数理解析研究所講究録
第 573 巻 1985 年 35-41

無限階擬微分作用素の逆の構成について

近畿大理工　青木貴史（AOKI Takashi）

擬微分作用素はその表象が表象として可逆のとき，すなわち表象の函数としての逆数がまた表象となるとき可逆となる．この主張が無限階の場合も込めて成り立つことは [3] で示されたが，その論法は次のようなものであった．表象 $P(x,\xi)$ が表象として可逆とすると $P(x,\xi)=\exp p(x,\xi)$ の形にかけることにまず注意する．そしてこのような形の表象をもつ作用素 $:\exp p(x,\xi):$ はある作用素 $:q(x,\xi):$ の指数函数 $\exp:q(x,\xi):$ の形にかけることを示す．そうすれば $:P(x,\xi):=:\exp p(x,\xi):$ の逆は $\exp(-:q(x,\xi):)$ としてただちに得られる．

上の論法自体は簡単であるが具体的に逆の表象を計算するためには q の構成および $\exp(-:q:)$ の表象の計算という二段構えが必要ではじめの数項を求めようとするだけでもかなり面倒である．そこでこの小論では形式表象に対する指数法則（[3], Théorème 2.1）を用いて直接，少しでも簡単に具体的計算ができるような形で逆を構成することについてのべる．

以下の用語・記号等のうち説明のないものについては [1],[2] を参照されたい.

1. 形式表象に対する指数法則.　$X \subset \mathbb{C}^n$ を開集合, x^* を $\dot{T}^*X = T^*X - T^*_X X$ の点とする. $p = p(t;x,\xi) = \sum_{j=0}^{\infty} t^j p_j(x,\xi)$, $q = q(t;x,\xi) = \sum_{j=0}^{\infty} t^j q_j(x,\xi)$ を x^* のある錐近傍で定義された 1-0 階の形式表象とする. $(x^*, x^*) \in T^*X \times T^*X$ の近傍で定義された形式表象の列 $\{w_k\}$ $(k = 0, 1, 2, \cdots)$ を次によって定める.

(1.1) $$w_0 = p(t;x,\xi) + q(t;y,\eta),$$

(1.2) $$w_{k+1} = \frac{t}{k+1}\left(\partial_\xi \cdot \partial_y w_k + \sum_{\nu=0}^{k} \partial_\xi w_\nu \cdot \partial_y w_{k-\nu}\right).$$

このとき

(1.3) $$r = \sum_{k=0}^{\infty} w_k(t;x,x,\xi,\xi)$$

とおくと

定理 1　r は x^* の近傍で定義された 1-0 階の形式表象で $\mathcal{E}^{\mathbb{R}}_{x^*}$ において $:\exp p::\exp q: = :\exp r:$ が成り立つ.

この定理の証明のうち形式的部分はひじょうに簡単で Leibniz の法則により作用素の積を

$$:\exp p::\exp q: = :\exp(t_2 t \partial_\xi \partial_y)\exp\{p(t;x,\xi) + q(t;y,\eta)\}\Big|_{\substack{t_2=1\\ y=x\\ \eta=\xi}}:$$

とかき $\Pi = \exp(t_2 t \partial_\xi \partial_y)\exp\{p(t;x,\xi) + q(t;y,\eta)\}$ とおく. すると Π は形式的微分方程式 $\partial_{t_2}\Pi = t\partial_\xi \cdot \partial_y \Pi$, $\Pi|_{t_2=0} = \exp(p+q)$ の一意解となる. そこで $\Pi = \exp\left(\sum_{k=0}^{\infty} t_2^k w_k\right)$ の形と仮定すると

Π がこの方程式をみたすことと (1.1), (1.2) が同値であることはすぐわかり, 形式的に $:\exp p::\exp q: = :\exp \sum_{k=0}^{\infty} w_k: = :\exp r:$ が成りたつことが示された.

r の評価を得るにはもう少し詳しく w_k のつくり方を見る必要がある. その為にあらかじめ p, q の評価を書いておこう. p, q は x^* の錐的近傍 $\tilde{\Omega}$ で定義されているとする. $\Omega = U \times \Gamma$ ($U \subset X$ 開集合, $\Gamma \subset \mathbb{C}^n$ 開錐) なる形の x^* の近傍で $\Omega \subset\subset \tilde{\Omega}$ なるものを取る. このとき $0 < A_0 < 1$ なる定数 A_0 と正定数 d_0 および Γ 上定義された正値函数 Λ_0 で $\lim_{|\xi|\to\infty} \Lambda_0(\xi)/|\xi| = 0$ なるものが存在して各 j について

(1.4) $$|p_j(x, \xi)| \leq A_0^j \Lambda_0(\xi)$$

(1.5) $$|q_j(x, \xi)| \leq A_0^j \Lambda_0(\xi)$$

がすべての $(x, \xi) \in \Omega \cap \{|\xi| \geq (j+1)d_0\}$ について成り立つ.

