数理解析研究所講究録
第 560 巻 1985 年 152-168

Boolean valued analysis and operator algebras

名大・教養　小澤正直（Masanao Ozawa）

§1. 序論. 集合論の分野では1963年にP. J. Cohenによって，連続体仮説及び選択公理の独立性の証明が与えられた。この時，Cohenはforcingという集合論の新しいmodelを構成する方法を開発したが，1966年にD. ScottとR. Solovayは，このforcingの方法を集合論のBoole値modelの方法によって再構成することに成功した。集合論のBoole値modelとは，通常我々が無意識に行なっているように2-値論理を用いて数学的対象を扱う代りに，与えられた完備Boole代数Bを用いたB-値論理を用いて数学的対象を考えたら，様々な数学的対象（それらはすべて集合概念に帰着すると考えられる）がどの様に変化して見えるかを問うことを主眼としている。Boolean valued analysisとはこのBoole値modelの方法をanalysisの問題に応用する統一的な方法を意図している。本稿の目的は，このBoolean valued analysisがoperator algebraの問題にどのように応用されるかを解説

することである。同様の趣旨で筆者は既に数研講究録及び函数解析学シンポジウム報告集（[1-3]）にも報告を載せているので、重複を避ける意味からも、それらをも参考にして載きたく思います。

§2. 連続体仮説の独立性. Boole値modelがどのようなものであるかを示すために，Boole値modelを用いた連続体仮説の独立性の証明を概観してみよう。

連続体仮説というのは，論理式"$(\exists f)\ f: 2^{\aleph_0} \xrightarrow[\text{onto}]{1-1} \aleph_1$"を意味する。この論理式をCHとよび，その独立性とは，CHが集合論の他の公理からは証明できないことである。その独立性の証明のために，ある完備Boole代数をB，集合論の論理式の全体を$\mathcal{L}$として，$\mathcal{L}$からBへの次の様な性質をもつ函数 $\varphi \in \mathcal{L} \mapsto [\![\varphi]\!]_B \in B$ を定義することを考える。

P.1. 論理式φが集合論の公理ならば，$[\![\varphi]\!]_B = 1$.

P.2. 論理計算，$\varphi \vee \psi$，$\varphi \wedge \psi$，$\neg\varphi$ (not φ) に対して，
$[\![\varphi \vee \psi]\!]_B = [\![\varphi]\!]_B \vee [\![\psi]\!]_B$，$[\![\varphi \wedge \psi]\!]_B = [\![\varphi]\!]_B \wedge [\![\psi]\!]_B$，
$[\![\neg\varphi]\!]_B = \neg [\![\varphi]\!]_B$ (the complement of $[\![\varphi]\!]_B$) が成立する。

P.3. 論理式φから論理式ψが推論されるならば，

$$[\![\varphi]\!]_B \leq [\![\psi]\!]_B .$$

もし，このような関数 $\varphi \mapsto [\![\varphi]\!]_B$ がどんな完備Boole代数に対しても定義できるとしよう。その時，ある適当な完備Boole代数Bを探し出してきて，$[\![CH]\!]_B \neq 1$ となることを証明すれば，連続体仮説の独立性が証明されることになる。実際，CHが集合論の公理 $\varphi_1, \cdots, \varphi_n$ を用いて証明できたとすれば，その証明は $\varphi_1 \wedge \varphi_2 \wedge \cdots \wedge \varphi_n \Rightarrow \psi_1 \Rightarrow \psi_2 \Rightarrow \cdots \Rightarrow \psi_m \Rightarrow CH$ という推論の連鎖になるであろう。すると，P.1. から $[\![\varphi_1]\!]_B = 1, \cdots, [\![\varphi_n]\!]_B = 1$，P.2. から $[\![\varphi_1 \wedge \cdots \wedge \varphi_n]\!]_B = 1$，そして，P.3. から $1 = [\![\varphi_1 \wedge \cdots \wedge \varphi_n]\!] \leq [\![\psi_1]\!]_B \leq [\![\psi_2]\!]_B \leq \cdots \leq [\![\psi_m]\!]_B \leq [\![CH]\!]_B$ となるので，$[\![CH]\!]_B = 1$ となるはずである。従って，もし，$[\![CH]\!]_B \neq 1$ となるBが存在すれば，背理法によって，CHの独立性が証明されたことになる。残された問題は，P1〜P3をみたす関数 $\varphi \mapsto [\![\varphi]\!]_B$ を構成する方法と，どんなBに対して $[\![CH]\!]_B \neq 1$ となるかを知ればよいことになる。

§3. Boole値 model $V^{(B)}$ の構成.

