数理解析研究所講究録
第577巻 1985年 38-49

C^1 級葉層構造の存在について

東大教養 坪井俊 (Takashi TSUBOI)

$m+n$ 次元多様体 X 上の余次元 n, C^r 級 $(r \geqq 1)$ 葉層構造 $\mathcal{F}$ は次をみたす $(\{U_\lambda\}, f_\lambda, g_{\lambda\mu})$ で与えられる：

$\{U_\lambda\}$ は X の開被覆、

$f_\lambda : U_\lambda \longrightarrow R^n$ は C^∞ submersion,

$g_{\lambda\mu} : f_\mu(U_\lambda \cap U_\mu) \longrightarrow f_\lambda(U_\lambda \cap U_\mu)$ は C^r 級微分同相で、

$f_\lambda = g_{\lambda\mu} f_\mu$ を満たす。

C^r 級 $(r \geqq 1)$ 葉層構造 $\mathcal{F}$ に対して、その接束 $T\mathcal{F}$ が定まる。次の結果を得た。

定理. TX の部分束 E を与えた時、C^1 級葉層構造 $\mathcal{F}$ で、$T\mathcal{F}$ が E とホモトープであるものが存在する。

これは、C^r 級 $(r \geqq 2)$ 葉層の Bott の消滅定理 [$\mathcal{F}$ が余次元 n, C^r $(r \geqq 2)$ $\Longrightarrow$ $TX/T\mathcal{F}$ の特性類 $\in H^i(X;R)$ $(i > 2n)$ は零] と

いちじるしい対照を示している。

我々の定理は Haefliger, Mather, Thurston 達の定理により、次の定理に帰着される。(例えば[2],[4]参照。)

定理 $B\overline{\mathrm{Diff}}{}^1_c(\mathbb{R}^n)$ は acyclic である。

ここで、$G = \mathrm{Diff}^1_c(\mathbb{R}^n)$ は台がコンパクトな $\mathbb{R}^n$ の C^1 級微分同相群に C^1 位相を入れたものであり、G^δ を G に離散位相を入れたものとするとき、$B\overline{G}$ は分類空間の間の自然な写像 $B\mathrm{id}: BG^\delta \longrightarrow BG$ のホモトピーファイバーである。$B\overline{\mathrm{Diff}}{}^1_c(\mathbb{R}^n)$ は台がコンパクトな C^1 級葉層 $\mathbb{R}^n$ 積の分類空間である。

定理の証明は $G = \mathrm{Diff}^1_c(\mathbb{R}^n)$ の Denjoy-Pixton 可換部分群と C^1 級葉層 $\mathbb{R}^n$ 積のノルムがファイバー方向の相似変換で不変であることを使って $B\overline{G}$ のチェイン複体上で恒等写像と自明写像の間のチェインホモトピーを構成することによりなされる。

§1. $\mathrm{Diff}^1_c(\mathbb{R}^n)$ の可換部分群

$PG = \{f: [0,1] \longrightarrow G\ ;\ f(0) = \mathrm{id}\}$ とおく。実際に必要とされるのは、次の性質をもつ準同型 $\Phi_N: \mathbb{Z}^N \longrightarrow PG$ である。但し、N は任意の正整数をとる。

(i). $\mathbb{R}^n$ の開球 U_k $(k=1,\cdots,N)$ が存在し、$\lambda\in\mathbb{Z}^k\times\{0\}^{N-k}$ に対し、$\overline{\Phi}(\lambda)(U_k)$ は disjoint. 但し、$\overline{\Phi}(\lambda)=\Phi(\lambda)^{(1)}$.

(ii). $\lambda\in\{0\}^k\times\mathbb{Z}^{N-k}$ に対し、$\Phi(\lambda)$ の台は $\mathrm{Cl}\bigcup_{\lambda'\in\mathbb{Z}^k\times\{0\}^{N-k}}\overline{\Phi}(\lambda')(U_k)$ に含まれる。

(iii). $\lambda\in\mathbb{Z}^N$ に対し、$\overline{\Phi}(\lambda)|U_N : U_N\longrightarrow\overline{\Phi}(\lambda)(U_N)$ は smooth.

