数理解析研究所講究録
第 578 巻 1985 年 21-30

Jordan 代数に対する特殊関数（とくに theta 関数）について

近畿大理工　長岡昇勇　（Shoyu Nagaoka）

0. Jordan 代数に対する特殊関数は，通常の古典的な特殊関数の拡張として様々な分野に表われてきている．例としては，theta 関数，zeta 関数，超幾何関数等が挙げられる．zeta 関数については，最近，I. Satake "The functional equation of zeta distributions associated with formally real Jordan algebras" で論じられているが，原型は，Sato - Shintani による概均質ベクトル空間の zeta 関数の理論として表われてきていた．また，G. Shimura は多変数の場合の非解析的 Eisenstein 級数の Fourier 展開を研究するために，tube 領域上の超幾何関数の一般論を作った（"Confluent hypergeometric functions on tube domains"）．最後に theta 関数についてであるが，これについては，多変数の場合にも古くから研究され，代数幾何，整数論等の分野で重要な役割を果している．これらの結果を，Jordan 代数

の言葉で統一的に記述した論文として，H. L. Resnikoff の "Theta functions for Jordan algebras" Inv. Math. 31 (1975). が挙げられる．このノートでは，この論文の紹介と若干の問題点を述べてみる．

1. Jordan 代数．　まず，Jordan 代数について基本的事柄をふりかえってみる．V が実 Jordan 代数であるとは，次の2条件を満たすときをいう

(i) V は有限次実 vector 空間，$(\dim_{\mathbb{R}} V = n)$

(ii) 積 $V \times V \longrightarrow V$ (双一次的) が定義され

$$ab = ba, \quad a^2(ba) = (a^2 b)a \qquad (a, b \in V)$$

を満たす．(結合則は必ずしも仮定されない)．

以下，Jordan 代数 V は，"形式的に実"，"単純" であると仮定する．ただし，V が形式的に実とは，$a, b \in V$ について $a^2 + b^2 = 0 \Rightarrow a = b = 0$ が成り立つときをいい，単純とは，自明でないイデアルをもたないときをいう．以上を仮定すると，V は単位元 1 をもつことがわかる．さらに，$a \in V$ に対して V の一次変換 T_a を $T_a(x) = ax \quad (x \in V)$ で定義する．V の単位元 1 の原始的巾等元 $\{e_1, e_2, \cdots, e_r\}$ への分解

$$e_1 + e_2 + \cdots + e_r = 1, \quad e_i e_j = \delta_{ij} e_i, \quad (\delta_{ij} : \text{Kronecker のデルタ})$$

で極大なものを考える．すると，この個数 r は一定で，V の階数 (rank) と呼ばれている．これに対して V の一次変換

T_{e_i} の固有値は，0，$\frac{1}{2}$，1 に限ることがわかっている．そこで

$$V_{ii} = \{ v \in V \mid T_{e_i}(v) = v \},$$

$$V_{ij} = \{ v \in V \mid T_{e_i}(v) = T_{e_j}(v) = \tfrac{1}{2} v \}, \quad (i \neq j)$$

なる V の部分空間を考えると次が成立する．

$$V_{ii} = \{e_i\}_{\mathbb{R}}, \qquad \dim_{\mathbb{R}} V_{ij} = d \quad (一定)$$

さらに，Peirce 分解と呼ばれる直和分解

$$V = \bigoplus_{i \leq j} V_{ij}$$

をもつ．これから 等式 $n = r + \frac{d}{2} r(r-1)$ が成立することもわかる．

例 1. $V = \mathrm{Sym}_r(\mathbb{R})$：$r$ 次実対称行列全体の空間

V は 積 $u \circ v = \frac{1}{2}(uv + vu)$，$(u, v \in V)$ で Jordan 代数．

$$\dim_{\mathbb{R}} V = \frac{r(r+1)}{2}, \quad d = 1.$$

例 2. $V = \mathrm{Her}_r(\mathbb{C})$：$r$ 次複素 Hermite 行列全体の空間

V は 積 $u \circ v = \frac{1}{2}(uv + vu)$ で Jordan 代数となる．

$$\dim_{\mathbb{R}} V = r^2, \quad d = 2.$$

形式的実，単純 Jordan 代数は，1930 年代から Jordan，von Neumann，Wigner 達によって研究され，その分類も行なわれている．以下 結果だけを挙げるが詳しくは I. Satake "Algebraic structures of symmetric domains" を参照

