数理解析研究所講究録
第563巻 1985年 91-95

S^2 の identification

神戸大学教養部 池田裕司 (Hiroshi Ikeda)

我々の考察の対象となる 2-sphere S^2 の identification は次の通り定義されるものである。

Def. 1 P を polyhedron として，$f : S^2 \to P$ が S^2 の identification である。

$\equiv$ (i) f は non-degenerate cont. onto map である。

(ii) $^\exists$ connected 1-polyhedron $G \subset S^2$

and $^\exists$ set of finite pts $V \subset G$

$\ni$ (1) $^\forall$component X of $S^2 - G$ or $G - V$,

$f|X : X \to f(X)$ は homeo.

(2) $f(S^2 - G) \cap f(G) = \emptyset = f(G - V) \cap f(V)$

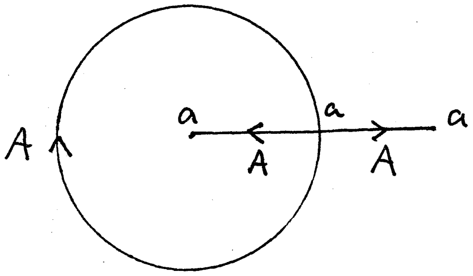
(3) $^\forall$components X, Y of $S^2 - G$ or $G - V$,

$f(X) \cap f(Y) \neq \emptyset \Rightarrow f(X) = f(Y)$

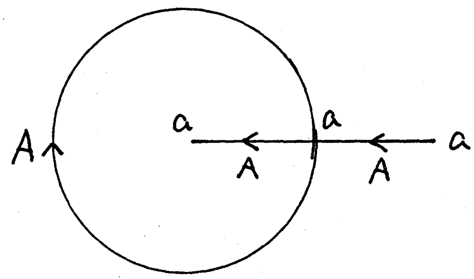
(4) $^{\forall}$component X of $S^2 - G$, $^{\exists}1$ component X' of $S^2 - G$ $\ni$ $X \cap X' = \emptyset$, $f(X) = f(X')$

S^2 を 3-ball B^3 の boundary と思えば、S^2 の identification f を用いて、3-polyhedron B^3/f が得られる。
以下では B^3/f が manifold である条件を述べる。

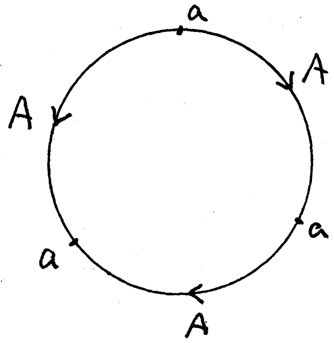
Examples



S^2/f = Dunce hat
B^3/f は manifold でない.



S^2/f = Dunce hat
$B^3/f = S^3$



S^2/f = Dunce hat
B^3/f は manifold でない.

さて，# で components の個数を表わす事にして，

$$E(f) = \#(V/f) - \#(G-V/f) + \#(S^2-G/f)$$

とおく。

~~Prop~~. 1 $\quad B^3/f$: manifold $\Longrightarrow E(f) = 1$

これは良く知られた定理で，Seifert-Threlfall の教科書には必要十分条件として述べてある。ところが，先の例には $E(f)=1$ でありながら B^3/f が manifold でないものが含まれている。これは，我々の identification が彼等のそれと異なっている事を示している。

Def. 2 $\quad S^2$ の identification $f : S^2 \longrightarrow P$ が (*) を満たす。

$$\equiv \begin{cases} (1) & (G, V) \text{ は 3-regular graph} \\ (2) & \forall a \in V, \quad \# f^{-1}(f(a)) = 4 \\ (3) & \forall e \in \{G-V \text{ の component}\}, \quad \# f^{-1}(f(e)) = 3 \end{cases}$$

identification with (*) なるものを考える根拠については数理研講究録 524 … K.524 を書く …… を参照の事。

<u>Prop</u>. 2 f : identification with $(*)$

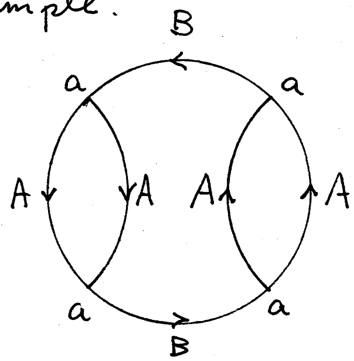
$\Rightarrow$ S^2/f : closed fake surface

<u>Prop</u>. 3 f : identification with (1), (3) of $(*)$

$\Rightarrow$ f : local homeomorphism

<u>Prop</u>. 4 f : identification with $(*)$ $\Rightarrow$ B^3/f : manifold

Example.



$E(f)=1$,

(G, V) : 3-regular

$f^{-1}f(a)$: 4点

$f^{-1}f(A)$: 4本

$f^{-1}f(B)$: 2本

<u>Prop</u>. 5 f : identification with (1), (3) of $(*)$

$E(f)=1$ $\Rightarrow$ f は $(*)$ の (2) を満たす。

<u>Prop</u>. 6 f : identification with (1), (3) of $(*)$ の時。

B^3/f : manifold $\Leftrightarrow$ $E(f)=1$.

<u>Remark</u>. 後の方の Example は非常な嫌味を含んでいる。図から読み取れる情報，即ち，頂点，辺，面の identification，だけからは，map の uniqueness が証明出来ない。特別にこの例については，map の如何を問わず D^3/f が manifold にならない事はすぐ解るのであるが，それで良いとは云えない。一般的にこの議論をしなければならないとすると煩わしい。この点については，Seifert－Threlfall の identification の場合は，彼等は正確な記述を explicit にはしていないので想像であるが，定義の段階で除外されているのであろう。

ところが，これで我々が不利になっている事はないのである。と云うのは，我々の対象は identification with (*)，云い換えれば DS-diagram，である事に注意して，K.524 の Prop. 9 を思い出して欲しい。これをもっと精密に云うと，

$$X \sim X' \Longleftrightarrow [X] = ABw_X,\ [X'] = ABw_{X'}$$

となる。DS-diagram 上に AB は丁度2ヶ所に現われるから，図の情報だけで identification map が一意に定まっている事が証明されるのである。

従って

"DS-diagram を与えると manifold は unique に定まる。"