果［7］を用いることによって次のことがわかる。

補題5.

$\tilde{\varphi}$は(δ, g)不変である。

Mは必ずしもW^*-接合積にはなっていないが接合積に類似のもの（Exteded covariance algebra などと呼ばれる）になっており，これに対してもW^*-接合積と同様の議論をほとんど全て展開することができる。そこでHaagerup［3］の議論を借用することによって次のことがわかる。

補題6.

$P = \pi(C_r^*(A, N, \alpha))''$ とすると P 上に正規忠実半有限(これも以下略す)トレース $\tilde{\varphi}_0$ が一意的に存在して $\tilde{\varphi} = \mathrm{Ind}_{N\uparrow G}\,\tilde{\varphi}_0$ となっている。

P の中で $D = C_r^*(A, N, \alpha)$ は dense に表現されているが、$\tilde{\varphi}_0$ のそこへの制限はすべて発散する恐れがあるのでそうならないことを証明しなければならない。そのためには C, M 上の G/N の co-action による二重接合積を考えてそれらの双対性を用いることが必要になる。$\tilde{\pi} = \mathrm{Ind}_{N\uparrow G}\,\pi$ とする。

補題7.

$$C^*(\tilde{\pi}(C), G/N, \delta) \cong \pi(C) \otimes \mathcal{C}(L^2(G/N))$$

$$W^*(M, G/N, \delta) \cong P \otimes \mathcal{B}(L^2(G/N))$$

であり、上の2つの同型は同一のユニタリ作用素 U によって与えられる。$\mathcal{C}$ はコンパクト作用素全体、$\mathcal{B}$ は有界線型作用素全体を表す。

G/N による co-action は W^* 環の状況において Haagerup の定義した作用素値重み[2]を与えるので、これを用いて、co-action によるトレースの誘導を考えることができる。$\tilde{\varphi}$ を $W^*(M, G/N, \delta)$ に誘導したトレースを $\tilde{\varphi}_1$ と表す。

補題8.

$\tilde{\varphi}_1$ を $C^*(\tilde{\pi}(C), G/N, \delta)$ に制限すると半有限である。

そこで $\tilde{\varphi}_1$ の制限を φ_1 と表す。

補題9.

$\tilde{\varphi}_1$, φ_1 を補題7の右側で考えるとそれぞれ $\varphi_0 \otimes \mathrm{Tr}$ と, $\varphi_0 \otimes \mathrm{Tr}$ の C^*-部分環への制限になっている。

φ_1, Tr が $\pi(D) \otimes \mathcal{C}(L^2(G/N))$, $\mathcal{C}(L^2(G/N))$ の半有限トレースであることから次のことがわかる。

補題10.

$\tilde{\varphi}_0$ の $\pi(D)$ への制限は半有限である。

この補題によって W^*-接合積の議論から C^*-接合積の論が導かれたことになる。

補題11.

$\varphi_0 = \tilde{\varphi}_0 \circ \pi|_D$ とすると, $\varphi = \mathrm{Ind}_{N \uparrow G}\, \varphi_0$ となる。

これが求める結果である。

注意. G を局所コンパクト群, K も局所コンパクト群で G の中に dense に入っているとする。$C^*_r(C_0(G), K)$ は単純であることが知られているが K が離散でない場合にはこの C^*-環のトレースが $C_0(G)$ から誘導されたものに限るかどうかは難かしい問題である。G が可換のときには定理を適用して一意性が得られるが, 可換でない場合に定理が適用できるかどうか今のところ, よくわからない。

参考文献

[1] E. Gootman and J. Rosenberg, The structure of crossed product C^*-algebras, Invent. Math., 102(1979), 283-298.

[2] U. Haagerup, Operator valued weights in von Neuman algebras, preprint.

[3] U. Haagerup, On the dual weights for crossed products of von Neumann algebras, Math.,Scand., 43 (1978) 99-118.

[4] G.W. Mackey, Induced representations of locally compact groups, Ann. Math., 55(1952), 139-161.

[5] N.V. Pedersen, On certain KMS weights on C^*-crossed products, Proc. London Math., 44(1982), 445-472.

[6] L. Pukansky, Characters of connected Lie groups, Acta Math., 133(1974), 81-137.

[7] S. Stratila, D. Voiculescu and L. Zido, On crossed products, Rev. Roumania, (1976), 1411-1449.

[8] M. Takesaki, Covariant representations of C^*-crossed products and their locally compact automorphism groups, Acta Math., 119(1967), 273-302.