数理解析研究所講究録
第569巻 1985年 11-33

Free shear layer の時間－空間不安定

原研　藤村　薫　(Kaoru FUJIMURA)

1. はじめに

free shear layer は異なる流速をもった2つの一様流が一平面を境に接している場合に生じる内部境界層である。流れ場は境界層近似を行うと，最低次の近似では Blasius 方程式に支配されるので，主流の流れ方向への変化と非平行性は共に境界層厚さに基づく Reynolds 数の逆数の程度であり，R→∞ の極限では平行性が保証される。実験的には，しかし，R→∞ まで層流状態が保たれることはなく，必ずそれ以前の有限 R で不安定となり乱流へ遷移する。

この流れの不安定性，遷移過程に関する実験はこれまで豊富に行われてきており，十分知見が得られている。それによると，線形段階とそれに続く非線形段階において擾乱の2次元性は良好に保たれており，2次不安定としての peak-valley structure の出現と3次不安定としての高周波擾乱の発生といった平板境界層にみられるような急激な Tollmien-Schlichting wave の breakdown は生じない。従って理論的取り扱いに好適のように見受けられる。この事情を反映して，線形段階においては時間モード，空間モードの理論と実験結果との比較がこれまでに行われてきており，空間増幅モードの理論の有効性が実証されている。しかし，非線形段階から乱流への遷移については十分な理論的結果が未だ得られていない。

本稿では，free shear layer に対する線形ならびに非線形安定理論のこれまでの成果を空間モードを中心に review し，実験結果と比較する。さらに，最近注目を集めている feed-back mechanism という概念を紹介する。

2. 定式化

ここでは2次元主流に加えられた2次元攪乱のみを取り扱うので，主流＋攪乱の場は流れ関数 $\psi(x,y,t)$ を用いることによって完全に記述される。ψ は次の渦度方程式に支配される。

$$\frac{\partial \Delta\psi}{\partial t} - J(\psi, \Delta\psi) - \nu \Delta^2 \psi = 0,$$

ただし，$\Delta = \partial^2/\partial x^2 + \partial^2/\partial y^2$，$J(f,g) = \frac{\partial f}{\partial x}\frac{\partial g}{\partial y} - \frac{\partial f}{\partial y}\frac{\partial g}{\partial x}$，

ν は動粘性率である。

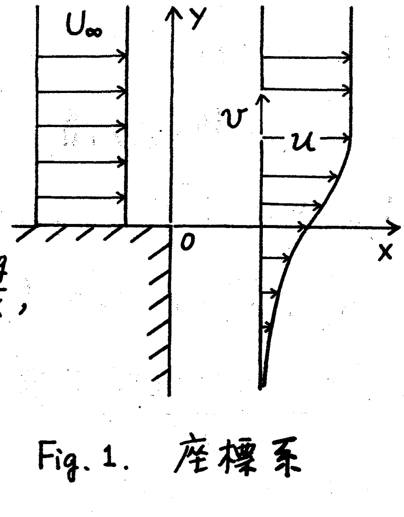


Fig. 1. 座標系

<u>主流</u>　$\eta = y/\sqrt{\nu x/U_\infty}$, $\bar{\Psi} = \sqrt{\nu x U_\infty} f(\eta)$　という相似変数を用いると，無次元流れ関数 $f(\eta)$ は次の Blasius 方程式

$$ff'' + 2f''' = 0,$$

に支配されることがLessen[1]によって示された。ただし BCs

$$\eta \to \infty \text{ で } f' \to 1, \quad \eta \to -\infty \text{ で } f' \to 0, \quad \eta = 0 \text{ で } f = 0,$$

が課せられる。この f を用いると主流速度成分 (u, v) は

$$\partial\bar{\Psi}/\partial y = U_\infty f'(\eta), \qquad -\partial\bar{\Psi}/\partial x = \sqrt{\nu U_\infty / x}\,(\eta f' - f)/2,$$

で与えられる。

<u>無次元化</u>　適当な参照点を $x = x_0$ とするとき，代表速度として U_∞, 代表長として $\sqrt{\nu x_0 / U_\infty}$ を用いる。従って Reynolds 数は，$R = \sqrt{U_\infty x_0 / \nu}$　で定義される。

<u>攪乱方程式</u>　上の無次元化を渦度方程式に施し，$\psi = \bar{\Psi} + \hat{\varphi}$（$\hat{\varphi}$ は攪乱）を代入して定常主流 $\bar{\Psi}$ の満足する式を引き去ると攪乱方程式

$$\partial\Delta\hat{\varphi}/\partial t - J(\hat{\varphi}, \Delta\bar{\Psi}) - J(\bar{\Psi}, \Delta\hat{\varphi}) - R^{-1}\Delta^2\hat{\varphi} = J(\hat{\varphi}, \Delta\hat{\varphi}),$$

を得る。平行主流の場合（$\partial\bar{\Psi}/\partial y = U(y)$, $\partial\bar{\Psi}/\partial x = 0$）には

$$[(\partial/\partial t + U\partial/\partial x)\Delta - U''\partial/\partial x - R^{-1}\Delta^2]\hat{\varphi} = J(\hat{\varphi}, \Delta\hat{\varphi}),$$

となる。ただし，プライムは y についての微分である。

3. 線形安定性（平行流近似）

平行定常主流の仮定の下には，線形化によって右辺を省

略した攪乱方程式が変数分離可能であるので，ΨをFourier分解することができ，normal mode $\phi(y)e^{i(\alpha x-\omega t)}$の振幅$\phi(y)$に対してOrr-Sommerfeld方程式が得られる：

$$[(-i\omega+i\alpha U)S_1-i\alpha U''-R^{-1}S_1^2]\phi=0,$$

ただし $S_n\equiv d^2/dy^2-n^2\alpha^2$。

3.1. 時間モード

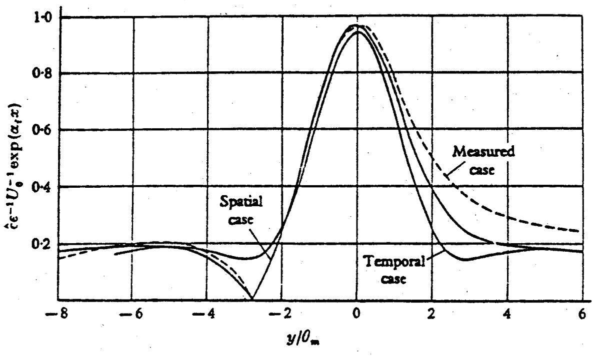
波数αをreal，周波数ωをcomplexとする時間モードについてはLessen以来多くの研究が行われてきた。代表的なものとして文献1-7)が挙げられる。$\omega=\alpha c$と書くとき複素位相速度cのreal partが位相速度を，imaginary partとαの積が線形増幅率を与える。

