数理解析研究所講究録
第 560 巻 1985 年 128-141

Injective envelopes and Morita equivalence

富山大教育 浜名 正道 (Masamichi Hamana)

本稿ではいくつかの categories における injective envelopes の存在とそれらに関係した結果について述べる。また, W^*-代数の場合の自然な一般化として単調完備 C^*-代数の連続接合積を導入する。

1. Triple systems と森田同値性.

C^*-代数 C の triple product : $[x, y, z] = xy^*z$ に関して閉じているノルム閉線型部分空間を C の <u>triple subsystem</u> と呼ぶ。また, ある C^*-代数の triple subsystem として実現できる線型空間を <u>triple system</u> と呼ぶ。triple system は次のように特徴付けられる [3, 15]:

X が triple system $\Longleftrightarrow$ $\exists$ C^*-代数 C_X, $\exists$ 射影 $e, f \in M(C_X)$ (C_X の multiplier algebra) : $X = eC_Xf \subset C_X$.

実際, ($\Leftarrow$) は明らかである。($\Rightarrow$) を示すために, X を triple subsystem として含む C^*-代数 C を取る。そのとき

$$K_\ell(X) = \overline{lin}(XX^*),\quad K_r(X) = \overline{lin}(X^*X)$$

($\overline{lin}$ は closed linear span を表す）は C の C^*-部分代数であり，

$$C_X = \begin{pmatrix} K_\ell(X) & X \\ X^* & K_r(X) \end{pmatrix} \subset C \otimes M_2$$

は $C \otimes M_2$ の C^*-部分代数である。 $e = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$，$f = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$（1 は $M(C)$ の単位元）とおくと $X \cong \begin{pmatrix} 0 & X \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = eC_Xf$（triple systems として同型）となる。ここで C_X の選び方は C の選び方に依るが，$K_\ell(X)$，$K_r(X)$ は C には依らず X だけから定まる。

triple system X に対し，$A = K_\ell(X)$，$B = K_r(X)$ とおくと X は

$$\langle x, y\rangle_\ell = xy^*,\quad \langle x, y\rangle_r = y^*x,\quad x, y \in X$$

によって定義される A-値内積 $\langle\cdot,\cdot\rangle_\ell$，B-値内積 $\langle\cdot,\cdot\rangle_r$ をもつ A-B-bimodule となる。逆に，C^*-代数に値をもつ内積加群 [11, 13] は（本質的には）triple system から上記のようにして得られる。X 上の adjoint をもつ有界 B-加群自己準同型全体（T の adjoint T^* は $\langle T^*x, y\rangle_r = \langle x, Ty\rangle_r$，$x, y \in X$ によって定義される）を $M_\ell(X)$ と表し，$xy^* \in A$ を $(X \ni z \mapsto xy^*z \in X) \in M_\ell(X)$ と同一視することによって $A \subset M_\ell(X)$ と見做すと，$M_\ell(X) = M(A)$ となる [9]。同様に $M_r(X) \supset B$ が定義され，$M_r(X) = M(B)$ となる。このとき Rieffel [13] の意味での強森田同値性，森田同値性は次のよう

に定式化できる[3]： C^*-代数 A, B が強森田同値 (resp. 森田同値) であるとは，ある triple system X が存在して，$A = K_\ell(X)$, $B = K_r(X)$ (resp. $A = M_\ell(X)$, $B = M_r(X)$) となるときをいう。この X は A-B-equivalence bimodule と呼ばれる。

2. Category $\mathscr{C}$.

ある C^*-代数のノルム閉線型部分空間として実現できる線型空間を operator space と呼ぶ。operator spaces $V \subset C$, $W \subset D$ (C, D は C^*-代数) に対し，$\varphi : V \longrightarrow W$ が完全有界 (resp. complete isometry, …) とは，$\|\varphi\|_{cb} \equiv \sup_n \|\varphi \otimes id_n\| < \infty$ (resp. $\varphi \otimes id_n$ $(n=1,2,\cdots)$ が全て isometry, …)，ここで $\varphi \otimes id_n : V \otimes M_n \longrightarrow W \otimes M_n$ であり，$V \otimes M_n$ には C^*-代数 $C \otimes M_n$ の部分空間としてノルムを入れる，となるときをいう。

operator spaces と完全有界写像から成る category を $\mathscr{C}$ とする。$\mathscr{C}$ における "同型" を onto complete isometry として定義し，$V, W \in \mathscr{C}$ が completely isometric のとき $V \sim W$ と書く。