さて, $\{w_{j\,k}^{(l)}\}$ $(0 \leq l \leq k \leq j)$ を次によって天下りに定めよう.

(1.6) $$w_{j,0}^{(0)} = p_j(x, \xi) + q_j(y, \eta),$$

(1.7) $$w_{j,k+1}^{(l)} = \frac{1}{k+1}\Big(\partial_\xi \cdot \partial_y w_{j-1,k}^{(l)} + \sum_{\mu=0}^{j-k-1} \sum_{l_1=0}^{l-1} \sum_{\nu=l_1}^{k-l+l_1+1} \partial_\xi w_{\nu+\mu,\nu}^{(l_1)} \cdot \partial_y w_{j-\nu-\mu-1,k-\nu}^{(l-l_1-1)}\Big).$$

ただし (j, k, l) が $0 \leq l \leq k \leq j$ をみたさないときは $w_{j\,k}^{(l)} = 0$ と約束する. このとき $w_k = \sum_{j=k}^{\infty} t^j \sum_{l=0}^{k} w_{j\,k}^{(l)}$ が成り立つ (こうなるように定めた). $w_{j\,k}^{(l)}$ の評価は次のようになる.

<u>補題 2</u>　ある定数 $B>0$ が存在して任意の $\Omega' \subset\subset \Omega$ に対して

(1.8)　$|w_{jk}^{(l)}(x,y,\xi,\eta)| \leq B^k (k+1)^{k-l} A_0^{j-k} \tilde{\Lambda}_0^{l+1} |\xi|^{-k} \varepsilon^{-2k}$

がすべての j, k, l について $\Omega' \times \Omega' \cap \{|\xi|, |\eta| \geq (j+1)(1-\varepsilon)^{-1} d_0\}$ で成り立つ．ただし ε は $|\xi|=1$ 上の $\partial\Omega$ と Ω' のきょり，$\tilde{\Lambda}_0 = \Lambda_0(\xi) + \Lambda_0(\eta)$．

この評価の証明は [2],[3] を参照．

<u>2. 逆の構成</u>　　定理 1 を用いて逆を構成することにより次の定理を示すのが目的である．

<u>定理 3</u>　　$P(x,\xi)$ を x^* の近傍で定義された表象とする．$1/P(x,\xi)$ がまた x^* の近傍で定義された表象となるならば表象 $P(x,\xi)$ により定まる擬微分作用素 $:P(x,\xi):$ は $\mathcal{E}_{x^*}^{\mathbb{R}}$ で可逆である．

仮定よりある 1-0 階の表象 $p(x,\xi)$ があって $P(x,\xi) = \exp p(x,\xi)$ と書けることにまず注意する．作用素 $:P(x,\xi): = :\exp p(x,\xi):$ の逆を構成しよう．定理 1 において $p(t;x,\xi) = p(x,\xi)$，すなわち $p_0(x,\xi) = p(x,\xi)$，$p_1(x,\xi) \equiv p_2(x,\xi) \equiv \cdots \equiv 0$ とすると

$$:\exp p(x,\xi)::\exp q(t;x,\xi): = :\exp r(t;x,\xi):$$

の形となる．ただし r は p, q が与えられると (1.1)〜(1.3) により構成できる．はじめの項を少し具体的に書いてみると次のようになる．ただし $r_k(t;x,\xi) = w_k(t;x,x,\xi,\xi)$ とおき変数は略記する．また，かんたんのため 1 変数の場合に書く．

$$r_0 = p + q_0 + tq_1 + t^2 q_2 + \cdots$$

$$r_1 = t\,\partial_\xi p\cdot\partial_x(q_0 + t q_1 + \cdots)$$

$$= t\,\partial_\xi p\cdot\partial_x q_0 + t^2\,\partial_\xi p\cdot\partial_x q_1 + \cdots,$$

$$r_2 = t^2\Big\{\frac{1}{2}\partial_\xi^2 p\cdot\partial_x^2(q_0 + t q_1 + \cdots)$$

$$+\frac{1}{2}\big(\partial_\xi^2 p\cdot(\partial_x(q_0 + t q_1 + \cdots))^2 + (\partial_\xi p)^2\cdot\partial_x^2(q_0 + t q_1 + \cdots)\big)\Big\}$$

$$= t^2\Big\{\frac{1}{2}\partial_\xi^2 p\cdot\partial_x^2 q_0 + \frac{1}{2}\big(\partial_\xi^2 p\cdot(\partial_x q_0)^2 + (\partial_\xi p)^2\cdot\partial_x^2 q_0\big)\Big\} + \cdots,$$

....