(iv). 次のような定数 C_N が存在する。任意の $\lambda\in\mathbb{Z}^N$, U_N に台をもつ任意の C^1 級ベクトル場 ξ に対し、

$$|\overline{\Phi}(\lambda)_*\xi|_1\leqq C_N|\xi|_1 .$$

但し、$|\ |_1$ は C^1-ノルム である。

注意. $n=1$、すなわち $\mathbb{R}$ 上では、Φ は Denjoy-Pixton の作用を与える。(いわゆる Denjoy flow が存在するのと同じ理由で存在する作用である。) これは C^1 級微分同相群に特有の現象である。実際、$\mathrm{Diff}^2_c(\mathbb{R})$ に対しては、$N\geqq 2$ に対して上の(i)をみたす Φ_N は存在しない (Kopell の定理)。

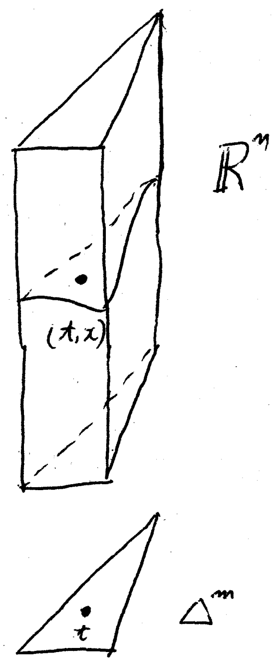
予想. $r\geqq 2$, $N\geqq n+1$ で 次のような $\Phi:\mathbb{Z}^N\longrightarrow\mathrm{Diff}^r_c(\mathbb{R}^n)$ は存在しない。$\exists$ open set U s.t. $\Phi(\lambda)(U)$, $\lambda\in\mathbb{Z}^N$ are disjoint.

さて、上のような Φ_N をつくるには、$\mathbb{R}$ 上のアフィン変換群

を、$\mathbb{R}$をコンパクト化した閉区間に、両端で各元の作用が id に ∞-tangent となるように拡張したものを使うとよいのだが、ここではこれ以上深入りしないことにする。

§2. Cubic complex.

$G = \mathrm{Diff}^1_c(\mathbb{R}^n)$ に対し、$B\overline{G}$ は次のように構成される。$S_*(G)$ を G の特異単体複体とする。G は $S_*(G)$ に右から自由に作用する。これは、特異 m 単体 $\sigma : \Delta^m \longrightarrow G$, $g \in G$ に対し、$\sigma g : \Delta^m \longrightarrow G$ を $(\sigma g)(t) = \sigma(t) g \ (t \in \Delta^m)$ とすることにより定義される。この G 作用は $S_*(G)$ の境界作用子と可換で、$S_*(G)/G$ は半単体的複体となる。$B\overline{G}$ は、これの実現 $|S_*(G)/G|$ として得られる。



$\sigma : \Delta^m \longrightarrow G$ は Δ^m 上の葉層 $\mathbb{R}^n$ 積 $\mathcal{F}_\sigma$ を定める。ここで、$\mathcal{F}_\sigma$ の $(t, x) \in \Delta^m \times \mathbb{R}^n$ を通る葉は、

$$\{(u, \sigma(u)\sigma(t)^{-1}(x))\ ;\ u \in \Delta^m\} \subset \Delta^m \times \mathbb{R}^n$$

である。σ と σg は同じ葉層積を定める。こうして、$B\overline{G}$ の m 単体と Δ^m 上の葉層 $\mathbb{R}^n$ 積 (C^1 で台が compact なもの) は 1 対 1 に対応する。あるいは、このような単体上

の葉層積を自然に貼りあわせて $B\Gamma$ が構成されている。

葉層積の台，ノルムについて述べておく。([2],[3]).

有限複体Y上の葉層 $\mathbb{R}^n$ 積 $\mathcal{F}$ の台，$\mathrm{Supp}\,\mathcal{F}$ とは $\mathbb{R}^n$ の閉集合Kで「$Y\times(\mathbb{R}^n-K)$ で葉層は積葉層，すなわち葉は水平である」ようなもののうち最小のもののことである。

$\mathrm{Diff}^1_c(\mathbb{R}^n)$ の C^∞ 多様体構造に対し，C^∞ であるような特異 m 単体 $\sigma:\Delta^m\longrightarrow \mathrm{Diff}^1_c(\mathbb{R}^n)$ を考える。対応する葉層積 $\mathcal{F}_\sigma$ のノルムは，$\sigma(u)\sigma(t)^{-1}$ の $u=t$ における接写像 $X_t: T_t\Delta^m\longrightarrow \mathfrak{X}^1_c(\mathbb{R}^n)$ ($\mathbb{R}^n$ 上の台がコンパクトな C^1 級ベクトル場のなす空間) のノルムの上限 $\sup_t \|X_t\|$ として得られる。これを $\|\mathcal{F}_\sigma\|$ 又は $\|\sigma\|$ と書く。このノルムはファイバー方向の相似変換で不変である (C^1 級だから)。