$V \in \mathscr{C}$ が C^*-代数 (resp. triple system, …) であるとは，$V \sim A$ となる C^*-代数 A (resp. triple system, …) があるときをいう。(A, B が共に C^*-代数のとき $A \sim B$ ならば $A \cong B$ ($*$-isomorphic) となる。A, B が triple systems のときも同様。従って上記の A は一意に定まる。)

$V \in \mathscr{C}$ が injective であるとは，$\forall W$, $\forall Z \in \mathscr{C}$, $W \subset Z$,

$\forall$ 完全有界な $\varphi : W \to V$, $\exists$ 完全有界な $\hat{\varphi} : Z \to V$ s.t. $\hat{\varphi}|W = \varphi$, $\|\hat{\varphi}\|_{cb} = \|\varphi\|_{cb}$, となるときをいう。既知の結果と比較するために，別の category $\mathscr{C}'$ を考える。ここで $\mathscr{C}'$ の対象は <u>operator systems</u> (= operator spaces $V \subset C$ (C は C^*-代数) s.t. C の単位元 $1 \in V$, $x \in V \Rightarrow x^* \in V$) であり，$\mathscr{C}'$ の射は完全正値写像である。$\mathscr{C}$ の場合と同様に $\mathscr{C}'$ における injectivity が定義されるが，それは通常の意味での injectivity [2] である。Arveson [1] (resp. Paulsen [12], Wittstock) の結果は $B(H)$ が $\mathscr{C}'$ (resp. $\mathscr{C}$) において injective であることを意味する。従って任意の $V \in \mathscr{C}$ は injective operator space $B(H)$ に含まれ，このとき定義より

V が injective $\Longleftrightarrow$ V は $B(H)$ 上の completely contractive projection の像となる。

$\mathscr{C}'$ においては，injective operator system = injective C^*-代数 (i.e., injective operator system には C^*-代数の構造が一意に定まる [2]) であるが，以下で見るように，$\mathscr{C}$ において

injective operator space = pAq (A は injective C^*-代数, p, q は A の射影)

となり，従ってこれは triple system となる。(任意の C^*-代数上の completely contractive projection の像が triple system となることは知られている [14]。)

$\mathcal{C}'$ の対象が一意的な injective envelope をもつことは知られている [5] が，この結果が次のように拡張できる。

<u>Theorem 1.</u> (i) 任意の operator space V は一意的な injective envelope $I(V)$ (i.e., V を含む $\mathcal{C}$ の最小の injective object) をもつ。更に $I(V)=pAq$，A は injective C^*-代数，$p, q \in A$ は射影，$C(p)=C(q)=1$ ($C(\cdot)$ は中心台を表す) と表せる。

(ii) (i) において V が triple system とすれば，V は triple system $I(V)=pAq$ の triple subsystem，

$$I(M_\ell(V))=pAp, \quad I(M_r(V))=qAq$$

となり，$I(V)$ は pAp-qAq-equivalence bimodule となる。従って injective envelope を取ることによって森田同値性は保存される。

<u>Remark.</u> (ii) における $V \subset A$ の A における単調閉包 (V を含み，A における順序収束に関して閉じている最小の部分空間) を $\overline{V}$ と表すと，$\overline{V}$ は単調完備 C^*-代数 $\overline{M_\ell(V)}$, $\overline{M_r(V)}$ (C^*-代数 B に対し $\overline{B}$ は B の正則単調完備化 [6] を表す) の間の森田同値性を定義する equivalence bimodule となる。特に V が単調完備 C^*-代数上の内積加群のとき，$\overline{V}$ は [8] の意味での V の自己共役完備化 (V を含む最小の自己共役内積加群) となる。

