数理解析研究所講究録
第 565 巻 1985 年 122-127

Optimal stopping problems with partial observations

愛媛大・教養　森本宏明 (Hiroaki Morimoto)

§1.　Friedman [4], Bensoussan-Lions [2] による optimal stopping problem については Troianiello [10], 最近では Garroni-Vivaldi [5] らにより偏微分の観点を保って論じられている。しかしながら、多くの部分が偏微分によらず Martingale theory を用いて、一般的且つ簡潔に述べられることが分って来た。その一つを紹介します。

今、状態と観測過程が次の様に与えられているとする。

$$dx_t = b(x_t)dt + \sigma(x_t)dW_t^1$$

$$dy_t = h(x_t)dt + dW_t^2,$$

ここで W^1, W^2 は独立な Wiener Processes とする。

問題は cost function

$$C(\tau) = E[\int_0^\tau e^{-\alpha r} f(x_r)dr + e^{-\alpha\tau} g(x_\tau)]$$

$$\tau : \mathcal{F}_t^y = \sigma(y_s, s \leq t)\text{-stopping times}$$

を最小にすることです。

System が Linear の場合 [2] や Menaldi [7] が stochastic control における separation principle の idea を基に、Non-linear の場合 Beneš [1] が measure transformation technique を用いて論じている。ここで述べる特徴は次の点です。

(1) Penalty equation の non-linear filtering equation を導く。

(2) (1) を用いて conditional value process の近似法を与える。

(3) separation principle によらず optimal s.t. の存在を示す。

§2。 $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ を complete probability space, $\mathcal{F} = (\mathcal{F}_t)_{t \geq 0}$, $\mathcal{G} = (\mathcal{G}_t)_{t \geq 0}$ を通常の条件をみたす filtration で $\mathcal{G}_t \subset \mathcal{F}_t$, $\forall t$ とする。W を $\mathcal{F}$-adapted bounded right-continuous processes x の全体とすると norm $\|x\| = \| \sup_t |x_t| \|_{L^\infty}$ で Banach space となる。

$T_s : W \to W$, conditioned shift による semi-group :

$$T_s x(t) = E[x(t+s) | \mathcal{F}_t].$$

$A : \mathcal{D}(A) \subset W \longrightarrow W$, generator :

$$A = \beta - G_\beta^{-1}, \quad \mathcal{D}(A) = G_\beta(W), \quad \beta > 0 \quad (\beta \text{ に dep しない})$$

とする。ここで

$$G_\beta x(t) = \int_0^\infty e^{-\beta s} T_s x(t)\, ds = E\left[\int_t^\infty e^{-\beta(s-t)} x_s\, ds \,\Big|\, \mathcal{F}_t\right].$$

$\mathcal{D}(A)$ の closure を W_0 とする :

$$W_0 = \{x \in W \mid \|T_s x - x\| \to 0, \ s \downarrow 0\}.$$

§3. 問題を次の様に一般的に定式化する:

$f, g \in W, \ \alpha > 0$: given

Minimize $J(T) = E[\int_0^T e^{-\alpha r} f_r dr + e^{-\alpha T} g_T]$ $\quad T$: $\mathcal{G}$-s.t.

$\pi(x)$ によって $x \in W$ の $\mathcal{G}$-optional projection を記すことにすると、$\pi(x) \in \hat{W}$ となる。$\hat{W}$ は $\mathcal{G}$ に関する W である。
そうすると $J(T)$ は

$$J(T) = E[\int_0^T e^{-\alpha r} \pi(f)_r dr + e^{-\alpha T} \pi(g)_T]$$

と書けるので、問題は complete observable case に帰着される。

それ故、complete observation の結果と関連する注意を述べます。証明は [8] のやり方を modify して得られる。

V を次の様な class とする:

$$V = \{ v \in W \mid v_t \leq g_t \ \forall t, \ (e^{-\alpha t} v_t + \int_0^t e^{-\alpha r} f_r dr) : \mathcal{F}\text{-submartingale} \}$$

Penalty equation を考えよう:

$$(\alpha - A) z^\varepsilon + \frac{1}{\varepsilon} (z^\varepsilon - g)^+ = f, \quad \varepsilon > 0.$$

解 z^ε は、$g \in W_0$ なる仮定の下で、適当に数列 $\varepsilon_n \downarrow 0$ を選ぶと、z^{ε_n} はある $z \in W_0$ に強収束する,
(実は $\varepsilon_n = \frac{1}{2^n}$ でよい)。更に

