数理解析研究所講究録
第565巻 1985年 128-137

多様体上のmartingaleに関する注意

早大理工 村本克志 (Katsushi Muramoto)

連続な実数値martingale (M_t) に対して

$$\{M_t \text{ 概収束}\} \underset{a.p.}{\subset} \{\langle M, M\rangle_\infty < \infty\}$$

であることは良く知られている。この結果はDarling, Zheng等によって多様体に値をとるmartingaleに拡張されている。本稿では，多様体値martingaleの定義から始めて，それらの概要を紹介していきたい。

§.1 確率幾何

ここでは，Meyer流に2階のtangent vectorを導入し，定義及び基本的結果を紹介していこう。

V を n 次元 C^∞ 多様体とし，$T(V) = \bigsqcup_{a\in V} T_a(V)$ を通常の

tangent bundle, $\tau(V)=\bigsqcup_{a\in V}\tau_a(V)$ を 2-tangent bundle とする。($\bigsqcup$ は多様体の構造が入ることを示す。ここでは C^∞ 構造を仮定する.) $T_a(V)$ の元は tangent vector, $\tau_a(V)$ の元は 2-tangent vector と呼ばれる。V の局所座標系 (x^i) に対して $D_i\equiv\frac{\partial}{\partial x^i}$, $D_{ij}\equiv\frac{\partial^2}{\partial x^i\partial x^j}$ とおくと, $D_i|_a$ は $T_a(V)$ の基底をなし, $D_i|_a$, $D_{ij}|_a$ $(i\geqq j)$ は $\tau_a(V)$ の基底をなす。$T(V)$ 上の C^∞ 函数が $T_a(V)$ 上で線型となるとき 1-form と呼ばれ, $\tau(V)$ 上の C^∞ 函数が $\tau_a(V)$ 上で線型となるとき 2-form と呼ばれる. $f, g\in C^\infty(V)$ に対し df, d^2f, $df.dg$ を

$$df(\theta)\equiv\theta(f)\qquad(\theta\in T(V))$$

$$d^2f(\theta)\equiv\theta(f)\qquad(\theta\in\tau(V))$$

$$df.dg\equiv\frac{1}{2}\{d^2(fg)-fd^2g-gd^2f\}$$

によって定義すると, df は 1-form, d^2f, $df.dg$ は 2-form となる。V の局所座標系 (x^i) に対し, (x^i, dx^i) は $T(V)$ の局所座標系, $(x^i, dx^i, dx^i.dx^j\ (i\geqq j))$ は $\tau(V)$ の局所座標系である。

各点 $a\in V$ に対して, $\tau_a(V)$ から $T_a(V)$ への線型写像 Γ が, $\Gamma(D_i)=D_i$ を満たすとき, a における接続と呼ばれる。

Christoffel の記号 Γ_{ij}^{k} を用いて，$\Gamma(D_{ij}) = \Gamma_{ij}^{k}(a) D_k$ と書ける．($\sum_{k=1}^{n}$ を省略している。今後も紛らわしい場合を除いて Σ を省略する.) 我々が用いる接続は"ねじれ"のないものである. V 上の接続を通常の方法で定義し，同じ文字 Γ で表す。双対写像もやはり同じ文字 Γ で表す.

今後 semimartingale は連続な path をもつものだけを扱う。V 値過程 (X_t) が，任意の $f \in C^\infty(V)$ に対して $(f(X_t))$ が $\mathbb{R}$ 値 semimartingale となるとき，V-semimartingale と呼ばれる。伊藤の公式により

$$d^2 X_t \equiv dX_t^i D_i + \frac{1}{2} d\langle X^i, X^j\rangle_t D_{ij}$$

$$d^2 \tilde{X}_t \equiv d\tilde{X}_t^i D_i + \frac{1}{2} d\langle X^i, X^j\rangle_t D_{ij}$$

は 2-tangent vector の様に扱える (Schwartz の原理). V-semimartingale (X_t) が

$$\Gamma(d^2\tilde{X}_t) = 0$$

を満たすとき，Γ-martingale と呼ばれる。この条件は

$$d\tilde{X}_t^i + \frac{1}{2}\Gamma_{ij}^k(X_t)\,d\langle X^i, X^j\rangle_t = 0 \qquad (1 \leq i \leq n)$$