分類された形式的実，単純 Jordan 代数は次の様である．

	$Sym_r(\mathbb{R})$	$Her_r(\mathbb{C})$	$Her_r(\mathbb{H})$	$J(V,S)$	$Her_3(\mathbb{O})$
階数	r	r	r	2	3
次元	$\frac{1}{2}r(r+1)$	r^2	$r(2r-1)$	r	27
自己同型群	$O(r)$	$SU(r)$	$SU_r(\mathbb{H})$	$O(r-1)$	F_4
$Z(V)$の解析的自己同型群	$Sp(2r,\mathbb{R})$	$SU(r,r)$	$SU(2r,\mathbb{H})$	$O(2,r)$	E_7

ここで $\mathbb{H}$ は Hamilton の quaternion，$\mathbb{O}$ は Cayley's octonion

$J(V,S)$ は signature $(1, n-1)$ の 2 次形式 S から得られる階数 2 の Jordan 代数．$Z(V)$ は $Z(V) = V + i\exp V \subset V \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{C}$ なる tube 領域（後出）．

2．Jordan 代数に対する theta 関数． V を 1．で述べた Jordan 代数とする．1 と異なる V の巾等元 e をとり固定しておく．この巾等元 e に対して V の Peirce 分解

$$V = V_1 + V_{\frac{1}{2}} + V_0$$

を考える．ここで V_i は固有値 i の固有空間．V の元 x を

$$x = x_1 + x_{\frac{1}{2}} + x_0 \quad , \quad (x_i \in V_i)$$

で表わしておく．各 $x \in V$ に対して quadratic representation と呼ばれる V の自己準同型 $P(x)$ を

$$P(x)y = 2x(xy) - x^2 y \quad , \quad y \in V$$

で定義する．また，$a \in V$ について

$$|a| = a \text{ の reduced norm } (= a \text{ の固有値の積})$$

$$\sigma(a) = a \text{ の reduced trace } (= a \text{ の固有値の和})$$

と定義し，$\sigma(a, b) = \sigma(ab)$ とおく．

そこで V の部分集合

$$\exp V = \{ a \in V \mid a \text{ の固有値は全て正} \}$$

を考えると，これは open convex cone となる．また，一般化された上半空間 $Z(V)$ を

$$Z(V) = V + i \exp V \subset V \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{C}$$

で定義する．ここで，$V = Sym_r(\mathbb{R})$ のときは $Z(V)$ は Siegel 上半空間，$Her_r(\mathbb{C})$ のときは Hermite 上半空間，$Her_3(\mathbb{O})$ のときは例外領域と呼ばれているものである．さらに

$$Z(V_{\frac{1}{2}}) = V_{\frac{1}{2}} \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{C}$$

とおく．また，$\mathcal{L}_{\frac{1}{2}}$ を $V_{\frac{1}{2}}$ 内の一つの lattice とする．すなわち，$V_{\frac{1}{2}}$ の $\mathbb{R}$-linear structure に関して，$V_{\frac{1}{2}}$ 内の，max. rank をもつ $\mathbb{Z}$-module とする．以上の準備のもとで theta 関数を定義していく．