さて，この流れの線形安定特性として最も重要な点は，平行流近似の下では絶対不安定($R_c=0$)が得られることである。しかし，平行流近似からのずれは$R=\infty$からの摂動として評価されるべきものであるので，$R\to 0$では主流は本質的に非平行である。従って，$R_c=0$は平行流モデルの線形特性と言うべきである。また，tanh y型速度分布が安定特性上境界層解の速度分布に対する良好な近似になっている点も重要である。さらに，中立曲線の下分枝は$\alpha\to 0$であり，上分枝は高Rで$\alpha=1$に平行である。従って，plane Poiseuille流のように，あるαでRを大きくしていった時一度不安定領域に入った後安

定化するということは起らず，不安定のまま全く同じ安定特性があるRの値以上で得られる。従って現実の有限Rの流れの安定特性を非粘性極限のそれでかなり説明できるのである。

3.2. 空間モード

Michalke[8]は空間モードを取り扱うことによってFreymuth[9]の実験結果を理論的に再現することに成功した。彼は主流として $U=(1+\tanh y)/2$ を用い，非粘性極限での時間モード，空間モードの線形安定性をFreymuthの実験結果と比較したのである。空間モードでは α はcomplex（α_r：波数，$-\alpha_i$：増幅率），ω はrealとして扱われる。



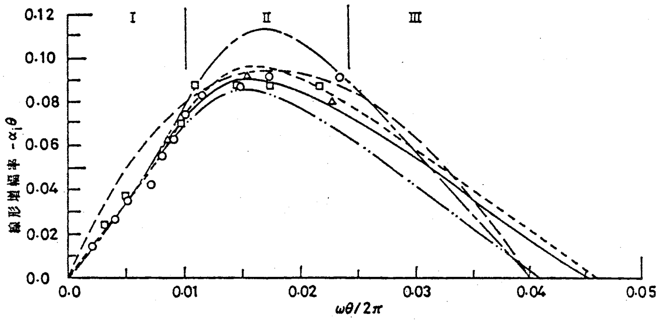
Theoretical and measured amplitude distribution for $S = 0{\cdot}008$.

Fig. 2. 基本波の振幅の分布

実はすでにSato[10]の実験においてnon-critical levelにphase reversalの生じることが報告されている。このことはFreymuthの実験でも確められた。それに対し，時間モードを用いるとcritical levelに中立状態でのみphase reversalが生じ，増幅擾乱では生じない。空間モードを用いるとFig. 2のように実験と同様のphase reversalが得られた。

次に，線形増幅率に関した比較をFig. 3に示す。領域Iでは実験点が空間モードのすべてと良く一致する。領域IIで

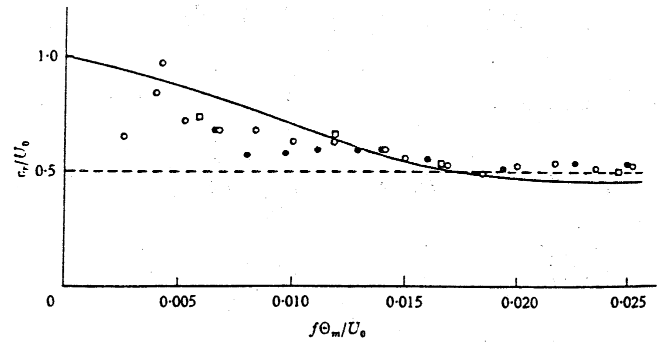
はしかし，Michalke[8]と実験結果を比較する限り実験点はむしろ時間モードと良く一致するかにみえる。この矛盾は領域Ⅱでの撹乱の非線形性に起因するとMichalkeは考えた。なお，領域Ⅲでは線形波を実験的に励起することはできていない。ところでMonkewitzとHuerre[11]はBlasius解を主流として用いた場合の$R \to \infty$での空間モードの計算を行った。その結果はFig.3に示すように，領域Ⅰではmichalkeの空間モードに，領域Ⅱでは時間モードに近い値を示し，実験点はほとんどこの曲線にのるのである。従って，Michalkeの結果と実験点との領域Ⅱでの不一致はBlasius解と$U=(1+\tanh y)/2$との相違性によるものであることがわかる。



自由境界層における線形増幅率の理論結果と実験値の比較
——，WKBJ法，$R_\theta=62$；—‥—，平行流近似，$R_\theta=62$（以上は文献37））；
----，非粘性極限，空間 mode（Monkewitz と Huerre[50]）；
— — —，非粘性極限，空間 mode（Michalke[48]）；
— — —，非粘性極限，時間 mode（Freymuth[49]）；
○，□，△，実験値（Freymuth[49] 他）

Fig. 3. 線形増幅率の比較

さて，$U=(1+\tanh y)/2$に関して，時間モードが分散性をもたない($c_r=0.5$)のに対し，空間モードではFig.4に示すように低ω域では分散性を示すのであるが高



Non-dimensional phase velocity *vs* Strouhal number in the free boundary layer of an axisymmetric jet (○, U_0 = 8 m/sec; ●, U_0 = 4 m/sec) and of a plane jet (□, U_0 = 8 m/sec) compared with the spacewise theory (——) and the timewise theory (-----) after Freymuth.