(1)　Z は V の maximal element

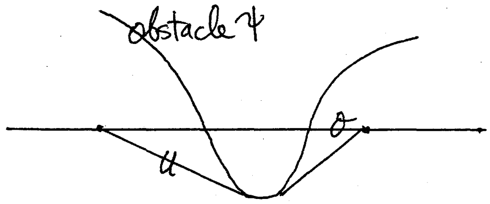
(2)
$$
\begin{aligned}
Z_u &= \operatorname*{ess\,inf}_{T \geq u} \; E\left[\int_u^T e^{-\alpha(r-u)} f_r \, dr + e^{-\alpha(T-u)} g_T \,\middle|\, \mathcal{F}_u\right] \\
&= \operatorname*{ess\,inf}_{S \in \Phi_u} \; E\left[\int_u^{S+u} e^{-\alpha(r-u)} f_r \, dr + e^{-\alpha S} g_{S+u} \,\middle|\, \mathcal{F}_u\right]
\end{aligned}
$$

ここで $\Phi_u = \{ S : (\mathcal{F}_{r+u})_{r \geq 0} - \text{s.t.} \}$.

(3)　$T^* = \inf\{ t \mid g_t = Z_t \}$: optimal s.t.

Remark 1。　次の obstacle problem を考える： Find u

$$
\begin{cases}
\alpha u - \frac{1}{2} u'' \leqq f \\
u \leqq \psi \\
(u - \psi)(\alpha u - \frac{1}{2} u'' - f) = 0 , \quad u|_{\partial O} = 0
\end{cases}
$$



Variational inequality の問題であるこの問題（Bensoussan [3], p.307 参照）は，Wiener process の semi-group を用いて [3] の Theorems 5.1, 5.3 によって与えられる。Z 及び V は丁度これに対応するものです。

Remark 2。Quasi-variational inequality に関係して [3], Theorem 4.3 に対応する maximal element が martingale 観点より得られる。ただし，Impulsive control への適用には，

optimal control を求めるために measurable selection theorem ([3], p.382 ↑6) が要るので，困難である。

Remark 3. Maximal element の近似法は Zorn's lemma が関連して難しい点を含んでいる。

§4. 結果は以下の通りです。証明は[9] による。

<u>Theorem</u>

(1) Z^ε を penalty equation の解とする：

$$(\alpha - A) Z^\varepsilon + \frac{1}{\varepsilon}(Z^\varepsilon - g)^+ = f.$$

このとき $\pi(Z^\varepsilon)$ は次の関係式をみたす

$$(\alpha - \hat{A})\pi(Z^\varepsilon) + \frac{1}{\varepsilon}\pi((Z^\varepsilon - g)^+) = \pi(f)$$

ここで，$\hat{A}$ は $\mathcal{G}$ に関する generator.

(2) $\begin{cases} g \in W_0 \\ \text{すべての } \mathcal{G}\text{-martingale は連続} \end{cases}$

を仮定する。このとき $\varepsilon_n \downarrow 0$ が存在して

$\pi(Z^{\varepsilon_n}) \longrightarrow y$ in $\hat{W}$ (強収束)，y : maximal element of the class $\{ y \in \hat{W} \mid y \leqq \pi(g),\ (e^{-\alpha t} y_t + \int_0^t e^{-\alpha r}\pi(f)_r\, dr)$: $\mathcal{G}$-submartingale $\}$.

(3) 更に $\hat{T}^* = \inf\{t \mid y_t = \pi(g)_t\}$: optimal s.t.

参考文献

[1] V. E. Beneš, Lecture Notes in Control and Information Sciences 42 Springer, 1982, 18–37.

[2] A. Bensoussan and J. L. Lions, Applications des inéquations variationnelles en contrôle stochastique, Dunod, 1978.

[3] A. Bensoussan, Stochastic control by functional analysis methods, North-Holland, 1982.

[4] A. Friedman, Stochastic differential equations and applications vol2 Acad. Press, 1975.

[5] M. G. Garroni and M. A. Vivaldi, Manuscripta Math., 1984, 39–69.

[6]. H. Kunita, 確率過程の推定, 産業図書

[7] J. L. Menaldi, Stochastics 3, 1979, 47–60.

[8] H. Morimoto, Stochastics 13, 1984, 213–228.

[9] H. Morimoto, C.R. Acad. Sc, 229, 1984, 623–626.

[10] G. M. Troianiello, Ann. Mathematica, 1979, 365–381.