数理解析研究所講究録
第 562 巻 1985 年 116-123

Descriptor Form System の構造可制御性

名大工学部　細江繁幸　(Shigeyuki Hosoe)
早川義一　(Yoshikazu Hayakawa)

1. はじめに

$p_1, \cdots, p_\ell$ を独立なスカラーパラメータとするとき，係数行列が

$$\begin{cases} K_p = \bar{K}_0 + \sum_{i=1}^{\ell} p_i \bar{b}_i \bar{k}_i^t \quad , \quad A_p = \bar{A}_0 + \sum_{i=1}^{\ell} p_i \bar{b}_i \bar{c}_i^t \\ B_p = \bar{B}_0 + \sum_{i=1}^{\ell} p_i \bar{b}_i \bar{d}_i^t \end{cases} \tag{1}$$

ただし　$\bar{K}_0 , \bar{A}_0 \in \mathbb{R}^{n\times n}, \bar{B}_0 \in \mathbb{R}^{n\times m}, \bar{d}_i \in \mathbb{R}^m$

$\bar{k}_i , \bar{c}_i \in \mathbb{R}^n \quad , \quad p = (p_1, p_2, \cdots, p_\ell)$

で表わされるDescriptor Form System

$$K_p \dot{x}(t) = A_p x(t) + B_p u(t) \tag{2}$$

の構造可制御性について考察する．従来の状態方程式系 $\dot{x} = Ax + Bu$ に関する結果や[(1)〜(7)]，Descriptor Form System ではあるが係数行列が構造化行列（要素が零固定要素と変動要素に類別され，変動要素は互いに独立なパラメータとする行列）である場合の結果[(8)〜(10)]が一般化され，より広いクラスの物理システム

の構造可制御性が判定できるようになる．

2．準備

まず係数行列がパラメータに依存しない通常のDescriptor Form System

$$\bar{K}\dot{x}(t) = \bar{A}x(t) + \bar{B}u(t), \quad t \geq 0 \qquad (3)$$

$x(t)\ (\in \mathbb{R}^n)$：中間変数，$u(t)(\in \mathbb{R}^m)$：入力

$\bar{K},\ \bar{A} \in \mathbb{R}^{n\times n},\quad \bar{B} \in \mathbb{R}^{n\times m}$

の可制御性の定義などを与える．微分方程式（3）が一意解を持つためには $\det(s\bar{K} - \bar{A}) \neq 0$ でなければならない．このとき，$(\bar{K}, \bar{A}, \bar{B})$ は consistent であるという．consistent な（3）の形のシステムの可制御性には3つの異なった定義があるが[(11)〜(13)]，ここでは次のものを採用する．

［定義0］『任意の初期値 $x(0)$ に対し，滑らかな入力 $u(t)$ $(t \geq 0)$ が存在して，解 $x(t)$ を有限時間で0にすることができるとき，システム $(\bar{K}, \bar{A}, \bar{B})$ は可制御であるという』

<補題0>[(12)]『次の2条件は等価である．

(i) $(\bar{K}, \bar{A}, \bar{B})$ は可制御である．

(ii) $\mathrm{rank}\,[s\bar{K} - \bar{A},\ \bar{B}] = n \quad \text{for } {}^\forall s \in \mathbb{C}$』

本稿で考察する（1），（2）式の descriptor form system (K_p, A_p, B_p) に対しても，一意解の存在を保証する consistency 条件 $\det(sK_p - A_p) \neq 0$ は満たされているものとする．

(K_p, A_p, B_p) の可制御性はパラメータベクトル $p=(p_1, \cdots, p_\ell)$ の値によって変るが，殆んど全ての p の値に対し可制御であるか，反対に全ての p の値で非可制御であるかのどちらかである．このことから構造可制御性が次のように定義される．

［定義１］『パラメータ空間 $\mathbb{R}^\ell$ に，あるプロパ・バラエティ V が存在し，任意の $\bar{p} \notin V$ に対し，$(K_{\bar{p}}, A_{\bar{p}}, B_{\bar{p}})$ が定義０の意味で可制御であるとき，(K_p, A_p, B_p) は構造可制御であるという．』

以下，s および $p_1, \cdots, p_\ell$ の多項式を要素とする行列 $X(s, p) \in \mathbb{R}^{\alpha\times\beta}[s, p]$ の最大サイズ小行列式全体に対する $\mathbb{R}[s, p]$ での最大共通因子を記号 $\Gamma(X(s, p))$ で表わす．

<補題１>『次の３条件は等価である．

（ｉ）(K_p, A_p, B_p) は構造可制御である．

（ii）$\mathbb{R}^\ell \supset {}^\exists V$: プロパ・バラエティ，${}^\forall \bar{p} \notin V$ に対し

$$\mathrm{rank}\,[sK_{\bar{p}} - A_{\bar{p}}, B_{\bar{p}}] = n \quad \text{for } {}^\forall s \in \mathbb{C}.$$