$B\Gamma$ のホモロジーは半単体的複体 $S_*(G)/G$ に付随するチェイン複体のホモロジーであるが，我々は，正規化した立方体的複体 $Q'_*(G)/G$ を使ってこれを計算する。対角線に沿って分割する写像 $Q'_*(G)/G\longrightarrow S'_*(G)/G$ が，ホモロジーで全射であることはすぐわかるので，これが自明写像となることを示すのである。さらに $\hat{Q}_*(G)/G$ というものを考える([3])。これは，singular m-cube を全順序集合 Ω の m 元部分集合 A に対して，$[0,1]^A\longrightarrow G$ となるものとして定める。($\varepsilon=0,1$, $i\in A$ に対し，$\partial_i^\varepsilon Q:[0,1]^{A-\{i\}}\longrightarrow G$ である。)

さて，$Q_j:[0,1]^A\longrightarrow G$ $(j\in J)$ 可算個の singular cube に対し

$\mathrm{Supp}\, Q_j = \mathrm{Supp}\, \mathcal{F}_{Q_j} \subset K_j$ で, K_j は interior disjoint としよう。Q_j (に対応する葉層積)を寄せあつめた葉層積 $\cup Q_j$ が考えられる。$\cup Q_j$ は $[0,1]^A \times K_j$ で $\mathcal{F}_{Q_j}$ と一致し, $[0,1]^A \times (\mathbb{R}^n - \cup K_j)$ では水平な葉をもつものである。このとき, $\|Q_j\|$ が零に収束し, $\cup K_j$ が有界ならば, $\cup Q_j$ は G の singular cube となる。

さて, 正整数 N, $i \in A$ に対し, 函数

$$\nu_i : J \times \{1, \cdots, N\} \longrightarrow \mathbb{R}$$

で $\nu_i(j,k) \geqq 0$ $\sum_{k=1}^{N} \nu_i(j,k) = 1$ をみたすものが与えられたとしよう。このとき $\kappa_i^\nu : [0,N] \times J \longrightarrow [0,1]$ を

$$\kappa_i^\nu(t,j) = \sum_{k=1}^{[t]} \nu_i(j,k) + \nu_i(j,[t]+1)\{t-[t]\}$$

で定義する。さらに, $h_j^\nu : [0,N]^A \longrightarrow [0,1]^A$ を次で定める。

$$h_j^\nu(t_{i_1}, \cdots, t_{i_a}) = (\kappa_{i_1}^\nu(t_{i_1}, j), \cdots, \kappa_{i_a}^\nu(t_{i_a}, j)).$$

$Q = \cup Q_j : [0,1]^A \longrightarrow G$ が $\mathrm{Supp}\, Q_j \subset K_j$ をみたすとき,

$$h_A^\nu Q = \cup Q_j h_j^\nu : [0,N]^A \longrightarrow Q$$

が得られる。2つの ν_i, ν_i' に対し, $h_A^\nu Q$ と $h_A^{\nu'} Q$ は homotopic で, 線型ホモトピー $h_A^{\nu\nu'} Q = \bigcup_{j \in J} Q_j h_j^{\nu\nu'}$ で結ばれる。これを $t_i = k$ ($i \in A$, $k = 1, \cdots, N-1$) で cut したものは, Q が smooth であれば, smooth となる。これを $H_A^{\nu\nu'} Q$ と書く。

とくに, $\delta_i : J \times \{1, \cdots, N\} \to \mathbb{R}$ を $\delta_i(j,1) = 1$ とする函数とすると, $h_A^\delta Q$ (を cut したもの) は Q に degenerate chain を加えたもので, $\hat{Q}_*'(G)/G$ では Q に等しい。

また，$J=\{1,\cdots,N\}$ で，$\nu_i(j,k)=1 \Longleftrightarrow j=k$ のとき $H_A^{\delta\nu}Q = PQ$ は partition と呼ばれる。このとき $h_A^{\nu}Q$ は Q を K_j に"制限したもの"と"decomposable" chain の和になる。([3]).

§3. chain の構成.

