数理解析研究所講究録
第 564 巻 1985 年 173-186

有限容量 $PH_1^{[X]}+PH_2^{[Y]}/M/S$ 形待ち行列の解析

NTT 武蔵野電気通信研究所 町原 文明
(Fumiaki Machihara)

1. まえがき

2種の独立な集団到着呼を入力としてもつ複数サーバ・有限容量待ち行列モデルを扱う。2呼種入力モデルの呼種別トラヒック特性は，Kuczuraが，自ら導入した部分マルコフ過程[1]の手法を用いて，PH+M/M/1形待ち行列の呼種別待ち時間分布[2]，GI+M/M/S/S形待ち行列の呼種別呼損率[3]を解析して以来，多くの研究者により研究されてきた[例えば，4, 5, 6, 7, 8]。しかし，これらの研究はすべて個別到着モデルに限定されており，集団到着呼入力の場合は，ポアソン入力モデル以外は未解決である。ファクシミリ通信方式における同報展開呼は，集団到着呼となり，この呼と他の個別到着呼の加わる通信処理装置のトラヒックモデルは，集団，個別到着呼混在モデルとして扱わざるを得ない[9, 10]。しかも，集団到着呼と個別到着呼の品質が大きく異なること

が予想され，それぞれの呼に対応して品質を規定しなければならない。ここに，呼種別トラヒック特性解明の必要性が生じる。特性の異なる種々の呼を共通リソースで取り扱うINSの時代を迎えた現在，多呼種集団到着呼入力モデルは益々重要になってきている。しかも，新サービスの需要は電話呼のように膨大になるとは限らず，呼の到着過程をポアソンとみなすことには問題がある。本文では以上を踏え，到着がそれぞれ独立なPH-再生過程[11]に従う2呼種集団到着呼入力・系内呼数制限モデル $PH_1^{[X]}+PH_2^{[Y]}/M/S$ 形待ち行列を解析する。処理方式として，$PH_1^{[X]}$呼，$PH_2^{[Y]}$呼共にすべてのサーバ，待ち室を共有する待時-待時式，$PH_1^{[X]}$呼のみサーバ，待ち室を保留でき，$PH_2^{[Y]}$呼はサーバのみしか保留できない待時-即時式，待ち室のない即時-即時式を考える。又，優先権のある待ち行列モデルの1つである留保方式も考える。

2節で，2種の呼の到着過程を重畳した時の到着間隔密度核を導出し，$PH_1^{[X]}+PH_2^{[Y]}/M/S$ 形待ち行列過程を，到着位相と系内呼数のマルコフ過程とみた場合の生成作用素を得る。3節でこのマルコフ過程の任意時点における定常状態確率分布の数値計算法を提案する。4節でこの任意時点定常状態確率分布と呼種別到着直前定常状態確率分布との関係式を導出し，呼種別呼損率等のトラヒック測度の公式を得る。

2. $PH_1^{[X]}+PH_2^{[Y]}/M/S$ 形待ち行列

2種の独立な集団到着呼（各々，PH_1呼，PH_2呼と呼ぶ）を入力としてもつ待ち行列を考え，以下の仮定を設ける。

(i) PH_i呼の到着間隔密度関数を$f_i(t)$とし，オーダm_iのNeutsの表現[11]（$\underline{\alpha}_i, \underline{\underline{T}}_i$）をもつとする。即ち，

(2.1) $f_i(t)=\underline{\alpha}_i \exp(\underline{\underline{T}}_i t)\underline{T}_i^{(0)c}$

今後，$\underline{x}$，$\underline{x}^c$，$\underline{\underline{x}}$はそれぞれ，横ベクトル，縦ベクトル，行列を表すものとする。又，$f_i(t)$の到着位相空間を$A=(1,2,\cdots,m_i)$とする。

(ii) 集団到着呼に含まれる各々の呼の保留時間は，すべて指数分布$1-\exp(-\mu t)$に従う。

(iii) サーバ数をS，系内制限数をKとする。

(iv) PH_i呼の集団サイズの分布を$\{{}^{(i)}g_j\}_{j=1,2,\cdots}$とする。

(v) 系内呼数がnの時到着したPH_i呼に含まれる個々の呼のうち，系内によ呼受け入れられる確率を${}^{(i)}g_j(n)$とする。この確率は，サービス規律と$\{{}^{(i)}g_j\}$により決定される。