さて，P1〜P3をみたす関数 $\varphi \mapsto [\![\varphi]\!]_B$ を定義するためには Boolean valued universe $V^{(B)}$ というものを構成する必要がある。これは，ちょうど，B-値論理で考えた集合の全体に相当する。

2-値論理で考えた集合の全体を V とすると，V は空集合 ϕ から出発して，その部分集合の全体，そのまた部分集合の全

体というように構成されている。つまり，V は次の超限帰納法により定義されている：

$V_0=\phi$, $V_{\alpha+1}=P(V_\alpha)$, $V_\alpha=\bigcup_{\beta<\alpha}V_\beta$ （α：極限順序数）

$V=\bigcup_{\alpha\in On}V_\alpha$. （$On$ は順序数全体のクラス）

ここで，$P(V_\alpha)$ は，V_α の巾集合，つまり，V_α の部分集合の全体を表わす。ところで，集合概念を扱う論理を 2-値から B-値に代えると，$a\in b$ という命題の真理値が 1(真) でも 0(偽) でもない $b\in B$ の値をとることが起こりうる。この真理値を $b(a)$ と書くと，b は B-値のファジイ集合と考えられる。この二つの考え方を押し進めて $V^{(B)}$ の次の定義に到る：

$V_\alpha=\phi$, $V^{(B)}_{\alpha+1}=\{u \mid dom(u)\to B,\ dom(u)\subseteq V^{(B)}_\alpha\}$,

$V_\alpha=\bigcup_{\beta<\alpha}V^{(B)}_\beta$ （α：極限順序数）, $V^{(B)}=\bigcup_{\alpha\in On}V^{(B)}_\alpha$.

つまり，$V_\alpha^{(B)}$ の B-値での巾集合とは，定義域が $V^{(B)}_\alpha$ に含まれる B-値のファジイ集合の全体とみることができる。

次に，$V^{(B)}$ を用いて，集合論の任意の論理式に対して，その真理値に相当する $[\![\varphi]\!]_B$ を定義することができる。ところで，集合論の論理式は，$a\in b$, $a=b$ という形の原子論理式に $\neg$(not) をつけたり，$\vee$，$\wedge$ で結んだり，$(\forall x)$ や $(\exists x)$ をつけることによって構成されているから，次のような論理式の構成に従う帰納法を用いて，集合論のすべての論理式 φ に対して $[\![\varphi]\!]_B$ が定義される（以下，$[\![\cdot]\!]_B$ を $[\![\cdot]\!]$ と略記する.）：

D 1. $[\![u \in v]\!] = \sup_{y \in \mathrm{dom}(v)} v(y) \wedge [\![u = y]\!]$.

D 2. $[\![u = v]\!] = \inf_{x \in \mathrm{dom}(u)} u(x) \Rightarrow [\![x \in v]\!] \wedge \inf_{y \in \mathrm{dom}(v)} v(y) \Rightarrow [\![y \in u]\!]$.

(但し, Boolean operation $\Rightarrow$ は, $a \Rightarrow b = (\neg a) \vee b$ を表わす.)

D 3. $[\![\neg \varphi]\!] = \neg [\![\varphi]\!]$.

D 4. $[\![\varphi \vee \psi]\!] = [\![\varphi]\!] \vee [\![\psi]\!]$.

D 5. $[\![\varphi \wedge \psi]\!] = [\![\varphi]\!] \wedge [\![\psi]\!]$.

D 6. $[\![(\forall x)\, \varphi(x)]\!] = \inf_{u \in V^{(B)}} [\![\varphi(u)]\!]$.

D 7. $[\![(\exists x)\, \varphi(x)]\!] = \sup_{u \in V^{(B)}} [\![\varphi(u)]\!]$.

以上で, 関数 $\varphi \in \mathcal{L} \mapsto [\![\varphi]\!] \in B$ が定義され, 実際に P1～P3 を充たすことが示される。つまり, 次の定理が成立する。

<u>Theorem 1.</u> (Scott-Solovay) <u>φ が ZFC の定理ならば, $[\![\varphi]\!] = 1$ が成立する。</u> (但し, ZFC とは, Zermelo-Fraenkel の公理系に選択公理をつけ加えた公理系である.)