（iii）$\deg_s \Gamma([sK_p - A_p, B_p]) = 0$．

ただし，$\deg_s$ は $\mathbb{R}[s, p]$ に含まれる多項式の s に関する次数を表わす．』

$\mathbb{R}[s, p]$ の多項式 $f(s, p)$ を s だけの多項式（定数を含む）$\alpha(s)$，p だけの多項式 $\gamma(p)$，s および p の多項式 $\beta(s, p)$（s あるいは p だけからなる因子を持たない）の積

$$f(s, p) = \alpha(s)\beta(s, p)\gamma(p)$$

と表わしたとき，これを $f(s, p)$ の s-p 分解と呼ぶ．今後 α，β，γ をそれぞれ f の s-，(s, p)-，p-因子と呼ぶ．

$\det(sK_p - A_p)$ の s-p 分解を $a(s)b(s)c(s)$ とするとき，

$$\Sigma \triangleq \{ \lambda \in \mathbb{C} \mid a(\lambda) = 0 \} \qquad (4)$$

と定義すれば，明らかに

$$\Sigma = \bigcap_{\bar{p} \in \mathbb{R}^l} \{ \lambda \in \mathbb{C} \mid \det(\lambda K_{\bar{p}} - A_{\bar{p}}) = 0 \} \qquad (5)$$

である．複素数 $\lambda \in \Sigma$ を (K_p, A_p, B_p) の不変モードと呼ぶ．一方，$b(s, p)$ を s だけの多項式とみなしたときの零点を p-dependent あるいは変動モードと呼ぶ．不変モードの全体は明らかに $\Sigma_0 = \{ \lambda \in \mathbb{C} \mid \det(s\bar{K}_0 - \bar{A}_0) = 0 \}$ の部分集合をなすが，$\lambda \in \Sigma_0$ が不変モードかどうかは次の補題を用い判定できる．

＜補題２＞『次の２条件は等価である．

(i) $\lambda \in \Sigma_0$ は (K_p, A_p, B_p) の不変モードである．

(ii) $\exists \mathbb{t} \subset \mathbb{l} \triangleq \{1, 2, \cdots, l\}$

$$\mathrm{rank}\begin{bmatrix} 0 & (\lambda\bar{K} - \bar{C})^{\mathbb{t}} \\ \bar{B}^{\mathbb{l}-\mathbb{t}} & \lambda\bar{K}_0 - \bar{A}_0 \end{bmatrix} < n$$

ただし $\mathbb{t} = \{i_1, i_2, \cdots, i_t\}$ のとき

$$\bar{B}^{\mathbb{t}} \triangleq [\bar{b}_{i_1}\ \bar{b}_{i_2}\ \cdots\ \bar{b}_{i_t}] \quad , \quad (\lambda\bar{K} - \bar{C})^{\mathbb{t}} = \begin{bmatrix} \lambda\bar{k}^t_{i_1} - \bar{c}^t_{i_1} \\ \vdots \\ \lambda\bar{k}^t_{i_t} - \bar{c}^t_{i_t} \end{bmatrix}$$

とする.』（証明はマトロイド理論でよく知られたRadoの定理を用いてできる. 詳しくは文献14)を参照されたい.）

補題1から直ちに次の結果が得られる.

＜補題3＞『次の2条件は等価である.

（i）（K_p, A_p, B_p）は構造可制御である.

（ii） (a) $\forall \lambda \in \Sigma$, generic rank $[\lambda K_p - A_p \ \ B_p] = n$

(b) $\Gamma([sK_p - A_p \ \ B_p])$ は (s, p) 因子を持たない.』

上の条件(ii)の(a)が成立しないとき, 不変モードが非構造可制御, (b)が成立しないときには変動モードが非構造可制御という.

3. 構造可制御性の判定

不変モードと変動モードの可制御性を個別に考察することにより,（K_p, A_p, B_p）が構造可制御であるための必要十分条件が得られる.

さらに次の補題を用意する.

＜補題4＞

『
$$Y(s,p)=\left[\begin{array}{c|c|c|c} O & -I_\ell & \begin{matrix} s\bar{k}_1^t-\bar{c}_1^t \\ \vdots \\ s\bar{k}_\ell^t-\bar{c}_\ell^t \end{matrix} & \begin{matrix} \bar{d}_1^t \\ \vdots \\ \bar{d}_\ell^t \end{matrix} \\ \hline I_\ell & \begin{matrix} p_1 & & \\ & \ddots & \\ & & p_\ell \end{matrix} & O & O \\ \hline -\bar{b}_1 \cdots -\bar{b}_\ell & O & s\bar{K}_0-\bar{A}_0 & \bar{B}_0 \end{array}\right], \quad Z(s,p)=\left[\begin{array}{c|c|c|c} \begin{matrix} H_{11} & \cdots & H_{1\ell} \\ \cdots & & \cdots \\ H_{\ell 1} & \cdots & H_{\ell\ell} \end{matrix} & -I_\ell & O & \begin{matrix} H_{10} \\ \vdots \\ H_{\ell 0} \end{matrix} \\ \hline I_\ell & \begin{matrix} p_1 & & \\ & \ddots & \\ & & p_\ell \end{matrix} & O & O \\ \hline -\bar{b}_1 \cdots -\bar{b}_\ell & O & s\bar{K}_0-\bar{A}_0 & \bar{B}_0 \end{array}\right]$$