(v-1) 待時−待時式（両呼種共にすべてのサーバ，待ち室を共有する方式）

空きサーバ数＋空き待ち室数を超える集団サイズをもつ呼が到着した時の系の受け入れ方式として次の2方式を考える。

(v-1-1) WBAS（<u>W</u>hole <u>B</u>atch <u>A</u>cceptance <u>S</u>trategy）：集団

に含まれるすべての呼を呼損にする。

この時

$$(2.2)\quad {}^{(i)}g_j(n)=\begin{cases}{}^{(i)}g_j & (j=1,2,\cdots,K-n)\\ 1-\sum_{l=1}^{K-n}{}^{(i)}g_l & (j=0)\end{cases}$$

(V-1-2) PBAS (Partial Batch Acceptance Strategy)：空きサーバ数＋空き待ち室数の呼を系内に取り入れ，残りを呼損とする。この時，

$$(2.3)\quad {}^{(i)}g_j(n)=\begin{cases}0 & (j=0)\\ {}^{(i)}g_j & (j=1,2,\cdots,K-n-1)\\ 1-\sum_{l=1}^{K-n-1}{}^{(i)}g_l & (j=K-n)\end{cases}\qquad n=0,1,\cdots,K-1$$

$${}^{(i)}g_j(K)=\begin{cases}1 & (j=0)\\ 0 & (j\neq 0)\end{cases}$$

(V-2) 待時－即時式（PH_1呼のみがすべてのサーバ，待ち室を保留でき，PH_2呼はサーバのみしか保留できない方式）

(V-2-1) WBAS

PH_1呼に対しては式(2.2)をそのまま，PH_2呼に対してはKのかわりにSとおけばよい。

(V-2-2) PBAS

PH_1呼に対しては式(2.3)をそのまま，PH_2呼に対してはKのかわりにSとおけばよい。

（V－3）即時－即時式（待ち室がなく，PH_1呼，PH_2呼がサーバを共有する方式）

式(2.2)，(2.3)でKのかわりにSとおけばよい。

又，式(2.2)，(2.3)におけるPH_2呼に対し，KのかわりにL $(<K)$とおくと，PH_1呼を優先呼とした待ち室（バッファ）留保方式に対する$\{{}^{(2)}g_j(n)\}$を得る。個別到着モデルにおけるバッファ留保方式については，Kawashima [12]に詳しい。

任意t時点における系内呼数を$Y(t)$，PH_i呼の到着位相を$\xi_i(t)$とすると，過程$\{Y(t)\in(0,1,\cdots,K),\ \xi_1(t)\in A_1,\ \xi_2(t)\in A_2\}$はマルコフとなる。このマルコフ過程が値をとる空間$(0,1,\cdots,K)\times A_1\times A_2\ (\ni(n,i_1,i_2))$を辞書式オーダにラベル化（$(n,i_1,i_2)\rightarrow n m_1 m_2+(i_1-1)m_2+i_2$）すると，生成作用素は以下となる。

$$
(2.4)\qquad Q=\begin{pmatrix}
A_{00} & A_{01} & \cdots & \cdots & A_{0K}\\
A_{10} & A_{11} & & & \vdots\\
 & \ddots & \ddots & & \vdots\\
 & & A_{S-1,S} & A_{SS} & \vdots\\
 & 0 & & \ddots & \ddots\\
 & & & A_{K-1,K} & A_{KK}
\end{pmatrix}
$$

ここに，A_{nm}は$m_1m_2\times m_1m_2$行列で

$$
A_{nn}=T_1\otimes I_2+I_1\otimes T_2-\min(n,S)\mu I_1\otimes I_2
$$
$$
+T_1^{(0)^c}\underline{\alpha}_1\otimes{}^{(1)}g_0(n)I_2+{}^{(2)}g_0(n)I_1\otimes T_2^{(0)^c}\underline{\alpha}_2\quad,
$$
$$
n=0,1,\cdots,K,
$$

$$\underline{\underline{A}}_{n,n+k} = \underline{I}_1^{(0)^c}\underline{\alpha}_1 \otimes {}^{(1)}g_k(n)\underline{\underline{I}}_2 + {}^{(2)}g_k(n)\underline{\underline{I}}_1 \otimes \underline{I}_2^{(0)^c}\underline{\alpha}_2 ,$$

$$k=1,2,\cdots,K-n,$$

$$\underline{\underline{A}}_{n,n-1} = \min(n,S)\mu\, \underline{\underline{I}}_1 \otimes \underline{\underline{I}}_2 , \quad n=1,2,\cdots,K.$$