[5]で示された operator system に対する(Arveson [1] の意味での) $\check{S}$ilov 境界の存在性を $\mathscr{C}$ における結果に拡張しよう。

operator space V が C^*-代数 C に含まれているとき,

$T(V;C) =$ (V を含む C の最小の triple subsystem),

$K_\ell(V;C) = C^*(VV^*)$, $K_r(V;C) = C^*(V^*V)$

($C^*(\{\cdot\})$ は $\{\cdot\}$ で生成される C^*-代数を表す)とおく。特に C として Theorem 1 (i) の A を取るとき,これらをそれぞれ $T(V)$, $K_\ell(V)$, $K_r(V)$ と表す。triple systems X, Y に対し $\varphi([x,y,z]) = [\varphi(x), \varphi(y), \varphi(z)]$, $x, y, z \in X$ を満たす線型写像を <u>triple homomorphism</u> と呼ぶ。(C^*-代数の間の $*$-準同型と同様に,triple homomorphism は常に contractive であり,その像が triple subsystem (i.e. ノルム閉)となることが示せる。)次の結果は,C の取り方によって変化する $T(V;C)$ の中で $T(V)$ が最小のものであることを主張する。そして $\mathrm{Ker}\,\varphi$ が operator system の場合の $\check{S}$ilov 境界に相当するものである。

<u>Theorem 2.</u> 上の記号を用いる。そのとき $T(V;C)$ から $T(V)$ の上への triple homomorphism φ が存在する。そして $xy^* \longmapsto \varphi(x)\varphi(y)^*$ によって $K_\ell(V;C)$ から $K_\ell(V)$ の上への $*$-準同型が誘導される($K_r(\cdot)$ の場合も同様)。

3. Category $\mathscr{C}_G$.

Gを左不変Haar測度 dt をもつ局所コンパクト群とする。この節では前節の結果をGが連続に作用している場合に拡張する。$\mathscr{C}_G$ を次のように定義される G-modules と G-morphisms から成る category とする：先づ $L^\infty(G)$ を作用

$$(f\cdot x)(s) = \int f(t)\, x(st)\, dt \quad (x \in L^\infty(G),\ f \in L^1(G))$$

によって左 Banach $L^1(G)$-加群と考える。任意の operator space V に対し V と $L^\infty(G)$ の Fubini 積 $V \bar{\otimes} L^\infty(G)$ を以下で定義する [7]：$V \subset B(H)$ のとき

$$V \bar{\otimes} L^\infty(G) = \{ x \in B(H) \bar{\otimes} L^\infty(G) \mid L_f(x) \in V,\ \forall f \in L^1(G) = L^\infty(G)_* \}$$

とおく（$B(H) \bar{\otimes} L^\infty(G)$ は W^*-テンソル積，$L_f : B(H) \bar{\otimes} L^\infty(G) \longrightarrow B(H)$ は左 slice map を表す）。この $V \bar{\otimes} L^\infty(G)$ は $B(H) \supset V$ の選び方に依らず（complete isometry を除いて）一意に定まる。$V \bar{\otimes} L^\infty(G)$ に $L^1(G)$-加群の構造を

$$R_g(f\cdot x) = f\cdot R_g(x) \quad (x \in V \bar{\otimes} L^\infty(G),\ f \in L^1(G),\ g \in V^*)$$

（$R_g : V \bar{\otimes} L^\infty(G) \longrightarrow L^\infty(G)$ は右 slice map）によって入れたものを canonical G-module と呼ぶ。そして一般の G-module を canonical G-module の $L^1(G)$-部分加群として定義し，G-modules の間の完全有界 $L^1(G)$-加群準同型を G-morphism と呼ぶ。