それでは, 連続体仮説の独立性の証明の最後の段階として, どんな B を用いたらよいかを示しておこう。I を濃度が $2^{\aleph_0}$ より大きい index set, $X = 2^{\aleph_0 \times I}$ を $2 = \{0, 1\}$ の $\aleph_0 \times I$ コの直積集合に直積位相を入れた generalized Cantor space とする。B を X の Borel σ-field, m を B 上の product measure で, 次の

ようなものとする。

$$m(\{p \in 2^{\aleph_0 \times I} \mid p(j_1) = a_1, \cdots, p(j_n) = a_n\}) = \left(\frac{1}{2}\right)^n$$

（但し, $a_i = 0$ or 1　$i = 1, \cdots, n$）

このような measure の存在は, Kolmogorov の拡張定理による。$\mathcal{N}$ を null set の全体として, $B = \mathcal{B}/\mathcal{N}$ をこの measure algebra とすると, B は完備 Boole 代数である。この B に対して $[\![CH]\!]_B$ の値を計算することができて, $[\![CH]\!]_B = 0$ が示される。以上で, 連続体仮説の独立性が証明されたことになる。

§4. Boolean valued analysis

以上で, Boolean valued analysis のもつ syntactical な側面を見ることができたと思う。これを analysis に応用する重要な点は, その意味論的な側面の研究である。φ を解析学のある定理とします。Theorem 1. により, "$[\![\varphi]\!] = 1$" は新しい別な定理であることがわかる。"$[\![\varphi]\!] = 1$" という命題の構成が帰納的な構成法に従っていたから, 我々はそれがどんな命題か知ることができる。そして, それは定理である。"$[\![\varphi]\!] = 1$" がどんな命題かわかれば, 我々のなじみの概念を使って, "$[\![\varphi]\!] = 1$" を言い替えることができるかも知れない。ψ が我々のなじみの概念を用いて書かれた解析の命題であって, もし, "$[\![\varphi]\!] = 1$" と ψ が同値であることが証明できれば, ψ もまた解析学の新しい一つの定理となる。つまり,

我々は，ψを直接に証明する代わりに，φを証明して，"$[\![\varphi]\!]=1$"とψの同値性を証明することにより，ψの証明が得られる。それでは，ψを証明するこの二つの方法のうち，どちらがより我々にとって容易であろうか。今まで調べられたところによると，ψよりφの方がはるかに単純な命題であり，"$[\![\varphi]\!]=1$"とψの同値性の証明は言語の翻訳に似た部分が多く，かなり見通しのよいものになることが，しばしばであることが知られている。

例えば，ψを"ある(localizable) measure space (Ω,μ)上の可測関数の族$\{f_\alpha\}$が，ある可測関数fでa.e.に上から押えられていれば，$\{f_\alpha\}$はa.e.の順序に関する上限をもつ"という命題としよう。こういう命題の証明は，すべてのf_αがある特定のL^p空間に属していない場合には，かなり困難なことである。φを"実数の上に有界な族は上限をもつ"という命題とする。この時，"$[\![\varphi]\!]=1$"とψの同値性の証明はかなり初等的な翻訳の問題に帰されてしまう。φの証明は明らかだから，ψの証明はこのやり方でやれば，非常に容易になる。以下，[4]に従って，この証明を述べてみよう。

localizableの仮定から，piecewiseに有限測度空間を考えることにして，以下，有限測度空間の場合を述べてみよう。与えられた測度空間のmeasure algebraを$\mathcal{B}$とする。実数をDedekind cutの端点をもたない下組と定義する。"aは実数である"という命題は,

$$\text{"}\ a \subseteq \mathbb{Q} \wedge \exists s \in \mathbb{Q}\,(s \in a) \wedge \exists s \in \mathbb{Q}\,(s \notin a) \wedge$$
$$\forall s \in \mathbb{Q}\,(s \in a \Leftrightarrow \exists t \in \mathbb{Q}\,(s < t \wedge t \in a)\ \text{"}$$