$\underline{\underline{I}}_i$ は m_i 次の単位行列，$\otimes$は行列のクロネッカー積[11]を表し，$\underline{\underline{X}}=(x_{kl})$ の時 $\underline{\underline{X}}\otimes\underline{\underline{Y}} := (x_{kl}\underline{\underline{Y}})$ で定義される。

$\underline{\underline{Q}}$ が生成作用素であることは，$\underline{\underline{P}}(t)=(p_{kl}(t))\ k,l=1,2,\cdots,(n+1)m_1m_2$ （$p_{kl}(t)$ は初期条件 k の下で，t 時点で l となる過渡確率）が

(2.5) $\quad d\underline{\underline{P}}(t)/dt = \underline{\underline{P}}(t)\underline{\underline{Q}} \quad , \quad \underline{\underline{P}}(0)=\underline{\underline{I}}_{1\times 2}$

を満足することで確かめられる。

3．任意時点における定常状態確率分布

今考えているモデルは有限容量であり定常状態が存在する。即ち，$\lim_{t\to\infty}\underline{\underline{P}}(t)$ の各行ベクトルはすべて等しい定常状態確率分布ベクトル $\underline{p}=(\underline{p}_0,\underline{p}_1,\cdots,\underline{p}_K)$ （$\underline{p}_i$ は m_1m_2-ベクトル）に収束する。

定理3.1　任意時点における定常状態確率分布ベクトル $\underline{p}$ は $\underline{p}\underline{\underline{Q}}=\underline{0}$ を満足し，以下で与えられる。

(3.1) $\quad \underline{p}_n = \underline{p}_0\underline{\underline{B}}_n \quad , \quad n=1,2,\cdots,K$

ここに，$\underline{\underline{B}}_0=\underline{\underline{I}}_1\otimes\underline{\underline{I}}_2$，$\underline{\underline{B}}_n = -\left(\sum_{i=0}^{n-1}\underline{\underline{B}}_i\underline{\underline{A}}_{i,n-1}\right)/\min(n,S)\mu$

$\underline{p}_0$ は，以下の m_1m_2 元の連立方程式を満足する。

(3.2) $\underline{p}_0 \sum_{i=0}^{K} (\underline{\underline{B}}_i \underline{\underline{A}}_{iK}) = \underline{0}$, $\underline{p}_0 (\sum_{i=0}^{K} \underline{\underline{B}}_i) \underline{e}^c = 1$

ここに，$\underline{e}^c$ は各要素が 1 の $m_1 m_2$ー縦ベクトル。

証明 $\underline{p}\underline{\underline{Q}} = \underline{0}$ より $\underline{p}_0 \underline{\underline{A}}_{00} + \underline{p}_1 \underline{\underline{A}}_{10} = \underline{0}$ ，即ち，式(2.6)の $n=1$ の場合が成立する。$n=1, 2, \cdots, k-1$ に対して式(2.6)が成立しているとすると，

$$\sum_{i=0}^{k} \underline{p}_i \underline{\underline{A}}_{i,k-1} = \underline{p}_0 \left(\sum_{i=0}^{k-1} \underline{\underline{B}}_i \underline{\underline{A}}_{i,k-1}\right) + min(k, S) \underline{p}_k = \underline{0}$$

より $\underline{p}_k = \underline{p}_0 \underline{\underline{B}}_k$ が成立し，式(2.6)を得る。

式(2.7)は，$\sum_{i=0}^{K} \underline{p}_i \underline{\underline{A}}_{iK} = \underline{0}$ と正規化条件により成立する。

定理 3.1 は，$\underline{p}$ が $m_1 m_2 \times m_1 m_2$ 行列の和と積及び $m_1 m_2$ 元の連立方程式を 1 回解くことにより計算できることを示している。数値計算上の利点が極めて大きい。