さて，smooth singular cube $Q:[0,1]^m \longrightarrow G$ に対して，それの infinite iteration となる singular cube を構成する。

§1の Ξ をとり，N を $m+1$ より十分大とし，inclusion $\mathbb{Z}^{m+1} = \mathbb{Z}^{m+1}\times 0 \subset \mathbb{Z}^N$ を固定する。Q の台は $U=U_N$ に含まれるとする。$\beta_0,\beta_1,\cdots,\beta_m$ を $\mathbb{Z}^{m+1}$ の基底とする。$\underline{m}=\{1,\cdots,m\}$ とおき，$A\subset\underline{m}$ に対し，$\beta_A=\sum_{i\in A}\beta_i$，$\gamma_A=\beta_0+\beta_A$ とおく。Λ を $\{\gamma_A;A\subset\underline{m}\}$ により生成される $\mathbb{Z}^{m+1}$ の部分半群とする。Λ は原点から出て $\{1\}\times[0,1]^m$ を通る半直線全体の和集合に含まれる整数点全体である。これの境界を考えて，$\partial_i^0\Lambda$，$\partial_i^1\Lambda$ が定義される。

Λ の元には $\{\gamma_A\}$ に対する word length が定義される。長さ l の元は $l\beta_0+\sum_{i=1}^m l_i\beta_i$ の形で $0\leqq l_i\leqq l$ であるから，$(l+1)^m$ 個存在する。

$\lambda = l\beta_0+\sum_{i=1}^m l_i\beta_i$ に対し，$g_\lambda:[0,1]^m\longrightarrow[0,1]^m$ を

$$j_\lambda(t_1,\cdots,t_m)=\left(\frac{l_1+t_1}{l+1},\ \cdots,\ \frac{l_m+t_m}{l+1}\right)$$

と定義し，$Q_\lambda=\overline{\Phi}(\lambda)Qj_\lambda$ とおく。$l\to\infty$ のとき C^1－ノルム $\|Q_\lambda\|\longrightarrow 0$ である。このことから $A\subset\underline{m}$ に対し次の singular cube が well defined となる。

$$I(\Lambda,A)Q=\bigcup_{\lambda\in\Lambda-(\partial^1_{j_1}\Lambda\cup\cdots\cup\partial^1_{j_u}\Lambda)}\partial^1_{j_1}\cdots\partial^1_{j_u}Q_\lambda:[0,1]^A\to G.$$

ここで $\{j_1,\cdots,j_u\}=\underline{m}-A$ である。$I(\Lambda,\underline{m})Q=\bigcup Q_\lambda$ である。$I'(\Lambda,A)Q=I(\Lambda,A)Q\ (A\subsetneqq\underline{m})$，$I'(\Lambda,\underline{m})Q=\bigcup_{\lambda\in\Lambda-\{0\}}Q_\lambda$ とおく。

$Cl\bigcup_{\lambda\in\Lambda}\overline{\Phi}(\lambda)(U)$ に台をもつ singular cube に対するいくつかの partition をつかう。これは Λ の分割を指定することにより定まる。P_i^ε を $\Lambda-\partial_i^\varepsilon\Lambda$ と $\partial_i^\varepsilon\Lambda$ に関する partition とする。$i\in\underline{m}-A$，$Q:[0,1]^A\longrightarrow G$ に対し，$P_i^\varepsilon Q$ は $[0,1]^{A\cup\{i\}}$ 上の chain と考えることにする。但し，

$$\partial_i^0P_i^0Q=g_i^0Q+f_i^0Q+r_i^0Q,\quad \partial_i^1P_i^0Q=Q$$
$$\partial_i^0P_i^1Q=Q\quad\quad,\quad \partial_i^1P_i^1Q=g_i^1Q+f_i^1Q+r_i^1Q$$

となるようにホモトピーの向きを定める。ここで $g_i^\varepsilon Q$, $f_i^\varepsilon Q$ は Q の $Cl\bigcup_{\lambda\in\Lambda-\partial_i^\varepsilon\Lambda}\overline{\Phi}(\lambda)(U)$, $Cl\bigcup_{\lambda\in\partial_i^\varepsilon\Lambda}\overline{\Phi}(\lambda)(U)$ への"制限"である。

$\underline{m}-A$ の disjoint subsets E, F に対し，

$$P_{E,F}Q=P_{i_1}^{\varepsilon(i_1)}\cdots P_{i_u}^{\varepsilon(i_u)}Q\quad\left(\begin{array}{l}E\cup F=\{i_1,\cdots,i_u\}\\ i_1<\cdots<i_u,\\ \varepsilon(i_j)=1\Leftrightarrow i_j\in F.\end{array}\right)$$

とおく。$\left(\partial_{E,F}=\partial_{i_1}^{\varepsilon(i_1)}\cdots\partial_{i_u}^{\varepsilon(i_u)}\right.$ としておく。$\left.\right)$