と書かれる。そこで,

$$\mathbb{R}^{(B)} = \{u \in V^{(B)} \mid [\![u\text{は実数である}]\!] = 1\}$$

とすると,これは,$V^{(B)}$における実数の全体に当たる。さて,通常の集合の全体Vから$V^{(B)}$への埋め込み,$x \mapsto \check{x}$を,$\mathrm{dom}(\check{x}) = \{\check{y} \mid y \in x\}$,$\check{x}(\check{y}) = 1$で定義する(これは,集合全体の構成に関する帰納法による)と,$[\![\check{x} \in \check{y}]\!] = 1 \Leftrightarrow x \in y$,$[\![\check{x} \in \check{y}]\!] = 0 \Leftrightarrow x \notin y$,$[\![\check{x} = \check{y}]\!] = 1 \Leftrightarrow x = y$,$[\![\check{x} = \check{y}]\!] = 0 \Leftrightarrow x \neq y$となって,$\check{x}$の全体は,$V^{(B)}$のうちで,2-値論理における集合全体の役割を果たす。この時,$[\![\check{\mathbb{Q}} = \mathbb{Q}]\!] = 1$が成り立つ。ところが,$[\![\check{\mathbb{R}} = \mathbb{R}]\!] = 1$は一般に成立しない。

一方,$\mathbb{R}^{(B)}$を定義域として,恒等的に$1 \in B$をとる関数$\mathbb{R}^{(B)} \times \{1\}$は,一般に$[\![\mathbb{R}^{(B)} \times \{1\} = \mathbb{R}]\!] = 1$となるので,$V^{(B)}$における$\mathbb{R}$を調べるためには,$\mathbb{R}^{(B)}$をもっとよく調べなければならない。そこで,任意の$u \in \mathbb{R}^{(B)}$と$x \in \mathbb{Q}$に対して,$b_x = [\![\check{x} \in u]\!]$とする。実数の定義から,この$b_x$について,次の条件が得られる:

1) $\inf_{x \in \mathbb{Q}} b_x = 0$,　2) $\sup_{x \in \mathbb{Q}} b_x = 1$,　3) $b_x = \sup_{x < y} b_y$.

実際,$[\![u\text{は実数である}]\!] = 1$と$[\![\check{\mathbb{Q}} = \mathbb{Q}]\!] = 1$より a) $[\![a \subseteq \check{\mathbb{Q}}]\!] = 1$,

b) $[\![(\exists s\in\check{\mathbb{Q}})\ s\in a]\!]=1$, c) $[\![(\exists s\in\check{\mathbb{Q}})\ s\notin a]\!]=1$,

d) $[\![(\forall s\in\check{\mathbb{Q}})[s\in a \Longleftrightarrow (\exists t\in\check{\mathbb{Q}})[s<t \wedge t\in a]]]\!]=1$ が得られる。一般に,

P4. $[\![(\exists u\in v)\ \varphi(u)]\!] = \sup\limits_{u\in dom(v)} [\![\varphi(u)]\!]$

P5. $[\![(\forall u\in v)\ \varphi(u)]\!] = \inf\limits_{u\in dom(v)} [\![\varphi(u)]\!]$

が成立することが知られる。これを用いると, b)から

$$1 = [\![(\exists s\in\check{\mathbb{Q}})\ s\in a]\!] = \sup_{s\in dom(\check{\mathbb{Q}})}[\![s\in a]\!] = \sup_{x\in\mathbb{Q}}[\![\check{x}\in a]\!]$$
$$= \sup_{x\in\mathbb{Q}} b_x$$

となり, 2) が得られる。1)及び3)も同様である。逆に, Bの元の族 $\{b_x \mid x\in\mathbb{Q}\}$ が 1)-3) をみたせば, すべての $x\in\mathbb{Q}$ に対して, $b_x=[\![\check{x}\in a]\!]$ となるある $a\in\mathbb{R}^{(B)}$ を定めることができる。この時, 族 $\{b_x\in B \mid x\in\mathbb{Q}\}$ に対応する $a\in\mathbb{R}^{(B)}$ の存在は $[\![a_1=a_2]\!]=1$ の範囲で一意的である。さて, B は measure algebra だから, $b_x=[B_x]$ となる可測集合 B_x を対応させることができ,

1') $\bigcap\limits_{x\in\mathbb{Q}} B_x=\phi$, 2') $\bigcup\limits_{x\in\mathbb{Q}}B_x=\Omega$, 3') $B_x=\bigcup\limits_{x<y}B_y$