Fig. 4. 位相速度の比較

ωでは無分散となる。(以上のトピックスについては，HoとHuerre[12)]の解説を参照されたい)

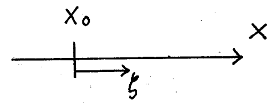
4. 線形および弱非線形安定性(非平行効果)

再度Fig.3に戻って，理論と実験の比較を続けよう。実験的観察によると運動量厚θで定義されたReynolds数に関して[60, 350]程度では安定特性は全く不変である(Freymuth)。Fig.3に示された実験点は$60 \leq R_\theta \leq 350$で得られた値である。さて，$R_\theta=62$，Blasius速度分布の場合について平行流近似で空間モードの計算をすると，得られた$-\alpha_i$はFig.3, 2点鎖線のようになり，領域Ⅰでは一致するが領域Ⅱではかなりずれてしまう。このように現実のRに基づく理論値よりも非粘性極限での値に増幅率が近い理由は何か？本節ではこの問題に対する解答を与える。

もう一つの問題は次のようなものである。領域Ⅰではωが低く，従って長波を取り扱っていることになる。ところで，平行流近似は短波長の極限では妥当性をもつが，長い波に対しては平行流近似は全く根拠を失う。それにもかかわらずこの領域で理論と実験が良く一致するのは何故か？この問題を解くためには本質的に非平行な流れの安定性理論が必要であり，現在のところ未解決である。

さて，弱い非平行流や非定常流に対して多重尺度法を用いて非平行，非定常効果を補正する理論はBenneyとRosenblat[13]によって提案され，Bouthier[14]，Gaster,[15] Nayfeh, SaricとMook[16]によって確立された。[17] ここでは，この線形理論で行われた解析を弱非線形段階に拡張した定式化を行い，得られた結果を紹介する。

まず，参照点 $x=x_0$ の近傍に着目しよう。



$x=x_0+\xi\equiv x_0(1+\xi)$，$|\xi|\ll x_0$ とすると $|\xi|\ll 1$ である。2節で行った無次元化に加えて $x^*=x/\delta_0=(1+\xi)x_0/\delta_0=R(1+\xi)\equiv R+\tilde{x}$，ただし $\delta_0=\sqrt{\nu x_0/U_\infty}$，$\theta/\delta_0=1.238$ である。ここで $\epsilon^2\equiv R^{-1}\ll 1$ としよう。以下 * と ~ を省略する。

<u>局所展開</u>　ここでは参照点の近傍のみを考えるので，すべての量は x_0 からの局所展開によって与えられる。

$$
\begin{cases}
\bar{\Psi}=\bar{\Psi}_0(0)+\xi\cdot\partial\bar{\Psi}_0/\partial\xi\big|_{\xi=0}+\cdots+\epsilon^2\bar{\Psi}_1(0)+\cdots, \\
\partial\bar{\Psi}/\partial y=U_0(0)+\xi\cdot\partial U_0/\partial\xi\big|_{\xi=0}+\cdots+\underbrace{\epsilon^2 U_1(0)}_{=0}+\cdots, \\
-\partial\bar{\Psi}/\partial x=\epsilon^2 V_1(0)+\cdots
\end{cases}
$$

非平行性と非線形性の効果を同時に含んだ定式化を行うが，非平行性のみを考えるときは最終的に得られた表式から非線形性を無視すれば良い。

非平行性と非線形性の釣り合った状態を考えると，平衡状態は非線形性による抑制効果と線形増幅の釣り合いによっ

て得られるので，$\epsilon^2 \sim \|\hat{\varphi}\|^2$ が成り立ち，

$$E = \exp\{i[\Theta(\xi)/\epsilon^2 - \omega t]\},\quad \partial\Theta/\partial\xi = \alpha(\xi) + \epsilon^2\Lambda(\xi),$$

$$\mathrm{Im}\,\partial\Theta/\partial\xi = 0,$$

とするとき次の展開が可能である：

$$\hat{\varphi} = \epsilon[\Psi_{11}E^1 + \Psi_{11}^* E^{-1}] + \epsilon^2[\Psi_{22}E^2 + \Psi_{22}^* E^{-2} + \Psi_{20}]$$
$$+ \epsilon^3[\Psi_{31}E^1 + \Psi_{31}^* E^{-1} + \Psi_{33}E^3 + \Psi_{33}^* E^{-3}] + \cdots。$$

線形作用素 $L_n \equiv in(-\omega + \alpha U_0)S_n - in\alpha U_0'' - R^{-1}S_n^2$ を導入すると $\epsilon^1 E^1$ の係数から

$$L_1\Psi_{11} = 0,$$

を得る。ただし $R^{-1}S_n^2$ の項は形式的に ϵ^2 分だけ他の項より高次であるが，critical layer singularity を打ち消すために必要であるので，より低次の式に繰り込まれている。$\Psi_{11} = A(\xi)\phi_{11}(\xi, y)$ の形で求められる。ここで A, ϕ_{11} を共に局所展開すると

$$\begin{cases} A(\xi) = A(0) + \xi \cdot dA/d\xi|_{\xi=0} + \cdots, \\ \phi_{11}(\xi, y) = \phi_{11}(0, y) + \xi \cdot \partial\phi_{11}/\partial\xi|_{\xi=0} + \cdots。\end{cases}$$

振幅の定義としては $|\hat{\varphi}(y=0)| = 2\epsilon|A(\xi)|$，すなわち $\phi_{11}(\xi, 0) = 1$ を用いる。

さて $\xi = 0$（参照点）では，高調波と主流の変形が

$$\begin{cases} L_2\Psi_{22} = A(0)^2 N_{22}(0), & \Psi_{22}(0, y) = A(0)^2\phi_{22}(0, y), \\ L_0\Psi_{20} = |A(0)|^2 N_{20}(0), & \Psi_{20}(0, y) = |A(0)|^2\phi_{20}(0, y), \end{cases}$$

のように求められる。基本波に対する非平行効果と非線形相

互作用によるはね返りは次の式に支配される。

$$L_1\Psi_{31}=[A(a_1 d\alpha/d\xi+a_2+a_3\partial/\partial\xi+ia_3\Lambda)+a_3\partial A/\partial\xi]\phi_{11}\Big|_{\xi=0}$$
$$-|A(0)|^2A(0)\,N_{31}(0),$$

$$\begin{cases} a_1=-\omega+3\alpha U_0+2iR^{-1}S_1-4i\alpha^3R^{-1}, \\ a_2=-V_1DS_1+V_1''D, \qquad D=\partial/\partial y, \\ a_3=-2\alpha\omega+U_0S_1+2\alpha^2U_0+U_0''+4i\alpha R^{-1}S_1. \end{cases}$$

Ψ_{31} の可解条件は $\xi=0$ において

$$dA/d\xi=-A\left\{-i\Lambda+\int_{-\infty}^{\infty}\tilde{\Phi}[a_1d\alpha/d\xi+a_2+a_3\partial/\partial\xi]\phi_{11}dy\Big/\int_{-\infty}^{\infty}\tilde{\Phi}a_3\phi_{11}dy\right\}$$
$$+|A|^2A\int_{-\infty}^{\infty}\tilde{\Phi}N_{31}dy\Big/\int_{-\infty}^{\infty}\tilde{\Phi}a_3\phi_{11}dy,$$