4．呼種別到着直前定常状態確率分布

本節では，$PH_1^{[X]} + PH_2^{[Y]}$／M／S形待ち行列過程を部分マルコフ過程[1] とみなすことにより，呼種別到着時点直前の系内状態の定常確率分布を導出する。

PH_i 呼の到着時点を $t_1^{(i)}, t_2^{(i)}, \cdots\cdots$ とした時，以下が成立する。

(i) $\{ Y(t), \xi_{3-i}(t) : t \in (t_\ell^{(i)}, t_{\ell+1}^{(i)}) \}$ はマルコフ過程となる。

(ii) $P\{Y(t_\ell^{(i)}+0)=n+k,\ \xi_{3-i}(t_\ell^{(i)}+0)=m$

$\quad | \ Y(t_\ell^{(i)}-0)=n,\ \xi_{3-i}(t_\ell^{(i)}-0)=j\} = \begin{cases} {}^{(i)}g_k(n), & j=m \\ 0, & j\neq m \end{cases}$

(iii) $P\{t<t_{\ell+1}^{(i)}-t_\ell^{(i)}<t+dt\} = f_i(t)\,dt$

これらが，部分マルコフ過程となる条件である。

離散時間確率過程 $\{Y(t_\ell^{(i)}-0),\ \xi_{3-i}(t_\ell^{(i)}-0):\ \ell=1,2,\cdots\}$ が値をとる空間を辞書式にラベル化し，この過程の極限分布ベクトル，即ち，PH_i 呼の到着直前の定常状態確率分布ベクトルを

(4.1) $\quad \underline{g}^{(i)} := (\underline{g}_0^{(i)}, \underline{g}_1^{(i)}, \cdots, \underline{g}_K^{(i)})$，$\underline{g}_j^{(i)}$ は m_{3-i}－ベクトル

とする。

又，連続時間確率過程 $\{Y(t),\ \xi_{3-i}(t)\}$ が値をとる空間を同様にラベル化し，その極限分布ベクトルを，

(4.2) $\quad \underline{p}^{(i)} := (\underline{p}_0^{(i)}, \underline{p}_1^{(i)}, \cdots, \underline{p}_K^{(i)})$，$\underline{p}_j^{(i)}$ は m_{3-i}－ベクトル

とする。

定理 4.1　PH_i 呼到着直前定常状態確率は以下となる。

$$\underline{g}_0^{(i)} = ((1-{}^{(i)}g_0(0))\nu_i)^{-1}(\underline{p}_0^{(i)}(\underline{\underline{I}}_{3-i}+{}^{(3-i)}g_0(0)\underline{T}_{3-i}^{(0)^c}\underline{\alpha}_{3-i})+\mu\,\underline{p}_1^{(i)})$$

(4.3) $$\underline{g}_j^{(i)} = ((1-{}^{(i)}g_0(j))\nu_i)^{-1}\Big(\sum_{k=0}^{j-1}{}^{(3-i)}g_{j-k}(k)\,\underline{p}_k^{(i)}\,\underline{T}_{3-i}^{(0)^c}\underline{\alpha}_{3-i}$$

$$+\underline{p}_j^{(i)}(\underline{\underline{I}}_{3-i}+{}^{(3-i)}g_0(j)\underline{T}_{3-i}^{(0)^c}\underline{\alpha}_{3-i}-\min(j,S)\,\mu\,\underline{\underline{I}}_{3-i})$$

$$+\min(j+1,S)\,\mu\,\underline{p}_{j+1}^{(i)}+\sum_{k=0}^{j-1}\nu_i\,g_{j-k}(k)\,\underline{g}_k\Big),\quad j=1,2,\cdots,K-1$$

ここに，

(4.4) $\quad \underline{p}_j^{(1)} = p_j \otimes (\underline{e}_1^c \otimes \underline{\underline{I}}_2)$, $\underline{p}_j^{(2)} = p_j \otimes (\underline{\underline{I}}_1 \otimes \underline{e}_2^c)$

又，ν_i^{-1} は PH_i 呼の平均到着間隔，$\underline{e}_i^c$ は要素がすべて 1 の m_i ー縦ベクトル。

証明　マルコフ過程 $\{Y(t), \xi_{3-i}(t) : t \in (t_\ell^{(i)}, t_{\ell+1}^{(i)})\}$ の生成作用素は以下となる。