とおく. ただし H_{ij} は伝達関数

$$H_{ij}(s)=\begin{cases}(s\bar{k}_i-\bar{c}_i)^t(s\bar{K}_o-\bar{A}_o)^{-1}b_j & (i,j=1,\cdots,\ell)\\ -(s\bar{k}_i-\bar{c}_i)^t(s\bar{K}_o-\bar{A}_o)^{-1}\bar{B}_o+d_i^t & (i=1,\cdots,\ell)\end{cases} \quad (6)$$

を表わす．このとき

$$\Gamma([sK_p-A_p\ \ B_p])=\Gamma(Y(s,p))=\Gamma(Z(s,p))$$

が成立する．$Z(s,p)$ の要素は s に関しては有理式であるが，その最大サイズ小行列式は s，p の多項式であるので，それらに対する最大共通因子 $\Gamma(Z(s,p))$ が定義できる．』

不変モードの可制御性

補題3の条件 (ii-a) および補題4より次の結果が得られる．

［定理1］『次の2条件は等価である．

(i) (K_p,A_p,B_p) の不変モードは可制御

(ii) 任意の $\lambda\in Z$ に対し

$$\forall\,\sharp<\ell,\quad \mathrm{rank}\left[\begin{array}{c:c:c}0 & (\lambda\bar{K}-\bar{C})^{\sharp} & \bar{D}^{\sharp}\\ \hdashline \bar{B}^{\ell-\sharp} & \lambda\bar{K}_o-\bar{A}_o & \bar{B}_o\end{array}\right]\geq n$$

が成立する．』

変動モードの可制御性

補題4の行列 $Z(s,p)$ を用いて変動モードの構造可制御性の条件が導出できるが，それには (6) 式で定義した伝達関数 $H_{ij}(s)$ によって決まる有向グラフを利用する．

［定義2］『$G(K_p,A_p,B_p)$ は節点集合 $N=\{\nu_0,\nu_1,\cdots,\nu_\ell\}$，有向枝集合 $E=\{e_{ij}\triangleq(\nu_j\to\nu_i)\mid H_{ij}(s)\neq 0\}$，重み関数 f:

$e_{ij} \longmapsto H_{ij}(s)$ から成る重み付有向グラフである。』

［定理２］『次の２条件は等価である。

(i) (K_p, A_p, B_p) の変動モードは可制御

(ii) $G(K_p, A_p, B_p)$ において ν_0 から可到達な節点の集合を $R(\subseteq N)$ とする。このとき，$R = N$ であるか，又は $N \neq R$ ならば，$G(K_p, A_p, B_p)$ の $N-R$ に関するセクション部分グラフ(15) に完全に含まれる任意のサイクルの重み積は s を含まない。』

（証明は文献(14)を参照されたい。）

参考文献

[1] C.T. Lin: Structural Controllability; IEEE Trans. Auto. Contr., AC-19-3, 201/208 (1974)

[2] R.W. Shields and J.B. Pearson: Structural Controllability of Multiinput Linear Systems; IEEE Trans. Auto. Contr., AC-21-2, 203/212 (1976)

[3] K. Glover and L.M. Silverman: Charaterization of Structural Controllability; IEEE Trans. Auto. Contr., AC-21-4, 534/537 (1976)

[4] S. Hosoe and K. Matsumoto: On the Irreducibility Condition in the Structural Controllability theorem; IEEE Trans. Auto. Contr., AC-24-6, 963/966 (1979)

[5] H. Mayeda: On Structural Controllability Theorem; IEEE Trans. Auto. Contr., AC-26-3, 795/798 (1981)

[6] J.P. Corfmat and A.S. Morse: Structural Controllable and Structural Canonical Systems; IEEE Trans. Auto. Contr., AC-21-1, 129/131 (1976)

[7] B.D.O. Anderson and Hui-min Hong : Structural Controllability and Matrix Nets ; Int. J. Control 35-3, 397/416 (1982)

[8] 青木,細江,早川：中間標準形で記述されたシステムの構造可制御性；計測自動制御学会論文集 19-8, 628/635 (1983)

[9] 松本孝裕,池田雅夫：中間標準形で表わされた系の構造可制御性；同上, 19-8, 601/606 (1983)

[10] 室田：補助変数をもつ線形時不変系の構造可制御性；同上 19-2, 104/109 (1983)

[11] E.L. Yip and R.F. Sincovec : Solvability, controllability, and observability of continuous descriptor systems; IEEE Trans. Auto. Contr., AC-26, 702/707 (1981)

[12] 早川,細江,伊藤：中間標準形方程式系の動的次数と可制御性；電子通信学会論文誌, 64-A-9, 752/759 (1981)

[13] G.C. Verghese, B.C. Levy and T. Kailath : A generalized state-space for singular systems; IEEE Trans. Auto. Contr., AC-26, 811/831 (1981)

[14] 青木,細江,早川：パラメータ従属がある Descriptor Form における構造可制御性；電気学会システム・制御研究会資料, SC-83-22, 117/136 (1983)

[15] 尾崎他：グラフ理論, コロナ社 (1975)