のように書ける。ただし $\tilde{\Phi}$ は ϕ_{11} の adjoint 関数である。

元来ここでの展開は平衡状態を仮定しているので，そこでは非線形性まで含めた増幅率が0でなくてはならない。基本波に基づく増幅率=0という条件は

$$-\alpha_i+\epsilon^2|A|^{-1}d|A|/d\xi+\epsilon^2|\phi_{11}|^{-1}\partial|\phi_{11}|/\partial\xi-\epsilon^2\Lambda_i=0,$$

と書かれるが，$\mathrm{Im}\,\partial\Theta/\partial\xi=0$ が前提条件であるから結局

$$|A|^{-1}d|A|/d\xi+|\phi_{11}|^{-1}\partial|\phi_{11}|/\partial\xi=0,$$

が平衡振幅を与える。上式左辺オ2項は，振幅と増幅率が異なるy位置で定義可能であることを反映している。平衡強度として $I_e\equiv 2\epsilon|A|$ を定義する。

まず，$y=0$ で求めた線形増幅率がFig.3に書き込んである。同図によると，$R=50\,(R_\theta=62)$ であるにもかかわらず，非平

行性を考慮に入れると，Monkewitz と Huerre の $R=\infty$ の結果にかなり近くなっている。従って，有限 R での実験結果が $R=\infty$ の理論とほぼ一致した理由は主流の非平行性にあることが結論される。Fig. 5 には得られた等増幅率曲線群を平行流近似に基づくものと共に示す。この図からもわかるように，非平行性は，線形増幅率をより非粘性の特性に近づける働きをする。Fig. 6 には中立状態に対する攪乱の波数の R 依存性を示す。

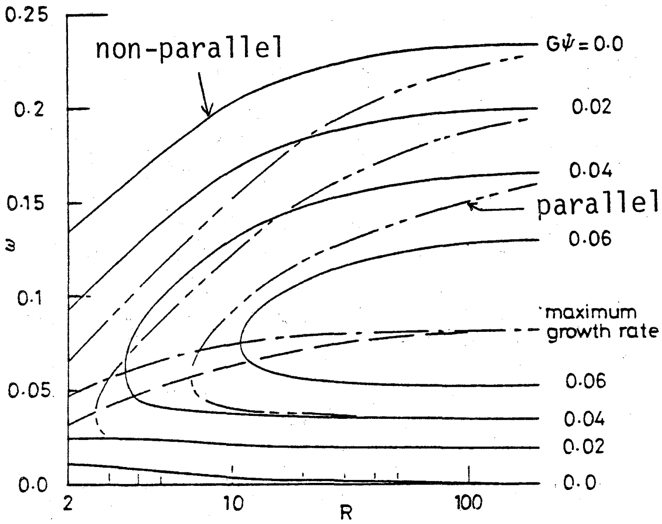


Fig. 5　等増幅率曲線群

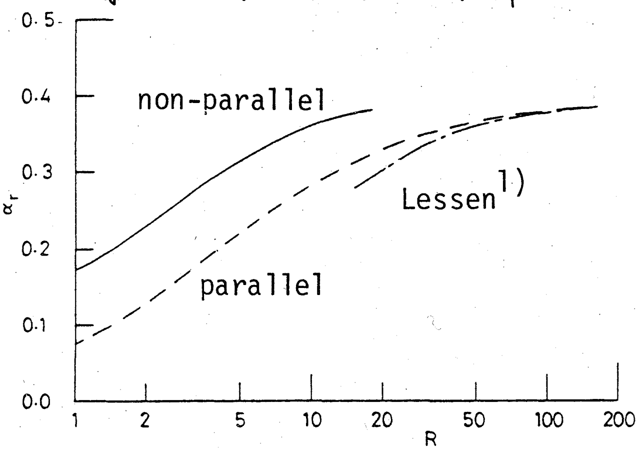


Fig. 6　中立曲線の上分枝

Fig. 7 には Landau 定数の R 依存性を $\omega=0.21$ について示す。この値は，Miksad[18] が実験的に求めた値とオーダー的には一致する。また，$\omega=0.21$ における平衡強度を Fig. 8 に示す。ここに得られた曲線は以下のような意味をもつ。振幅の定義は常に $y=0$ で行っているので，$y=y_0$ という点において平衡状態が得られるとしたら，その時 $y=0$ での強度はどれだけかをここには示してある。従って，同一の R で他の y 位置に

くらべて$y=y_0$でのI_eが大きければ大きい程，そのy_0の点では平衡になりにくく，攪乱は増幅しつづけることを意味している。

Gaster, Kit とWygnanski[19]は乱流混合層に対して，実験的に得られた主流速度分布を用いた同様の線形計算を行い，実験結果と良い一致を得た。

Plaschko とHussain[20]は $\epsilon^2\sim\|\hat{\varphi}\|$ の場合について有限の増幅波数帯の寄与をFourier積分の形で取り込んだ定式化を行っている。