<u>定義</u> $v \in \exp V_0$ とする．先に述べた巾等元 e と lattice $\mathcal{L}_{\frac{1}{2}}$ に associate する，order v の theta 関数 $\theta_{\mathcal{L}_{\frac{1}{2}}}(z_1, z_{\frac{1}{2}} ; v)$ を

$$\theta_{\mathcal{L}_{\frac{1}{2}}}(z_1, z_{\frac{1}{2}}; v) = (\mathrm{vol}\,\mathcal{L}_{\frac{1}{2}})^{\frac{1}{2}} \sum_{n\in\mathcal{L}_{\frac{1}{2}}} \exp[\pi i \sigma(P(n)z_1 + 2n z_{\frac{1}{2}}, v)],$$

$$(z_1, z_{\frac{1}{2}}) \in Z(V_1)\times Z(V_{\frac{1}{2}}),$$

で定義する．ここで，$\mathrm{vol}\,\mathcal{L}_{\frac{1}{2}}$ は．$\mathbb{R}$-線型空間 $V_{\frac{1}{2}}$ 上の Haar 測度に関する $\mathcal{L}_{\frac{1}{2}}$ の基本領域の volume.

<u>主定理</u>　$e^{\perp} = 1-e$ とする．次の関数等式が成立する．

$$\theta_{\hat{\mathcal{L}}_{\frac{1}{2}}}(-z_1^{-1}, 4z_1^{-1}(z_{\frac{1}{2}}v); v^{-1})$$

$$= |-iz_1 + e^{\perp}|^{g(V)-g(V_1)}\,|v+e|^{g(V)-g(V_0)} \exp[\pi i\sigma(P(z_{\frac{1}{2}})z_1^{-1}, v)]$$

$$\times\,\theta_{\mathcal{L}_{\frac{1}{2}}}(z_1, z_{\frac{1}{2}}; v).$$

ここで　$g(V_i) = \dim V_i/\mathrm{rank}\,V_i$．$\hat{\mathcal{L}}_{\frac{1}{2}} = \{\hat{n}\in V_{\frac{1}{2}} \mid \sigma(\hat{n}, n)\in 2\mathbb{Z}$ for all $n\in\mathcal{L}_{\frac{1}{2}}\}$.

<u>例</u>．$V = \mathrm{Sym}_r(\mathbb{R})$ のとき：

$1<k<r$ なる整数 k を固定．巾等元 e として

$$e = \begin{pmatrix} \overbrace{1 \ddots 1}^{k} & \\ & \overbrace{0 \ddots 0}^{r-k} \end{pmatrix}$$ をとる．

$$z_1 = \begin{pmatrix} \overset{k}{Z}\}k & 0 \\ 0 & 0\end{pmatrix},\quad z_{\frac{1}{2}} = \begin{pmatrix} 0 & U \\ {}^tU & 0\end{pmatrix},\quad z_0 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & V\end{pmatrix}.$$

lattice $\mathcal{L}_{\frac{1}{2}}$ を

$$\mathcal{L}_{\frac{1}{2}} = \left\{ \begin{pmatrix} 0 & N \\ {}^tN & 0 \end{pmatrix} \;\middle|\; N \in M_{k\times(r-k)}(\mathbb{Z}) \right\}$$

で定義すると

$$\theta_{\mathcal{L}_{\frac{1}{2}}}(Z_1, Z_{\frac{1}{2}}; V) = \sum_{N\in M_{k\times(r-k)}(\mathbb{Z})} e^{\pi i\, \mathrm{tr}({}^tNZNV + 2\,{}^tNUV)} .$$

ここで特に $Z_{\frac{1}{2}} = 0$ とした $\theta_{\mathcal{L}_{\frac{1}{2}}}(Z_1, 0; V)$ は theta nullwerte として知られているものである．すなわち

$$\theta(Z; V) = \sum_{N\in M_{k\times(r-k)}(\mathbb{Z})} e^{\pi i\, \mathrm{tr}({}^tNZNV)}$$

とおくと，上の主定理は，

$$\theta(-Z^{-1}; -V^{-1}) = |-iZ|^{\frac{r}{2}}\, |-iV|^{\frac{r-k}{2}}\, \theta(Z; V)$$