とすることができる。そこで, $f:\Omega\to\mathbb{R}$ を,

$$f(\omega)=\sup\{x\in\mathbb{Q} \mid \omega\in B_x\}\in\mathbb{R}$$

で定義すれば, f は Ω から $\mathbb{R}$ への可測関数で, $B_x=\{\omega\in\Omega \mid x<f(\omega)\}$ をみたす。一方, f が Ω から $\mathbb{R}$ への可測関数なら, $b_x=[\{\omega\in\Omega\mid x<f(\omega)\}]$ とすれば, $\{b_x\in B \mid x\in\mathbb{Q}\}$ は 1)-3) をみたし, $\mathbb{R}^{(B)}$ の一つの元が対応する。この f と対応する $u_f\in\mathbb{R}^{(B)}$

の関係は, "$f \leq g$ a.e. $\Leftrightarrow$ $[\![a_f \leq a_g]\!] = 1$" となっていることがわかる。そこで, $\{f_\alpha\}$ が f で a.e. で上に有界な可測関数の族とする。f と a_f の対応から, $[\![(\exists a_f \in R)(\forall \alpha)\, a_{f_\alpha} \leq a_f]\!] = 1$ が得られる。"$\{a_{f_\alpha}\}$ は上に有界な実数の族である" という命題を $\varphi_1(\{a_{f_\alpha}\})$ とすれば, $[\![\varphi_1(\{a_{f_\alpha}\})]\!] = 1$ が得られたことになる。次に, "$\{a_{f_\alpha}\}$ は上限をもつ" という命題を $\varphi_2(\{a_{f_\alpha}\})$ とすれば, "$\varphi_1(\{a_{f_\alpha}\}) \Rightarrow \varphi_2(\{a_{f_\alpha}\})$" は実数論つまり, ZFC の定理である。よって, Theorem 1 より $[\![\varphi_1(a_{f_\alpha}) \Rightarrow \varphi_2(a_{f_\alpha})]\!] = 1$ である。一般に, $b_1, b_2 \in B$ に対して, "$b_1 \Rightarrow b_2 = 1 \Leftrightarrow b_1 \leq b_2$" だから, $1 = [\![\varphi_1(a_{f_\alpha})]\!] \leq [\![\varphi_2(a_{f_\alpha})]\!]$, よって, $[\![\varphi_2(a_{f_\alpha})]\!] = 1$ が得られた。そこで, $[\![\varphi_2(a_{f_\alpha})]\!] = 1$ を前述の $f \leftrightarrow a_f$ の対応を用いて, 翻訳すると, "$[\![\varphi_2(a_{f_\alpha})]\!] = 1$" は, "可測関数の族 $\{f_\alpha\}$ は a.e. に関する順序で上限をもつ" と同値なことがわかる。以上で, 求める命題の証明が終わった。

§5. AW*-algebra の問題

前節までで, Boolean valued analysis の方法論の概要を述べてきたので, これから operator algebra のどの様な問題に応用されるかを説明しよう。

AW*-algebra という概念は, von Neumann algebra の理論の純代数的な部分を Hilbert 空間を用いずに公理的に展開するために Kaplansky によって提出された概念である。Hilbert 空間

を用いないということは，膨大な測度論の手法を放棄する結果となって，von Neumann algebra と AW^*-algebra の間に横たわる溝がどのようなものか，未だもって，確定したイメージを把み難い状態である。このような問題に関して，Boole代数が完備でありさえすれば，measure algebra であってもなくても，共通の理論を有する Boolean valued analysis が有効に応用される可能性は十分にある。

さて，AW^*-algebra に関して，次の二つの問題がある。

I.) AW^*-factor はいつ W^*-factor になるか？

II) W^*-factor の定理を global に拡張できるのは，どういう AW^*-algebra に対して可能で，どのような方法で可能であろうか？

I) に関しては，I型の場合はすべて W^*-factor になることが Kaplansky によって示された。また，III型の場合には，Dyer, Takenouchi, Wright, Saito, Hamana 等によって W^*-でない AW^*-factor の例がつくられている。II型の場合は，未だ open problem であるが，肯定的である事を示そうとする，様々な試みがなされている。