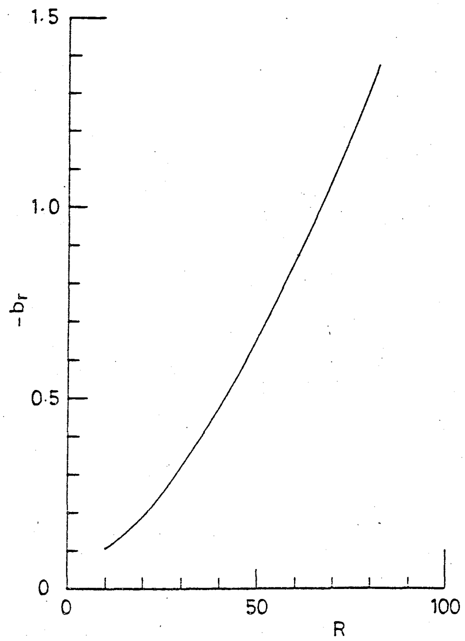


Fig.7　Landau定数 $\omega=0.21$

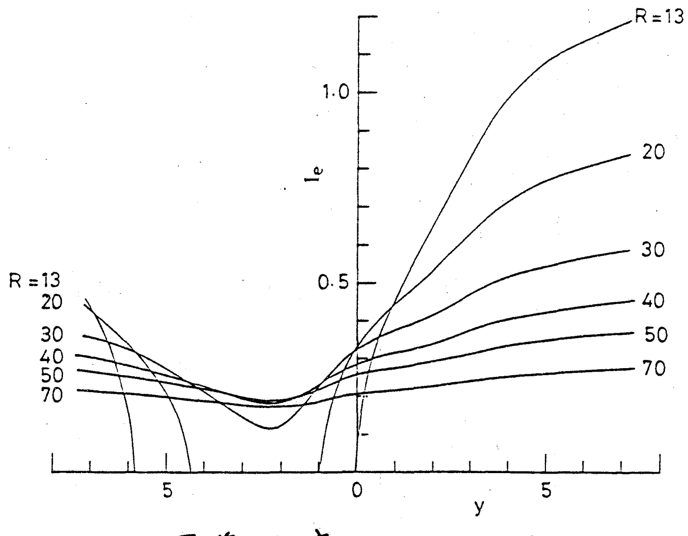


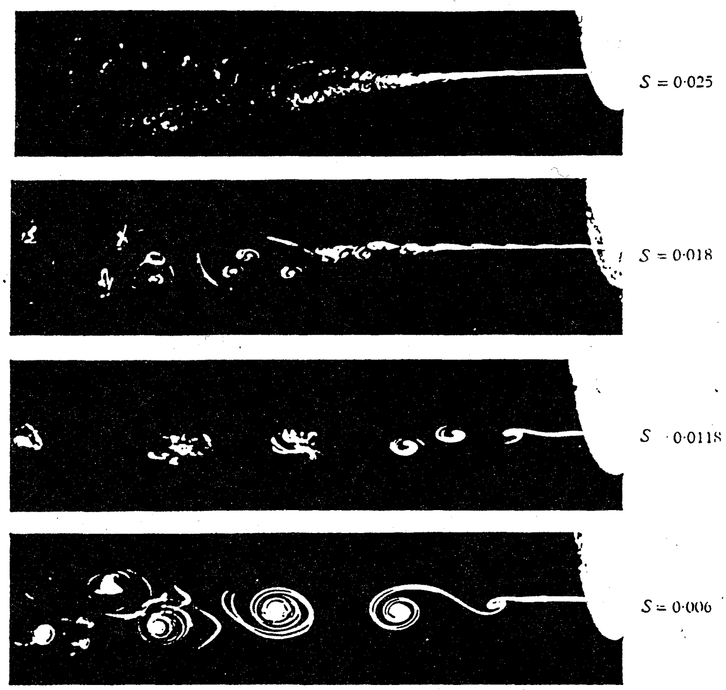
Fig.8　平衡強度 ($\omega=0.21$)

ただ，上述したように，これらの解析ではR^{-1}が微小パラメターとして用いられているにもかかわらず，$R^{-1}S_n^2$ を$O(\epsilon^{2n})$とするところに本質的な欠点がある。この欠陥を解決するためには，特異摂動的に$R^{-1}S_n^2$ の項を取り込む必要があるので，Smith[21,22]の行ったようなmultiple-deck structure理論を展開する必要があるかも知れない。しかし，multiple-deck structure

理論は，理論の構成が極めて複雑であること，理論の基盤（展開基盤）が平行流近似による中立曲線の上，下分枝の漸近形にあること等を考えると，free shear layer のように中間的なRで，しかも上，下両分枝共にα軸に平行な漸近枝をもつ場合に，同様の理論構成を行うことはおそらく不可能であろう。

5. 非線形段階における実験結果

free shear layer において最も特徴的な非線形効果は，実は前節で扱った基本波と高調波との相互作用ではなく，分数調波の出現こそが特徴的である。このことはSato[10]によってはじめて見出され，Freymuthの可視化写真（Fig.9）やBrowand[23]，Miksad[18]たちによる高精度の実験によって定量化された。

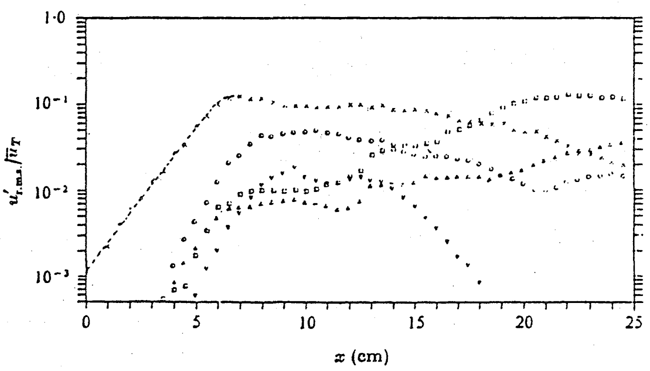


Dependence of the smoke picture on the Strouhal number.
$D = 7{\cdot}5$ cm. $U_0 = 3$ m/sec. $\Delta y = 0{\cdot}1$ cm.

Fig. 9 free shear layer でのvortex pairing

Miksadによって得られたu'_{rms}の下流方向への成長をFig.10に示す。彼はfree shear layerにおける遷移過程を6つの領域に

分類した。(1)基本波βは線形論に従って指数関数的に成長し，非線形性は現われない。(2)基本波は線形的に成長しつづけるが，高調波

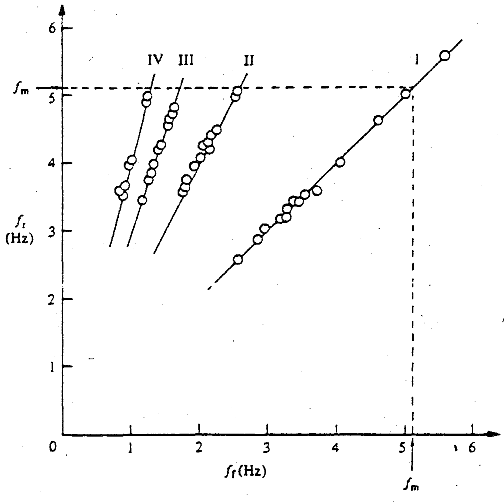


Downstream growth of $u'_{r.m.s.}$ maxima. Excitation at $\beta = 0{\cdot}222$; $R(x_0) = 145$. ×, β; ○, 2β; ▽, 3β; □, $\frac{1}{2}\beta$; △, $\frac{3}{2}\beta$. ---, theoretical Landau equilibration curve.