$r(t;x,\xi) = \sum_{k=0}^{\infty} r_k(t;x,\xi)$ ゆえ 上の式を加えて t のべきについて整理すると

$$r = p + q_0$$

$$+ t(q_1 + \partial_\xi p\cdot\partial_x q_0)$$

$$+ t^2\Big\{q_2 + \partial_\xi p\cdot\partial_x q_1 + \frac{1}{2}\big(\partial_\xi^2 p\cdot\partial_x^2 q_0$$

$$+ \partial_\xi^2 p\cdot(\partial_x q_0)^2 + (\partial_\xi p)^2\cdot\partial_x^2 q_0\big)\Big\}$$

$$+ \cdots\cdots$$

となる. ただし … は t^3 以上の項である. p, q が与えられたとして r を計算したが逆にここで $r=0$ すなわち, すべての t^j の係数を 0 とおいてみると

$$p + q_0 = 0$$

$$q_1 + \partial_\xi p\cdot\partial_x q_0 = 0$$

$$q_2 + \partial_\xi p\cdot\partial_x q_1 + \frac{1}{2}\big(\partial_\xi^2 p\cdot\partial_x^2 q_0 + \partial_\xi^2 p\cdot(\partial_x q_0)^2 + (\partial_\xi p)^2\cdot\partial_x^2 q_0\big) = 0$$

....

となり q_j を順に決めることができる:

$$q_0 = -p,$$

$$\begin{aligned} q_1 &= -\partial_\xi p \cdot \partial_x q_0 \\ &= \partial_\xi p \cdot \partial_x p, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} q_2 &= -\partial_\xi p \cdot \partial_x q_1 - \frac{1}{2}\left(\partial_\xi^2 p \cdot \partial_x^2 q_0 + \partial_\xi^2 p (\partial_x q_0)^2 + (\partial_\xi p)^2 \partial_x^2 q_0\right) \\ &= -\partial_\xi p \cdot \partial_\xi \partial_x p \cdot \partial_x p - (\partial_\xi p)^2 \cdot \partial_x^2 p \\ &\quad + \frac{1}{2}\left(\partial_\xi^2 p\, \partial_x^2 p - \partial_\xi^2 p \cdot (\partial_x p)^2 + (\partial_\xi p)^2 \cdot \partial_x^2 p\right) \\ &= \frac{1}{2}\left(\partial_\xi^2 p \cdot \partial_x^2 p - \partial_\xi^2 p \cdot (\partial_x p)^2 - (\partial_\xi p)^2 \cdot \partial_x^2 p\right) \\ &\quad - \partial_\xi p \cdot \partial_\xi \partial_x p \cdot \partial_x p, \end{aligned}$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots .$$

r の t^j の係数は必ず $q_j + (p$ と $q_0, \cdots, q_{j-1}$ できまる項$)$ の形をしているから $j \geq 3$ の場合も順に q_j は決まることに注意. さて問題はこのようにして得られた q_j からつくった $q(t; x, \xi) = \sum_{j=0}^{\infty} t^j q_j(x, \xi)$ が形式表象になるかどうかであるが, もしならないとすると補題2の評価を用いて矛盾が出ることが示せる. 従って $:P: = :\exp p:$ の右逆が得られた. 同様に左逆もつくれ, このとき両者は一致する. 具体的に数項かけば

$$\begin{aligned} (:P:)^{-1} &= (:\exp p:)^{-1} \\ &= :\exp\Big(-p + \partial_\xi p \cdot \partial_x p - \frac{1}{2}\left(\partial_\xi^2 p \cdot (\partial_x p)^2 + (\partial_\xi p)^2 \cdot \partial_x^2 p\right) \\ &\qquad - \partial_\xi p \cdot \partial_\xi \partial_x p \cdot \partial_x p + \frac{1}{2} \partial_\xi^2 p \cdot \partial_x^2 p + \cdots\Big):. \end{aligned}$$

ただし形式表象の和の順序を示すパラメータ t は略して書いた.

文献

[1] 青木貴史, 無限階擬微分作用素の表象理論, 数理研講究録 468 (1982), 1～65.

[2] ——, Calcul exponentiel des opérateurs micro-différentiels d'ordre infini, I. Ann. Inst. Fourier, Grenoble, 33-4 (1983), 227-250.

[3] ——, Calcul exponentiel des opérateurs micro-différentiels d'ordre infini, II, à paraître.