II) に関しては，Boolean valued analysis がかなり完全な解答を与えていると思われるので，以下に，その解説を行なうことにする。これまでは，von Neumann の reduction theory という理論があって，可分な Hilbert 空間上の von Neumann algebra を

factor の direct integral に分解して，各 factor に関する知識を利用して全体を知ろうとするやり方と，center-valued trace の理論のように，factor に対する概念のアナロジーを逐次構成して平行した理論を展開していくやり方の二通りの方法が存在していた。Boolean valued analysis を用いる方法は，第二の方法に近い，第三の方法であるが，factor の定理から直接に global な定理を移行させる原理を定立するという非常に強力なものである。

まず，どのようにして可能かという点について，$\varphi(x)$ を "x は W^*-factor である" という命題とすると，"$[\![\varphi(x)]\!]=1$" は "x はある種の AW^*-algebra である" という命題と同値になる。従って，factor に関するどんな定理 φ に対しても，それを global な場合に拡張した定理 "$[\![\varphi]\!]=1$" を自動的に構成する手段を我々は持ったことになる。次に，それでは，どのような AW^*-algebra に対して，factor の定理のこのような移行が可能になるのであろうか。これに対する解答は，それが embeddable な AW^*-algebra であるということである。

AW^*-algebra M が embeddable とは，ある I 型 AW^*-algebra A と，monomorphism $\theta: M\to A$ があって，A で，$\theta(M)''=\theta(M)$ となることである。以下，M を $V^{(B)}$ における W^*-factor, i.e. $[\![M$ は W^*-factor である$]\!]=1$ とする。

$$M^{(B)}=\{u\in V^{(B)}\mid [\![u\in M]\!]=1\},$$

$$M^{(B)}_{\infty} = \{u \in M^{(B)} \mid \exists K \in \mathbb{R},\ [\![\, \|u\| \leq \check{K} \,]\!] = 1\}$$

とする。また，Z を B を projection の全体としてもつ可換な AW^*-algebra とする。

Theorem 2. $M^{(B)}_{\infty}$ は Z を中心とする embeddable AW^*-algebra であり，逆に，中心が Z と同型な任意の embeddable AW^*-algebra N に対して，$V^{(B)}$ の中のある W^*-factor M が存在して，$N \cong M^{(B)}_{\infty}$ となる。また，$M^{(B)}_{\infty}$ が von Neumann algebra になるための必要十分条件は B がある localizable measure space の measure algebra となることである。

この定理から，φ が W^*-factor の定理なら $[\![\varphi]\!] = 1$ は embeddable AW^*-algebra の定理であることがわかる。

Theorem 3. M が $V^{(B)}$ において，I 型，II_1 型，II_∞ 型，III 型であることと，$M^{(B)}_{\infty}$ が AW^*-algebra として，I 型，II_1 型，II_∞ 型，III 型であることは，それぞれ同値である。

この定理から，φ から $[\![\varphi]\!] = 1$ への移行に関して型の概念は変化しないことがわかる。ところが同じ I 型でも，基数がからんで来ると概念のズレが生じて来る。κ を基数とする。κ の $V^{(B)}$

への 1 対 1 埋込み $\check{\kappa}$ は順序数であるが，基数にならない場合がある。$\check{\kappa}$ の $V^{(B)}$ における濃度を $\mathrm{card}(\check{\kappa})_B$ と表わす。$\lambda = \mathrm{card}(\check{\kappa})_B$ とすると，λ は $V^{(B)}$ の基数である。

<u>Theorem 4. $\lambda = \mathrm{card}(\check{\kappa})_B$ の時，M が $V^{(B)}$ で I_λ-型であることと，$M_\infty^{(B)}$ が κ-homogeneous であることは同値である。</u>

B が measure algebra の時は，常に $\lambda = \check{\kappa}$ であるから，homogeneous von Neumann algebra の degree of homogeneity κ は常に一意である。もし，$\lambda \neq \check{\kappa}$ ならば，degree of homogenuity の一意性は成立しなくなる。Kaplansky は AW^*-algebra の場合には，degree of homogenuity の一意性が成立しなくなるのではないかという conjecture を提出していたが，これまでの考察から，この conjecture を解くことができる。

α と β を二つの無限基数として，P を次の条件をみたす一対一写像 p の全体とする。

$$\mathrm{dom}(p) \leq \alpha, \quad \mathrm{ran}(p) \leq \beta, \quad \mathrm{card}(\mathrm{dom}(p)) < \alpha$$