Fig.10 単色波攪乱の空間増幅

2β, 3β, 分数調波 $\beta/2$, $3\beta/2$ が出現し指数関数的に成長をはじめる。(3) β が平衡に達すると，高調波，分数調波も平衡に達する。(4) $\beta/2$, $3\beta/2$ は第2成長期に入るが 2β と 3β は減衰をはじめる。(5) β に3次元的変形が生じ，secondary vortex structure を形成する。2β と 3β は強く減衰し，$\beta/2$ と $3\beta/2$ は増幅が鈍化する。(6)間欠的な2次不安定を起す。スペクトルはブロードになる。流れ場は3次元構造が支配的となり乱流へ移行する。

今一つ非常に興味深い実験はHoとHuang[24]によって行われた。彼らは線形論によって予測される最大増幅モードの周波数 f_m よりも低い種々の周波数 f_f で攪乱を励起した。その結果をFig.11に示す。横軸に励起周波数，縦軸に応答周



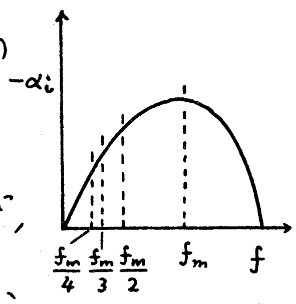
The response frequency *vs.* the forcing frequency.

Fig.11 $f_f \leq f_m$ での励起

波数 f_r がとってある。

$\frac{1}{2}f_m < f_f \le f_m$ では $f_r = f_f$； $\frac{1}{3}f_m < f_f \le \frac{1}{2}f_m$ では $f_r = 2f_f$； $\frac{1}{4}f_m < f_f \le \frac{1}{3}f_m$ では $f_r = 3f_f$； $\frac{1}{5}f_m < f_f \le \frac{1}{4}f_m$ では $f_r = 4f_f$, … が得られている。下流にゆくにつれ，このように卓越して出てきた f_r モードには，$\frac{1}{2}f_m < f_f \le f_m$ を除いて各々 $\frac{1}{2}f_r, \frac{1}{3}f_r, \frac{1}{4}f_r$ が現われる。すなわち vortex merging を起して分数調波に移行する。

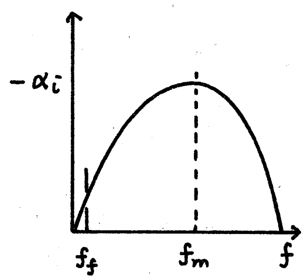
以上のことはある程度容易に説明がつく。f_f で励起した場合，必ずその高調波も多かれ少なかれ同時に励起してしまうことになる。しかし，たとえば $2f_f$ は f_f にくらべ十分小さいであろう。そこで，$\frac{1}{2}f_m < f_f \le f_m$ の場合，当然の結果として $f_r = f_f$ が現われる。ところが例として $\frac{1}{3}f_m < f_f \le \frac{1}{2}f_m$ を考えると第1高調波（$\frac{2}{3}f_m < 2f_f \le f_m$）が同時に励起される。すると，$f_f$ よりも $2f_f$ の方が増幅率が大きいためまず $f_r = 2f_f$ が出現する。実は $2f_f$ よりも $3f_f$ の方がさらに大きい増幅率を与えることもあるが，その際には $2f_f$ の振幅にくらべて $3f_f$ は十分小さいため $3f_f$ は励起されないと考えられる。要は $Ae^{-\alpha_i x}$ の A と $-\alpha_i$ の大小関係の問題であり，f_f とその高調波のうち $Ae^{-\alpha_i x}$ が最大となるモードが最初に f_r として出現するのである。



ところで，こうして出来た $2f_f$ に対して元々の f_f は phase

が合っているので，Kelly[25]やPierrehumbertとWidnall[26]が予測したように，$2f_f$に対する1/2分数調波f_fがsubharmonic resonanceを経て現われるであろう。これがmergingとして可視化写真で観察されている。$\frac{1}{5}f_m < f_f \le \frac{1}{4}f_m$の場合にはまず$f_r$として$4f_f$が現われ，$2f_f$がsubharmonic resonanceから出現し，さらにf_fが現われる。これらのモードは元々phaseが合っているという点が重要である。しかし，$\frac{1}{4}f_m < f_f \le \frac{1}{3}f_m$の場合には，$3f_f$が$f_r$として現われるまでは他のケースと同じであるが，その後f_fが直ちに現われるのは稀であって，通常3つの渦のうち2つがmergingした後残り1つとmergingしてf_fを形成するという過程をたどる。以上の過程はごく最近数値実験によって再現された。[27,28]

ところで，$f_f/f_m=0.1$程度にf_fを低下させると，これらとは全く異なった形態のmergingが生じる。

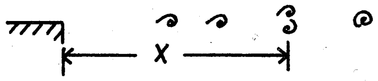


f_fでの線形増幅率はf_mのそれにくらべて十分小さいので，まずf_mが成長するが，f_mの波の中の一部に$\frac{1}{2}f_m$のモードが一度出現しかけると，それが引き金となってf_fモードが出現する。渦として観察すると初期の渦列が大きな渦に巻き込まれてゆく。そこで，この現象はcollective interactionと呼ばれている。この相互作用を生じさせるためには，f_fモードの増幅率の小さ

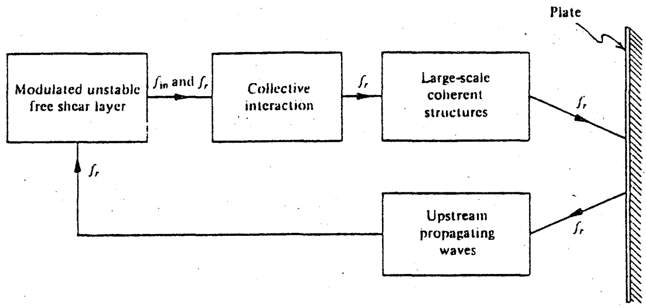
さを補なうために，f_f モードの励起を十分強くしなければならない。

6. feedback mechanism

通常空間モードを考える際，下流BCsが上流に影響を及ぼすことはないと期待している。そして幸い，これまでこの期待の反証になるような実験的結果はほとんど得られていなかった。