$\Phi : \mathbb{Z}^{m+1} \longrightarrow PG$ をつかった iterated homotopy を次で定義する。 $B \subset \underline{m}$, $Q : [0,1]^{\underline{m}-B} \longrightarrow G$ に対し

$$C_B Q(t_1, \cdots, t_m) = \Phi(\beta_{j_1})^{(t_{j_1})} \cdots \Phi(\beta_{j_b})^{(t_{j_b})} Q(t_{k_1}, \cdots, t_{k_u}).$$

ここで $\{j_1, \cdots, j_b\} = B$, $t_{j_1} \leqq \cdots \leqq t_{j_b}$, $\{k_1, \cdots, k_u\} = \underline{m} - B$, $k_1 < \cdots < k_u$ である。

これまでの定義をつかって、次の chain が定義される。

$$X_1 = \sum C_B P_{E,F} \partial_{E,F} I(\Lambda, \underline{m}-B) Q .$$

ここで、和は $\underline{m}$ の disjoint subsets B, E, F に対してとる。 X_5 を上の X_1 で I を I' にかえたものとする。 X_5 と X_1 の比較から定理を証明する。

$\nu_i : \Lambda \times \{1, 2\} \longrightarrow R$ を次で定義する。

$$\nu_i(l\beta_0 + \sum l_j\beta_j, 1) = \frac{l+1-l_i}{l+2}$$

$$\nu_i(l\beta_0 + \sum l_j\beta_j, 2) = \frac{l_i+1}{l+2} .$$

$Q : [0,1]^A \to G$ に対し

$SQ = H_A^{\delta\nu} Q$ とおく。 $V \subset A$ に対し $s_V Q = (h^\nu Q)\tau_V$; τ_V は $[0,2]^A$ 上の V の characteristic function $\in \{0,1\}^A$ だけの平行移動とする。 SQ は $[0,1]^{A \cup \{s\}}$ 上の chain として定義される (s は $\underline{m}$ の元より大きいとする)。

$$\partial_s^0 SQ = Q, \quad \partial_s^1 SQ = \sum_{V \subset A} s_V Q, \quad (\partial_j^0 - \partial_j^1) SQ = S(\partial_j^0 - \partial_j^1) Q \ (j \in A).$$

$\mu_i : (\Lambda - \{0\}) \times \{1, 2\} \longrightarrow \mathbb{R}$ を次で定義する

$$\mu_i(l\beta_0 + \sum l_i\beta_i, 1) = \frac{l_i}{l+1}$$

$$\mu_i(l\beta_0 + \sum l_j\beta_j, 2) = \frac{l+1-l_i}{l+1} .$$

同様に μ_i から $S'Q$ が定義される。

E, F を $\underline{m}$ の disjoint subset とするとき、P_E^F を $\Lambda - \bigcup_{i\in E}\partial_i^0\Lambda - \bigcup_{i\in F}\partial_i^1\Lambda$, $\bigcup_{i\in E}\partial_i^0\Lambda \cup \bigcup_{i\in F}\partial_i^1\Lambda$ に関する partition とする。Q が $[0,1]^A$ 上の cube のとき P_E^F は $[0,1]^{A\cup\{p\}}$ 上の chain とする。Q の $\alpha \bigcup_{\lambda\in\Lambda-\bigcup_{i\in E}\partial_i^0\Lambda-\bigcup_{i\in F}\partial_i^1\Lambda} \Phi(\lambda)(U)$ への制限を $g_E^F Q$ と書く。

X_2, X_4 を次で定める。和は disjoint subsets B, E, F, V についてとる。

$$X_2 = \sum C_B P_{E,F} S_V \partial_{E,F} I(\Lambda, \underline{m}-B) Q$$

$$X_4 = \sum C_B P_{E,F} S'_V \partial_{E,F} I'(\Lambda, \underline{m}-B) Q$$

X_2 と X_4 の関係を記述するのは次である。これは $I(\Lambda, \underline{m}-B)$ $I'(\Lambda, \underline{m}-B)$ の構成のしかたからいえる。

$$\Phi(\gamma_{B\cup V}) S_V I(\Lambda, \underline{m}-B) Q = g_{B\cup V}^{\underline{m}-B-V} S'_{\underline{m}-B-V, \underline{m}-V} I'(\Lambda, \underline{m}) Q.$$

ここで $S'_{V, V\cup W}Q = \partial_{\phi, W} S'_V Q = \partial_{W,\phi} S'_{V\cup W} Q$ である。さらに、

$$X_3 = \sum C_B P_{E,F} g_{\underline{m}-A-B-E}^{A\cup E} \partial_{E,F} S'_{A\cup E} I'(\Lambda, \underline{m}-B)$$

とおく。X_2 を $\Phi(\gamma_{B\cup V})$ たちで変換して得られるものである。

§4. 定理の証明.