と同値である。ここで，$\overset{c}{X}$ は martingale 項，$\tilde{X}$ は finite variation 項を表す．また話しを簡単にする為，座標系 (x^i) は大域的に定義されているものとし，$X^i = x^i(X)$ と表している。

2-form $\omega = a_i d^2x^i + a_{ij}dx^i \cdot dx^j$ に対し，V-semimartingale (X_t) に沿った ω の確率積分 $\int_{X_0^t}\omega$ を

$$\int_{X_0^t}\omega = \int_0^t a_i(X_s)\,dX_s^i + \frac{1}{2}\int_0^t a_{ij}(X_s)\,d\langle X^i, X^j\rangle_s$$

によって定義する．1-form ω に対し，V-semimartingale (X_t) に沿った Stratonovich 積分 $(S)\int_{X_0^t}\omega$，Ito 積分 $(\Gamma)\int_{X_0^t}\omega$ をそれぞれ

$$(S)\int_{X_0^t}\omega \equiv \int_{X_0^t} d\omega, \qquad (\Gamma)\int_{X_0^t}\omega \equiv \int_{X_0^t}\Gamma(\omega)$$

によって定義する。これらが一般の場合に well-defined であることは 1 の分割を使って証明される。

V-semimartingale (X_t) に対して，(X_t) が Γ-martingale であることと $(\Gamma)\int_{X_0^t}\omega$ が $\mathbb{R}$ 値 local martingale $(\forall\omega : 1\text{-form})$ であることは同値である。

§.2 収束定理

martingale 収束定理を拡張するには scalar quadraric variation を考えるのが有効である。以下でそれを定義する。

(X_t) を V-semimartingale とし，$X_0 = x_0$ を固定しておく。(X_t) に沿った確率平行移動 $\Phi_t : T_{x_0}(V) \to T_{X_t}(V)$ が与えられているとき，T_{x_0}-semimartingale (ξ_t) が

$$\xi_t \equiv \int_0^t \Phi_s^{-1}\left(\Gamma(d^2 X_s)\right)$$

で与えられる．(ξ_t) は自然に $\mathbb{R}^n$ 値 semimartingale と考えることができる。この (ξ_t) を (X_t) の stochastic development と呼ぶ．(X_t, H_t) を stochastic moving frame，即ち，

$$\Phi_t : T_{x_0}(V) \ni (H_{i0}) \mapsto (H_{it}) \in T_{X_t}(V)$$

とする。また，$\xi_t = \sum_{\alpha=1}^{n} \xi_t^\alpha H_{\alpha 0}$，$D_i = \sum_{\alpha=1}^{n} h_{it}^\alpha H_{\alpha t}$ とおくと

$$d\xi_t^\alpha = h_{it}^\alpha\left(dX_t^i + \frac{1}{2}\Gamma_{jk}^i(X_t)\, d\langle X^j, X^k\rangle_t\right)$$

となることがわかる。これから

(ξ_t) が $\mathbb{R}^n$ 値 local martingale

$\iff$ (X_t) が Γ-martingale

であることが容易にわかる。

さて，V-semimartingale (X_t) の scalar quadratic variation $(\langle X, X\rangle_t)$ を $d\langle X, X\rangle_t \equiv d\langle \xi^\alpha, \xi^\alpha\rangle_t$ によって定義する(He-Zheng [4])。特に，リーマン距離 g が導入され $(H_{\alpha t})$ が正規直交であるとき，$g_{ij}(X_t)\, d\langle X^i, X^j\rangle_t = d\langle \xi^\alpha, \xi^\alpha\rangle_t$ である。

任意の $f \in C^\infty(V)$ に対し成立する次の公式は重要である。

$$
(*) \quad
\begin{aligned}
f(X_t) - f(X_0) &= \int_0^t df(X_s) \circ H_{\alpha s}\, d\xi_s^\alpha \\
&\quad + \frac{1}{2}\int_0^t \nabla df(X_s)(H_{\alpha s}, H_{\beta s})\, d\langle \xi^\alpha, \xi^\beta\rangle_s
\end{aligned}
$$

ただし，∇ は covariant derivative を表す。

V をリーマン多様体として，Darling, Zheng によって次の定理が得られた。

<u>定理 A</u> (Darling [2]) $V \cup \{\delta\}$ を V の1点コンパクト化とする。このとき，Γ-martingale (X_t) に対して

$$\{ \langle X, X \rangle_\infty < \infty \} \underset{a.p.}{\subset} \{ \exists X_\infty \in V \cup \{\delta\} \}$$