$\mathscr{C}$ の場合と同様に $\mathscr{C}_G$ における injectivity（G-injectivity

と呼ぶ）が定義される。次の補題により $\mathscr{C}_G$ における injective object の存在が保証される。

<u>Lemma.</u> $V \in \mathscr{C}$ が injective ならば，$V \bar{\otimes} L^\infty(G)$ は G-injective G-module である。

従って任意の G-module X は $B(H) \bar{\otimes} L^\infty(G)$ の形の G-injective G-module の部分加群となり，そして

$$X \text{ が G-injective} \iff X \text{ は } B(H)\bar{\otimes}L^\infty(G) \text{ 上の idempotent G-morphism の像になる}$$

ことと $B(H)\bar{\otimes}L^\infty(G)$ が $\mathscr{C}$ においても injective であることに注意すれば，

$$\text{G-injective} \Rightarrow \text{injective}$$

となることが分る。

・C^*-代数 (resp. 単調完備 C^*-代数，…) と completely isometric な G-module を C^*-G-<u>module</u> (resp. <u>単調完備</u> C^*-G-<u>module</u>，…) と呼ぶ。G-module X に対し X の <u>fixed point subspace</u> X^G を

$$X^G = \{x \in X \mid f \cdot x = \langle 1, f\rangle x,\ \forall f \in L^1(G)\}$$

($\langle 1, f\rangle = \int 1 \cdot f(t)\,dt$) によって定義する。

<u>Theorem 3.</u> (i) 任意の G-module X は一意的な G-injective envelope $I_G(X)$ (i.e. X を部分加群として含む最小の G-injective G-module) をもつ。更に $I_G(V) = pAq$ (A は

G-injective C^*-G-module, p, q は A^G の射影）と表せる。

(ii) (i) において X が unital C^*-代数 (resp. 単調完備 C^*-代数), $1 \in X^G$ とすれば, $I_G(X)$ は X を C^*-部分代数 (resp. 単調閉 C^* 部分代数）として含む injective C^*-代数である。

4. G-module の接合積.

この節では，初めに operator space 上の G-module structure が G の W^*-代数への action の自然な一般化になっていることを示し，次に G-module の接合積を導入する。

G の W^*-代数 M への action は unital *-isomorphism

$$\alpha : M \longrightarrow M \bar{\otimes} L^\infty(G) \quad s.t. \quad (\alpha \bar{\otimes} id) \circ \alpha = (id \bar{\otimes} \alpha_G) \circ \alpha$$

(id は恒等写像）として定義される [10]（そして，これは強連続な G から Aut M への群準同型（普通の意味での action）と 1 対 1 に対応している）。 ここで α_G は Hopf-von Neumann 代数 $L^\infty(G)$ の comultiplication :

$$\alpha_G : L^\infty(G) \longrightarrow L^\infty(G) \bar{\otimes} L^\infty(G), \quad \alpha_G(x)(s,t) = x(st), \quad x \in L^\infty(G)$$

である。この定義に習って G の operator space X への <u>action</u> を complete isometry

$$\alpha : X \longrightarrow X \bar{\otimes} L^\infty(G) \quad s.t. \quad (\alpha \bar{\otimes} id) \circ \alpha = (id \bar{\otimes} \alpha_G) \circ \alpha$$

として定義すると，$\alpha(X)$ は canonical G-module $X \bar{\otimes} L^\infty(G)$ の部分加群となり，従って $X (\sim \alpha(X))$ には G-module の構造

が入る。逆に G-module X ($\subset V\bar{\otimes} L^\infty(G)$: canonical G-module) を与えるとき,

$$id\bar{\otimes}\alpha_G : V\bar{\otimes} L^\infty(G) \longrightarrow V\bar{\otimes} L^\infty(G)\bar{\otimes} L^\infty(G)$$

は X を $X\bar{\otimes} L^\infty(G)$ に写し, 従って $\alpha_X \equiv id\bar{\otimes}\alpha_G|X$ は上述の意味での action となる。以上から operator space X への G の action と X 上の G-module structure とは同一視できる。

Theorem 3 を用いると, G の action α_X のある種の性質は operator space X の性質から導けることが示せる:

<u>Proposition 4.</u> X を G-module とする。X が単調完備 C^*-代数で, $1\in X^G$ ならば, $\alpha_X : X \longrightarrow X\bar{\otimes} L^\infty(G)$ は unital normal $*$-isomorphism となる。従って, 特に (M, G, α) の形の W^*-力学系と $1\in M^G$ を満たす W^* G-module M とは同じものである。また C^*-力学系 (A, G, α) (A は unital) は $1\in A^G$, $\overline{L^1(G)\cdot A}^{norm}$ (ノルム閉包) $= A$ を満たす unital C^* G-module A として特徴付けられる。

今後 $1\in X^G$ を満たす単調完備 C^* G-module X を<u>単調完備 C^*-力学系</u>と呼ぶことにする。

G-module X の接合積 ($X\rtimes_\alpha G$ ($\alpha=\alpha_X$) と表す) を次のように定義する: G の X への action $\alpha=\alpha_X$ に対し, $X\bar{\otimes} B(L^2(G))$ への action $\tilde{\alpha}$ を

$$\tilde{\alpha} = Ad(1\otimes V_G')\circ(id\otimes\sigma)\circ(\alpha\bar{\otimes} id_{B(L^2(G))})$$

によって定義し（V_G, σ の定義は cf.［10］。但し［10］では左不変 Haar 測度を考えているので適当な修正が必要である。以下の W_G に関しても同様），

$$X \rtimes_\alpha G \equiv (X \overline{\otimes} B(L^2(G)))^{\tilde{\alpha}} \quad (\textit{fixed point subspace})$$

とおく。特に X が単調完備 C^*-力学系ならば，$X \rtimes_\alpha G$ は単調完備 C^*-代数となり，これは W^*-代数の接合積の一般化である。

竹崎の双対定理を定式化するために G の operator space への coaction という概念を導入しよう。これは Kac 代数 $L^\infty(G)$ の代りにその dual Kac 代数 $\mathcal{R}(G)$（G の右正則表現によって生成される von Neumann 代数）を考えることによって得られる。$(id_V \overline{\otimes} \delta_G)(Y) \subset Y \overline{\otimes} \mathcal{R}(G)$ を満たすノルム閉線型部分空間 $Y \subset V \overline{\otimes} \mathcal{R}(G)$（$V$ は operator space，δ_G は $\mathcal{R}(G)$ の comultiplication）を <u>co-G-module</u> と呼び，$\delta_Y \equiv id_V \overline{\otimes} \delta_G | Y$ を G の Y への <u>coaction</u> と呼ぶ。そのとき co-G-module の coaction に関する接合積が定義できる。G-module X に対し $X \rtimes_\alpha G$ 上の coaction $\hat{\alpha}$，$(X \rtimes_\alpha G) \overline{\otimes} B(L^2(G))$ 上の coaction $\tilde{\hat{\alpha}}$ を

$$\hat{\alpha}(x) = \mathrm{Ad}(1 \otimes W_G^*)(x \otimes 1), \quad x \in X \rtimes_\alpha G,$$

$$\tilde{\hat{\alpha}} = \mathrm{Ad}(1 \otimes W_G) \circ (id \overline{\otimes} \sigma) \circ (\hat{\alpha} \overline{\otimes} id_{B(L^2(G))})$$

によって定義し，

$$(X \rtimes_\alpha G) \rtimes_{\hat{\alpha}} G \equiv ((X \rtimes_\alpha G) \overline{\otimes} B(L^2(G)))^{\tilde{\hat{\alpha}}}$$

とおき，$(X\rtimes_\alpha G)\rtimes_{\hat\alpha} G$ 上の second dual action $\hat{\hat\alpha}$ を

$$\hat{\hat\alpha}(x) = \mathrm{Ad}(1\otimes V_G')(x\otimes 1), \quad x\in (X\rtimes_\alpha G)\rtimes_{\hat\alpha} G$$