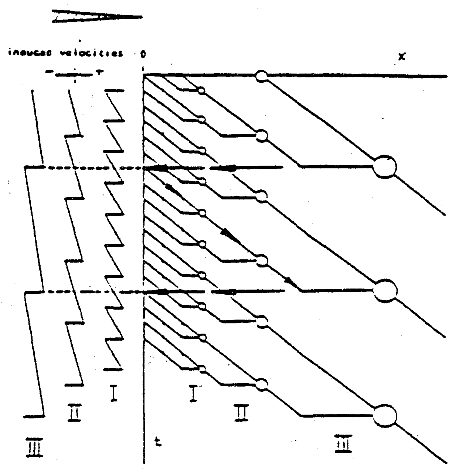
Dimotakis と Brown[29] は亜音速 shear layer では，下流のすべての構造が上流における BCs（したがって全領域における dynamics）に影響を与えることを指摘した。まず彼らは，"初期条件"（上流側BCs）は流れ場全体，とりわけ遷移過程に対し決定的な影響を及ぼすことを示した。
次に，shear layer 中の渦の merging を考える。渦が上流BCs（x=0）に及ぼす induced velocity は上流端から渦までの距離 x に逆比例して減少してゆくが，反面，渦の強度は merging の度毎にほぼ x に比例して増大するので，結局 merging の発生毎に下流の情報が上流へ伝わり，その上流BCsに対する下流情報の feed back が流れ場全体を決定すると考えたのである。このような機構は，Roshko[30] による rearward-facing step の実験においても見出すことができるし，より強い相互作用とし

て，衝突jet による self-sustained oscillation においても明確に観察される。円形jet が垂直平板に $M>0.7$ で衝突するとき，self-sustained oscillation と呼ばれる一種の共鳴が生じることが Ho と Nosseir[31] によって示された。そこでは，initial wave（ノズルエッジに生じる free shear layer の不安定モード）は collective interaction によって大きな構造を作り，その構造が垂直壁（下流BCs）に衝突する際に音波を放射し，上流BCsに影響を及ぼすので共鳴が生じるというのである。この場合にも，collective interaction の周波数に対応する線形増幅率はかなり低いので十分大きな攪乱が feedback によってノズルエッジに入らなければいけない。従って $M>0.7$ という条件が必要となる。この場合の feedback loop の模式図は Fig.12 のように書ける。



Schematic diagram of the feedback loop in an impinging jet.

Fig. 12. feed back loop の模式図



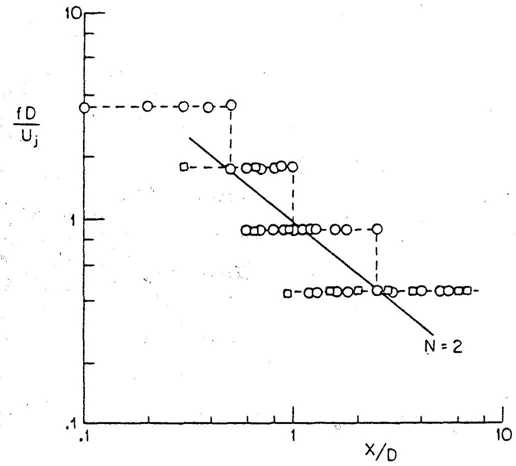
x - t diagram of an idealized pairing sequence of point vortices. The arrows show the feedback loop. For the pairings I through III the unsteady part of the induced velocity at x = 0 is plotted versus t (a positive transverse velocity is directed towards the high velocity side of the shear layer).

Fig. 13. Vortex pairing における feedback loop.

Laufer と Monkewitz[32] は jet のノズルエッジ近くの initial shear layer (free shear layer) 中

の速度変動波形を観察して、initial wave が jet column mode の変調を受けることを見出した。initial wave の波長にくらべて十分下流に出現する jet column mode の変調を受けるというこの現象は下流BCsが上流に及ぶ feedback mechanism に他ならないが、ノズルエッジにおける free shear layer の外部撹乱に対する受容性（receptivity）がこの feedback の原因と考えられることが Monkewitz[33] によって示されている。

最後に point vortices の pairing を理想化したスケッチを Fig.13 に示す。このスケッチでは、pairing が生じる毎に音波が上流BCs に feedback することを示している。従って、発生した渦が pairing 位置に到達するのに要する時間と、pairing process から発生した撹乱信号が上流BCs（ノズルエッジ）に伝播するのに要する時間の和が、subharmonic period N/f とマッチしなければならない。（f は基本波の周波数，N は自然数）従って次の式が予測される：

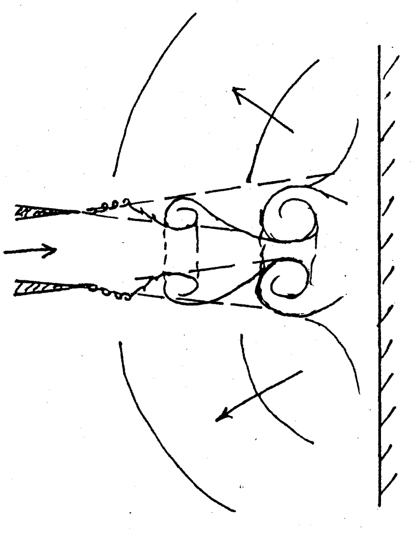


Evolution of vortex passage frequency in a forced jet (from Kibens 1980). $f_f \sim f_n$; $R = 1$. ○ measured in shear layers; □ measured on jet centerline. —— Feedback equation (Laufer & Monkewitz 1980) with $N = 2$.