上に構成した $X_1, \cdots, X_5$ に対し、次のような $Y_1(\Lambda)Q$, $\cdots$, $Y_4(\Lambda)Q$ が具体的に構成される。

$$X_{j+1} - X_j = \partial Y_j(\Lambda) Q + \sum_{\substack{i=1\\ \varepsilon=0,1}}^{m} (-1)^{i+\varepsilon} Y_j(\partial_i^\varepsilon \Lambda) \partial_i^\varepsilon Q.$$

一方 X_1, X_5 に対し、$Y_5(\Lambda)Q$ で

$$Q + X_5 - X_1 = \partial Y_5(\Lambda)Q + \sum(-1)^{i+\varepsilon} Y_5(\partial_i^\varepsilon \Lambda)\partial_i^\varepsilon Q$$

をみたすものが得られる。これより、

$$Q = \partial Y(\Lambda)Q + \sum(-1)^{i+\varepsilon} Y(\partial_i^\varepsilon \Lambda)\partial_i^\varepsilon Q$$

となる Y が得られる。これを $Q + \sum(-1)^{|F|} D_F \partial_{\phi,F} Q$ に作用させると下の Y' が得られる。ここで $D_F = D_{j_1} \cdots D_{j_k}$, $F = \{j_1, \cdots, j_k\}$ で D_{j_λ} は退化作用子である。

$$Q = \partial Y'(\Lambda)Q + \sum(-1)^i Y'(\partial_i^0 \Lambda)(\partial_i^0 Q - \partial_i^1 Q).$$

こういうものが得られると [3] で使った議論により acyclicity がいえる。($Q_*^\#(G)/G \longrightarrow S_*'(G)/G$ が自明写像とチェインホモトープになる。)

実際に上の Y_i を作るのは Y_1, Y_4 では X_1, X_5 の $C_B P_{E,F}$ の後に S あるいは S' を加えればよい。Y_2 は $\mathfrak{m}$ の disjoint subsets B, W に対し、β_0 方向を使って C_B, C_W の join を定義し、これを使って構成する。Y_3 は、$\Lambda - \partial_i^0\Lambda - \partial_i^1\Lambda$ と $\partial_i^0\Lambda \cup \partial_i^1\Lambda$ についての partition $P_i^\#$ と P_i^0, P_i^1 の比較、及び $f^V_{\mathfrak{m}-V-B}\, \sigma'_V\, I'(\Lambda, \mathfrak{m}-B)Q$ は各 $\Xi(\lambda)(V)$ 上 degenerate であることから得られる。Y_5 は $\{0\}$ と $\Lambda - \{0\}$ に関する partition を使って作られる。

これらの構成の際に問題になるのは partition の境界としてあらわれる各 $\Xi(\lambda)(V)$ 上で degenerate した r の項である。($\partial PQ + P\partial Q = Q - \sum Q$ の restriction $- rQ$). これは次の定理

により解決される。

定理. 自然数 m に対し、自然数 $N(>m)$ が定まり、Λ の任意の部分集合 Θ に対し、$Cl\bigcup_{\lambda\in\Theta}\Phi(\lambda)(U_N)$ に台をもつ $m-1$ 次元以下の任意の cycle は、$Cl\bigcup_{\lambda\in\Theta}\Phi(\lambda)(U_{m+1})$ に台をもつ chain で bound される。

この定理は、m について帰納的に、我々の方法による $m-1$ acyclic の証明を、Φ の性質 (i), (ii) により、Φ を $\bigcup_{\lambda\in\Theta}\Phi(\lambda)(U_{m+1})$ に制限したものを使って、$\bigcup_{\lambda\in\Theta}\Phi(\lambda)(U_N)$ に台をもつ chain に対してそのままあてはめれば、示される。

ここで述べた定理の周辺については次の文献を参照して下さい。

[1] 数解研講究録 479 (1983) 134-162.

[2] 論説 数学 36 (1984) 320-343.

[3] Adv. Studies in Pure Math. 5 (198).

[4] 第33回トポロジー・シンポジウム講演集 (1985) 99-110.

[5] in preparation.