(4.5) $\quad \underline{\underline{Q}}_{3-i} = (\underline{\underline{A}}_{k\ell}^{(3-i)}) \quad k, \ell = 0, 1, \cdots, K$

$$\underline{\underline{A}}_{jj}^{(3-i)} = \underline{\underline{T}}_{3-i} - \min(j, S)\mu \underline{\underline{I}}_{3-i} + {}^{(3-i)}g_0(j)\, \underline{T}_{3-i}^{(0)c}\, \underline{\alpha}_{3-i}$$

$$\underline{\underline{A}}_{j,j+k}^{(3-i)} = {}^{(3-i)}g_k(j)\, \underline{T}_{3-i}^{(0)c}\, \underline{\alpha}_{3-i}$$

$$\underline{\underline{A}}_{j,j-1}^{(3-i)} = \min(j, S)\mu\, \underline{\underline{I}}_{3-i}$$

PH_i 呼の到着直前直後の系内状態の推移確率行列は以下となる。

(4.6) $\quad \underline{\underline{S}}_i = (\underline{\underline{s}}_{k\ell}^{(i)}) \quad k, \ell = 0, 1, \cdots\cdots, K$

$$\underline{\underline{s}}_{j,j+k}^{(i)} = {}^{(i)}g_k(j)\, \underline{\underline{I}}_{3-i}$$

部分マルコフ過程における率保存原理により，

(4.7)
$$\nu_i \underline{g}^{(i)} (\underline{\underline{I}} - \mathrm{diag}\, \underline{\underline{S}}_i) - \underline{p}^{(i)}\, \mathrm{diag}\, \underline{\underline{Q}}_{3-i}$$
$$= \nu_i \underline{g}^{(i)}\, \text{off-diag}\, \underline{\underline{S}}_i + \underline{p}^{(i)}\, \text{off-diag}\, \underline{\underline{Q}}_{3-i}$$

ここに，$\mathrm{diag}\, \underline{\underline{X}}$ は $\underline{\underline{X}}$ から対角要素のみ取り出し，他の要素

を0とした行列，off-diag $\underline{X}$ は $\underline{X}$ から非対角要素のみ取り出し，他の要素を0とした行列。

式(4.7)において，$\underline{g}_0^{(i)}, \underline{g}_1^{(i)}, \cdots, \underline{g}_{K-1}^{(i)}$ の順に解くと，式(4.3)を得る。

式(4.4)は，$\underline{P}^{(i)}$ が3節で求めた任意時点の定常状態確率分布 $\underline{P}$ の周辺分布であること，即ち，

$$\lim_{t\to\infty} P\{Y(t)=n,\ \xi_{3-i}(t)=\eta_{3-i}\}$$
$$=\sum_{\eta_i=1}^{m_i} \lim_{t\to\infty} P\{Y(t)=n,\ \xi_i(t)=\eta_i,\ \xi_{3-i}(t)=\eta_{3-i}\}$$

が成立することより求まる。

定理3.1を用いて $\underline{P}$ が求まったとすると，式(4.4)より $\underline{P}^{(i)}$ が求まる。すると，式(4.3)により $\underline{g}_0^{(i)}, \underline{g}_1^{(i)}, \cdots, \underline{g}_{K-1}^{(i)}$ が順番に求まる。従って，正規化条件

$$\sum_{j=0}^{K} \underline{g}_j^{(i)} \underline{e}_{3-i}^c = 1$$

により $\underline{g}_K^{(i)} \underline{e}_{3-i}^c$ を得る。$\underline{g}_K^{(i)} := (g_K^{(i)}(1), \cdots, g_K^{(i)}(m_{3-i}))$ の各要素を求めるには別の条件を必要とするが，呼種別呼損率，FIFOにおける呼種別待ち時間分布等を求めるには $\underline{g}_K^{(i)} \underline{e}_{3-i}^c$ のみで十分である。例えば，PH_i 呼の呼種別呼損率 $B^{(i)}$ は以下となる。

$$(4.8)\qquad B^{(i)}=\sum_{n=0}^{K}\underline{g}_n^{(i)}\underline{e}_{3-i}^{c}\left(\sum_{j=1}^{\infty} j\,{}^{(i)}b_j(n)\right)\Big/\,{}^{(i)}g$$