Fig. 14 feedback 方程式と実験の比較

$$x_{ps}/V_c + x_{ps}/a = N/f,$$

x_{ps}：分数調波が最初に現われる位置，V_c：渦の convection velocity, a: 音速。この方程式はfeedback方程式と呼ばれている。Kibens[34]の実験結果はこの方程式ときわめて良い一致を示していることがLauferとMonkewitzによって指摘された(Fig.14)。5節ですでにふれたように, free shear layerにおいてsub-harmonic resonanceが生じるためには, phaseの合った分数調波の存在していることが必要であるが, このような分数調波はfeedback mechanismを通じてはじめて励起されるのである。



Impinging Jet

Fig.15. 衝突jetにおけるself-sustained oscillationについてのLaufer[35]のスケッチ。Collective interaction及びfeed back mechanismがこの図には集約されている。

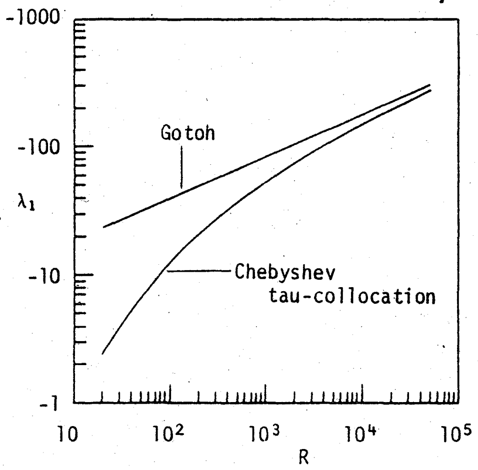
Appendix. $U=\tanh y$ の時間モードにおけるLandau定数

研究会ではふれることができなかったLandau定数についての知見をここに略述する。

Stuart[36]が1960年に流体力学方程式からはじめてLandau方程式 $dA/dt=\lambda_0 A+\lambda_1|A|^2A+\cdots$ を導いて以来, 弱非線形安定論

においてはLandau 定数λ_1の値を求めることに注意が向けられてきた。幸い free shear layer に関しては，非粘性中立状態においてLandau 定数を解析的に求めることができる。従って free shear layer の Landau定数はあらゆる shear flows の中で最初に求められた。Schade[37]は critical layer singularity を避けるために主流の変形を完全に無視し，Landau 定数として $\lambda_1=-16/3\pi$ という値を得た。後にMaslowe[38]は $20\leq R\leq 150$ での主流の変形を無視した数値計算を行い，$R\to\infty$ のときλ_1が $-16/3\pi$ に漸近することを確認している。またさらに，Benney とMaslowe[39]は nonlinear critical layer theory を用いた計算でこの値を支持している。

ところで，Stuart-Watson 理論に従った場合，critical layer singularity は viscous critical layer（内部摩擦層）を考慮に入れることによって回避しなければならない。その場合，Landau 定数は$\lambda_1=-8.177R^{1/3}[1+O(R^{-1/3})]$となり，主流の変形こそがLandau 定数にとって本質的であることがGotoh[40]によって示された。



Chebyshev tau collocation 法を用いて，中立曲線の上分枝上で $20\leq R\leq 5\times10^4$ までの広い範囲にわたってλ_1を精度良く求めた結果，右図に示すように

Gotohの結果は完全に再現された。

これに対し，Huerre[41]は viscous critical layer を考えると $\lambda_1>0$ となり，主流の変形は非線形抑制効果を打ち消すというこれまで予想されなかった結果を示した。しかし，彼の解析では Schade や Gotoh（もっといえば Stuart－Watson）の ordering とは異なった ordering がされているため，直接比較することはできない。

現時点でいえることは，Stuart－Watson 理論に基づく正しい Landau定数は高 R で Gotoh の結果に漸近するということである。

実験的にも，自由流が弱非線形段階で平衡振幅をもつ（超臨界安定）ことはほぼ確実であるから，$\lambda_1>0$ という結果は妥当性が薄いと考えられる。

本稿でふれることのできなかった話題も含めて，文献12，24，31，32，35）を参照されたい。

References

1) M.Lessen : NACA Rep. 979 (1950)
2) R.E.Esch : JFM 3 (1957) 289
3) T.Tatsumi & K.Gotoh : JFM 7 (1960) 433
4) R.Betchov & A.Szewczyk : Phys.Fluids 6 (1963) 1391
5) T.Tatsumi, K.Gotoh & K.Ayukawa : JPSJ 19 (1964) 1966
6) A.Michalke : JFM 19 (1964) 543
7) K.Gotoh : JPSJ 20 (1965) 164
8) A.Michalke : JFM 23 (1965) 521
9) P.Freymuth : JFM 25 (1966) 683
10) H.Sato : JPSJ 14 (1959) 1797
11) P.A.Monkewitz & P.Huerre : Phys.Fluids 25 (1982) 1137
12) C-M Ho & P.Huerre : Ann.Rev.Fluid Mech. 16 (1984) 365
13) D.J.Benney & S.Rosenblat : Phys.Fluids 7 (1964) 1385
14) M.Bouthier : J.Méc. 11 (1972) 599 ; 12 (1973) 75
15) M.Gaster : JFM 66 (1974) 465
16) A.H.Nayfeh, W.S.Saric & D.T.Mook : Arch.Mech.Stosow. 26 (1974) 401
17) K.Fujimura : Nagare 3 (1984) 94
18) R.Miksad : JFM 56 (1972) 695
19) M.Gaster, E.Kit & I.Wygnanski : JFM 150 (1985) 23
20) P.Plaschko & A.K.M.F.Hussain : Phys.Fluids 27 (1984) 1603
21) F.T.Smith : Proc.R.Soc.Lond. a366 (1979) 91
22) F.T.Smith : Proc.R.Soc.Lond. A368 (1979) 573
23) F.K.Browand : JFM 26 (1966) 281
24) C-M Ho & L-A Huang : JFM 119 (1982) 443
25) R.E.Kelly : JFM 27 (1967) 657
26) R.T.Pierrehumbert & S.E.Widnall : JFM 114 (1982) 59
27) R.W.Davis & E.F.Moore : Phys.Fluids 28 (1985) 1626
28) R.M.McInville, T.B.Gatski & H.A.Hasan : AIAA J. 23 (1985) 1165
29) P.Dimotakis & G.Brown : JFM 78 (1976) 535
30) A.Roshko : Phys.Fluids Suppl. 10 (1967) S181
31) C-M Ho & N.S.Nosseir : JFM 105 (1981) 119
32) J.Laufer & P.A.Monkewitz : AIAA Paper No.80-0962 (1980)
33) P.A.Monkewitz : Phys.Fluids 26 (1983) 3180
34) V.Kibens : AIAA J. 18 (1980) 434
35) J.Laufer : in Transition and Turbulence ed. by R.E.Mayer (Academic Press,1981)
36) J.T.Stuart : JFM 9 (1960) 353
37) H.Schade : Phys.Fluids 7 (1964) 623
38) S.A.Maslowe : JFM 79 (1977) 689
39) D.J.Benney & S.A.Maslowe : Studies in Appl.Math. 56 (1975) 181
40) K.Gotoh : JPSJ 24 (1968) 1137
41) P.Huerre : Philos.Trans.R.Soc.Lond. 293 (1980) 643