を主張している．特に $r=2$，$k=1$ のとき $Z=\tau$，$U=u$，$V=1$ とすれば

$$\theta(\tau, u; 1) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} e^{\pi i(n^2\tau + 2nu)} = \theta_{00}(u, \tau),$$

(Jacobi の theta関数)

主定理は

$$\theta_{00}\left(\frac{u}{\tau}, \frac{-1}{\tau}\right) = (-i\tau)^{\frac{1}{2}}\, e^{\pi i \frac{u^2}{\tau}}\, \theta_{00}(u, \tau)$$

を主張している．

主定理の証明のあらすじは，次の様である．
可積分関数 $f: V_{\frac{1}{2}} \longrightarrow \mathbb{C}$

$$f(x) = \exp[-\pi\sigma(P(x)u_1 + 2xu_{\frac{1}{2}}, v)],$$

$$u_1 \in V_1, \quad u_{\frac{1}{2}} \in V_{\frac{1}{2}}, \quad v \in V_0,$$

の Fourier 変換

$$\hat{f}(y) = \int_{V_{\frac{1}{2}}} f(x)\exp[-\pi i\,\sigma(x.y)]\,dx$$

を具体的に Jordan 代数に関して成立する公式達を使って計算し

$$\hat{f}(y) = |u_1 + e^{\perp}|^{g(V)-g(V_1)}\,|v+e|^{g(V)-g(V_0)}\exp[\pi\sigma(P(u_{\frac{1}{2}}+2iv^{-1}y)u_1^{-1}, v)]$$

を導き，後は Poisson の和公式

$$(\mathrm{vol}\,\mathcal{L}_{\frac{1}{2}})^{\frac{1}{2}}\sum_{n\in\mathcal{L}_{\frac{1}{2}}} f(n) = (\mathrm{vol}\,\hat{\mathcal{L}}_{\frac{1}{2}})^{\frac{1}{2}}\sum_{\hat{n}\in\hat{\mathcal{L}}_{\frac{1}{2}}} \hat{f}(\hat{n})$$

を使う．

3.注意．ここでは，保型関数の構成の立場から，上記の結果に対する若干の問題点を挙げてみる．古典的にも，適当な2次形式に付随する theta関数から modular形式が構成できることは知られている．Resnikoff 自身も，上記一般論の構成の後，論文 "Hermitian quadratic forms and hermitian modular forms", Pacific J. of Math. Vol. 76 において，

上記の analogy である，Hermite modular 形式の構成を行なっている．これらの事実の拡張として，前に述べた Jordan 代数の分類において，他の Jordan 代数に対応する modular 形式に対して，同様の構成が可能かどうか，ということが問題になる．これは，考えるべき Jordan 代数が，分類表の最初の3つの様に，無限系列であれば可能である．問題となるのは，残りの，$J(V,S)$，$Her_3(\mathbb{O})$ の場合である．

$J(V,S)$ に対する theta 関数については，Dorfmeister による研究がある．彼は論文 "Theta functions for the special, formally real Jordan algebras", Inv. Math. Vol. 44 において，$J(V,S)$ に対する theta 関数を考察している．そこでは，$J(V,S)$ を他の Jordan 代数，例えば $Sym_r(\mathbb{R})$ に埋めこみ，そこの theta 関数を pull back して構成している．最後は，$Her_3(\mathbb{O})$ の場合である．この場合，$Her_3(\mathbb{O})$ に対する theta 関数から例外型 modular 形式が構成できるかどうかが問題となる．これについては，上記 Resnikoff の一般論は，そのままでは適用できない．また，$Her_3(\mathbb{O})$ は，他の Jordan 代数（例えば，$Sym_r(\mathbb{R})$）への埋めこみを持たないことが知られており，これから，Dorfmeister と同様の方法も適用できないことがわかる．$Her_3(\mathbb{O})$ に対して，その theta 関数から何らかの方法で 例外型 modular 形式が

構成されることが望まれる.