と定義する。そのとき以下の意味で竹崎双対性が成立する：

<u>Proposition 5.</u> X ($\subset V\bar\otimes L^\infty(G)$: canonical G-module) を任意の G-module とし，$\alpha=\alpha_X$ とすると

$$\{(X\rtimes_\alpha G)\rtimes_{\hat\alpha} G,\ \hat{\hat\alpha}\} \cong \{\tilde X\,\bar\otimes\, B(L^2(G)),\ \tilde\alpha\},$$

ここで

$$\tilde X \equiv \{x\in V\bar\otimes L^\infty(G) \mid f.x\in X,\ \forall f\in L^1(G)\}$$

（これは $V\bar\otimes L^\infty(G)\supset X$ の選び方に依らない）。

<u>Remark.</u> X を単調完備 C^*-力学系と仮定しても $\tilde X = X$ かどうかは一般には不明であるが，X が G-injective（又は G が離散群）ならば $\tilde X = X$ となる。

良く知られているように W^*-力学系はそれに含まれるある C^*-力学系の弱閉包として得られる。同様に，任意の C^*-力学系とその単調完備化に付随して単調完備 C^*-力学系が得られることが分る：

<u>Example.</u> (A, G, α) を任意の C^*-力学系，B を A の任意の単調完備化（i.e., A を含み，A によって生成される単調完備 C^*-代数），

$$\pi_\alpha : A \longrightarrow C^b(G, A) \subset A\bar\otimes L^\infty(G) \subset B\bar\otimes L^\infty(G),$$

$$\pi_\alpha(x)(t) = \alpha_t(x), \quad x\in A,\ t\in G$$

とすると $\pi_\alpha(A)$ の単調完備 C^*-代数 $B\bar{\otimes}L^\infty(G)$ における単調閉包（C とする）は単調完備 C^*-力学系となる。

non-W^* となる単調完備化 B（例えば A の正則単調完備化）を取れば，C は一般には non-W^* となる。しかし B が non-W^* であって C が W^* となる場合もある。

REFERENCES

[1] W. Arveson, Subalgebras of C*-algebras, Acta Math. 123(1969), 141-224.
[2] M.-D. Choi and E.G. Effros, Injectivity and operator spaces, J. Funct. Anal. 24(1977), 156-209.
[3] F. Combes and H. Zettl, Order structures, traces and weights on Morita equivalent C*-algebras, Math. Ann. 265(1983), 67-81.
[4] M. Hamana, Injective envelopes of C*-algebras, J. Math. Soc. Japan 31 (1979), 181-197.
[5] ________, Injective envelopes of operator systems, Publ. Inst. Math. Sci. 15(1979), 773-785.
[6] ________, Regular embeddings of C*-algebras in monotone complete C*-algebras, J. Math. Soc. Japan 33(1981), 159-183.
[7] ________, Tensor products for monotone complete C*-algebras, I and II, Japan. J. Math.(N.S.) 8(1982), 259-283, 285-295.
[8] ________, Modules over monotone complete C*-algebras, 作用素論・作用素環論研究集会記録 73-82(1980).
[9] G.G. Kasparov, Hilbert C*-modules: theorems of Stinespring and Voiculescu, J. Operator Theory 4(1980), 133-150.
[10] Y. Nakagami and M. Takesaki, Duality for crossed products of von Neumann algebras, Lecture Notes in Math. 731, Springer-Verlag, Berlin - Heidelberg - New York (1979).
[11] W.L. Paschke, Inner product modules over B*-algebras, Trans. Amer. Math. Soc. 182(1973), 443-468.
[12] V.I. Paulsen, Every completely polynomially bounded operator is similar to a contraction, J. Funct. Anal. 55(1984), 1-17.
[13] M.A. Rieffel, Morita equivalence for C*-algebras and W*-algebras, J. Pure Appl. Algebra 5(1974), 51-96.
[14] M.A. Youngson, Completely contractive projections on C*-algebras, Quart. J. Math. Oxford (2) 34(1983), 507-511.
[15] H. Zettl, A characterization of ternary rings of operators, Advances in Math. 48(1983), 117-143.