ここに，${}^{(i)}b_j(n)$ は，系内呼数が n の時到着した PH_i 呼に含まれる個々の呼のうち，j 呼呼損となる確率。又，

${}^{(i)}g=\sum_{j=1}^{\infty} j\,{}^{(i)}g_j$ ．

式(4.8)を各方式について具体的に表現すると以下となる*。

① 待時-待時WBAS方式

$$(4.8.1)\qquad B^{(i)}=\sum_{n=0}^{K}\underline{g}_n^{(i)}\underline{e}_{3-i}^{c}\left({}^{(i)}g-\sum_{j=1}^{K-n} j\,{}^{(i)}g_j\right)\Big/\,{}^{(i)}g$$

これは，

$${}^{(i)}b_j(n)=\begin{cases}{}^{(i)}g_j & (j>K-n)\\ 0 & (j\leqq K-n)\end{cases}$$

より求まる。

② 待時-待時PBAS方式

$$(4.8.2)\qquad B^{(i)}=\sum_{n=0}^{K}\underline{g}_n^{(i)}\underline{e}_{3-i}^{c}\left({}^{(i)}g+\sum_{j=1}^{K-n-1}(K-n-j)\,{}^{(i)}g_j-K+n\right)$$

これは，

$${}^{(i)}b_j(n)={}^{(i)}g_{j+K-n}\qquad j=1,2,\ldots.$$

より求まる。

---

* 以下の式で，$\sum_{n=i}^{j} x_n=0$ $(j<i)$ と定義する。

待時−即時式，即時−即時式，留保方式に対する公式も同様に得られる。

5．むすび

有限容量 $PH_1^{[X]}+PH_2^{[Y]}/M/S/K$ 形待ち行列の待時(即時)−待時(即時) WBAS(PBAS)各種方式の任意時点における定常状態確率分布の数値計算法を提案した。この計算法によると，上記分布が，PH_1 呼，PH_2 呼の位相数の積の次数をもつ行列の和と積及び，この次数元の連立方程式を1回解くことで計算でき，従来の手法に比べ，計算量が著しく減少される。更に，任意時点と呼種別到着直前における定常状態確率分布の関係を導出した。この関係を用いると，前者から後者を簡単に求めることができ，従来より未解決の問題であった呼種別呼損率，呼種別待ち時間分布等を定量化できる。

参考文献

[1] Kuczura, A.: "Piecewise Markov processes", SIAM J. Appl. Math., 24, 2, PP.169-181 (1973)

[2] Kuczura, A.: "Queues with mixed renewal and Poisson inputs", Bell Syst. Tech. J., 51, 6, PP.1305-1326 (1972)

[3] Kuczura, A. : " Loss systems with mixed renewal and Poisson inputs", Oper. Res., 21, 3, PP. 787-795 (1973)

[4] 町原文明："2種の独立な再生入力をもつ即時系におけるトラヒック特性", Trans. IECE, 63-B, 11, PP. 1071-1078 (1980)

[5] Wilson, K.G. : " Correlation in traffic overflowing from common link", Aust. Telecommun. Res., 11, 1, PP. 104-107 (1977)

[6] 川島幸之助："有限容量待ち室の混合入力モデルの解析とその応用", Trans. IECE, 65-B, 5, PP. 523-530 (1982)

[7] Machihara, F. : " On the overflow processes from the $PH_1+PH_2/M/S/K$ queue, Proc. of 10th International Teletraffic Congress, Montreal (1983)

[8] Matsumoto, J. and Watanabe, Y. : " Individual traffic characteristics of queueing systems with multiple Poisson and overflow inputs, IEEE Trans. Commun., COM-33, 1, PP. 1-9 (1985)

[9] 高橋敬隆："ファクシミリ通信における画信号蓄積系のトラヒック特性評価", 信学技報 IN83-61, PP.25-30 (1983)

[10] 田辺, 遠藤, 高橋："ファクシミリ通信網サービスにおけるトラヒック特性と蓄積交換システムの処理能力評価", 信学技報 SE84-126, PP. 67-72 (1984)

[11] Neuts, M.F. : " Matrix-Geometric Solution in Stochastic Models", The John Hopkins Univ. Press, Baltimore, (1981)

[12] Kawashima, K : " Analysis of buffer reservation models with mixed renewal and Poisson inputs", Trans. IECE of Japan, E-66, 9, pp. 527 - 534 (1983)