が成立する。

<u>定理B</u>（Zheng [7]） Γ-martingale (X_t) に対して

$$\{ \exists X_\infty \in V \} \underset{a.p.}{\subset} \{ \langle X, X \rangle_\infty < \infty \}$$

が成立する。

§.3 定理Aの証明

ここでは，公式(*)を用いて定理Aの証明の概略を述べよう。Meyer により，任意の $f \in C_c^\infty(V)$ に対して $f(X_t)$ が収束することを示せばよいことが指摘されている。公式(*)により，任意の $f \in C_c^\infty(V)$ に対して

$$f(X_t) - f(X_0) = \int_0^t a_\alpha(s)\, d\xi_s^\alpha + \frac{1}{2}\int_0^t b_{\alpha\beta}(s)\, d\langle \xi^\alpha, \xi^\beta \rangle_s$$

とかける。ここで，$a_\alpha(s) = df(X_s) \circ H_{\alpha s}$ ，$b_{\alpha\beta}(s) = \nabla df(X_s)(H_{\alpha s}, H_{\beta s})$

とおいている。このとき，df, ∇df は有界であり，$(H_{\alpha s})$ が正規直交であるから，定数 $K>0$ が存在して，各 $s \geq 0$ に対して，

$$\sup_{\alpha} |a_\alpha(s)| < K, \quad \sup_{\alpha,\beta} |b_{\alpha\beta}(s)| < K$$

が成立する。ところで，

$$< \int_0^{\cdot} a_\alpha(s)\, d\xi_s^\alpha, \int_0^{\cdot} a_\beta(s)\, d\xi_s^\beta >_\infty \leq \int_0^\infty |a_\alpha(s)||a_\beta(s)||d<\xi^\alpha, \xi^\beta>_s|$$

$$\leq n K^2 <\xi, \xi>_\infty$$

であるから，条件 $<X, X>_\infty = <\xi, \xi>_\infty < \infty$ により $\int_0^t a_\alpha(s)\, d\xi_s^\alpha$ の収束が得られる。一方，

$$\int_0^\infty |b_{\alpha\beta}(s)\, d<\xi^\alpha, \xi^\beta>_s| \leq n K <\xi, \xi>_\infty$$

であるから，$\int_0^t b_{\alpha\beta}(s)\, d<\xi^\alpha, \xi^\beta>_s$ の収束も得られる．以上から $f(X_t)$ の収束が示されたので，求める結果が従う。

He-Zheng [4] は §.2 で導入した方法で，Γ-martingale X の scalar quadratic variation <X, X> を定義し，定理Aの拡張を試みている。

ここでは定理Bの証明を与えなかったが，Zheng [7] は immersion を用いて証明を与えている。He-Zheng [4] では定理Bの拡張には成功していない。また，定理Bは，「定理Aの逆が成立するか」という問題の完全な解答ではない。これは問題として依然として残されているように思う。

最近送られてきた Darling の pre print 等では，特定の多様体において細かい性質を調べているようであるが，今後の研究に待たなければならない問題も多いように思われる。

References

[1] R.W.R. Darling, Martingales on manifolds and geometric Ito calculus, Ph.D. Thesis, Univ. of Warwick, England, 1982.

[2] R.W.R. Darling, Convergence of martingales in a Riemannian manifold, Publ. RIMS. Kyoto Univ., 19 (1983), 753-763.

[3] S.W. He, J.A. Yan and W.A. Zheng, Sur la convergence des semimartingales continues dans R^n et des martingales dans une variété, Lecture Notes in Math., 986 Springer, Berlin-Heidelberg-New York, 1983.

[4] S.W. He and W.A. Zheng, Remarques sur la convergence des martingales dans les variétés, L. N. in Math., 1059 Springer, Berlin-Heidelberg-New York, 1984.

[5] P.A. Meyer, Géométrie stocastique sans larmes, L. N. in Math., 850 Springer, Berlin-Heidelberg-Ner York, 1981.

[6] L. Schwartz, Semi-martingales sur des variétés, et martingales conformes sur des variétés analytique complexes, L. M. in Math., 780 Springer, Berlin-Heidelberg-New York, 1980.

[7] W.A. Zheng, Sur la convergence des martingales dans une variété riemannienne, Z. Wahrscheinlichkeitstheorie, 63 (1983), 511-515.