更に，p の拡張になっている P の元の全体を $[p]$ で表わす。$\{[p] \mid p \in P\}$ を open base とする位相を P に導入して，この位相に関する正則開集合の全体がつくる完備 Boole 代数を B とする。この時，$V^{(B)}$ では，$[\![\mathrm{card}(\check{\alpha})_B = \mathrm{card}(\check{\beta})_B]\!] = 1$ が成立する。従って，

この B を projection の全体とする可換 AW*-algebra を $Z_{\alpha,\beta}$ とすると、次の定理が成立する。

<u>Theorem 5. $Z_{\alpha,\beta}$ を中心とする α-homogeneous AW*-algebra は、$\alpha \leq \gamma \leq \beta$ をみたす任意の基数 γ に対して、同時に γ-homogeneous にもなっている。</u>

このことは、degree of homogeneity を用いる I型 AW*-algebra の分類は完全なものとならない事を示している。$V^{(n)}$ の基数を代わりに同型の不変量として選べば、I型 AW*-algebra の完全な分類を完成させることができる。また、I型だけでなく、embeddable な AW*-algebra の Hilbert module 上への表現の標準形を Tomita-Takesaki 理論を移行原理に従って移行させることにより容易に得ることができる。これらの結果の解説は [1], [3] に譲ることにする。

<u>§6. factor の理論への応用.</u> 最後に将来の課題として、embeddable な AW*-algebra をより深く調べることによって、factor の問題に関する深い結果を得られる可能性を示摘しておこう。

$\mathcal{C}(M)$ を factor M に関する未解決の問題とする。解決は次の3通りが考えられる。1) $\mathcal{C}(M)$ が証明される。2) $\mathcal{C}(M)$ の否定

が証明される。そして，第三に，3) $\varphi(M)$ は肯定も否定も証明できないことが証明される。従来の数学的方法では 1), 2) の場合だけが可能である。ところが，Boolean valued analysis によれば，$[\![\varphi(M)]\!]_B=1$ は，embeddble な AW^*-algebra に関する命題である　ことがわかる。embeddable AW^*-algebra を深く調べることにより，ある B に対して $[\![\varphi(M)]\!]_B=1$ が証明されれば，2) の可能性は否定される。また，ある B に対して $[\![\varphi(M)]\!]_B\neq 1$ が証明されれば，1) の可能性が否定され，3) の場合であることが証明されることになる。

現実の問題として，"Calkin alg. が II_∞ 型の表現をもつ" という命題を φ とすると，ある B に対して，$[\![\varphi]\!]_B=1$ が証明される。よって，この問題は 2) の可能性が否定されている。どのような B に対して上記の $[\![\varphi]\!]_B=1$ が証明されるかというと，$[\![$Martin の公理$]\!]=1$ となる B に対してである。

ところで，以前には，$[\![\varphi]\!]_B=1$ より φ が容易な場合が多いと述べたが，φ が非常に難かしければ，ある B に対して $[\![\varphi]\!]_B=1$ を示す方が容易になるのである。実際，a) φ が CH の場合，b) φ が Calkin alg. の問題の場合，がその case に当たるのである。しかし，そのためには，翻訳が容易な部分を調べつくす必要があり，現在の研究段階としては，こちらに重点が置かれているという事である。Boolean valued analysis の本当に重要な点はこのような，通常の数学で

解けない問題に解決を与える点にあるのであろう。

文献

(イ) 報告.

[1] 小澤正直, Boolean valued analysis とその応用, 京大数研講究録 504 (1983), 117-131.

[2] ———, Boole値解析学と作用素環論, 京大数研講究録 540 (1984), 145-164.

[3] ———, Boole値解析学とその作用素代数への応用, 日本数学会. 第23回実函数論・第22回函数解析学・合同シンポジウム講演集録, 52-67, 1984.

(ロ) 入門書

[4] Takeuti, G., Two applications of logic to mathematics, Iwanami and Princeton U.P., 1978

[5] Takeuti, G., Eda, K., Ozawa, M., Nishimura, H., Boolean valued analysis and Boolean valued algebra, (to apper in Springer Lecture Notes in Math.)

詳しい文献は [1-3] を参照して下さい。