数理解析研究所講究録
第 578 巻 1985 年 88-101

Kac-Moody Lie代数とtheta函数

京大数理研 大山 陽介
Ohyama, Yousuke

この稿では、Kac-Moody Lie環とその最高ウェイト表現に関するKac, Peterson等の仕事を紹介する。

1. Kac-Moody Lie環

有限次元の複素半単純Lie環はCartan行列と1対1に(同型を除いて)対応しており、Chevalley基底を用いて構成できた。Kac-Moody Lie環は、以下のように、一般化されたCartan行列を用いて同様のやり方で構成される。

定義 n次複素正方行列 $A = (a_{ij})_{1 \leq i, j \leq n}$ は次の条件を満たす時に一般化されたCartan行列(略してG.C.M.と呼ぶ)

1) $a_{ii} = 2 \qquad 1 \leq i \leq n$

ii) a_{ij} は非負整数

iii) $a_{ij}=0 \iff a_{ji}=0$

$\mathfrak{h}$ を (n + corank A) 次元複素ベクトル空間として、$\mathfrak{h}$ とその双対 $\mathfrak{h}^*$ の独立な元の組を次のようにとる

$$\mathfrak{h} \supset \Pi^\vee = \{h_1, h_2, \cdots, h_n\}$$
$$\mathfrak{h}^* \supset \Pi = \{\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n\}$$
$$\alpha_i(h_j) = a_{ij}$$

Π を root 基底、$\Pi^\vee$ を coroot 基底と呼ぶ。——

次に $\mathfrak{h}, \Pi, \Pi^\vee$ を用いて G.C.M A によって定まる Kac-Moody Lie 環 $\mathfrak{g}(A)$ を構成する。

1) $\mathfrak{g}(A)$ は $\mathfrak{h}$, $e_1, \cdots, e_n$, $f_1, \cdots, f_n$ から生成される

2) 生成元は次の関係式のみを満たす

h, h' を $\mathfrak{h}$ の勝手な元として

$$[h, h'] = 0,$$
$$[e_i, f_j] = \delta_{ij} h_i$$

$$[h, e_i] = \alpha_i(h) e_i$$
$$[h, f_i] = -\alpha_i(h) f_i$$
$$(\mathrm{ad}\, e_i)^{1-a_{ij}} f_j = (\mathrm{ad}\, f_i)^{1-a_{ij}} e_j = 0 \quad (i \neq j)$$

Kac-Moody Lie 環 $\mathfrak{g}(A)$ において

$\mathfrak{n}_+ = \{ e_i$ たちによって生成された部分代数$\}$

$\mathfrak{n}_- = \{ f_i$ 〃 $\}$

$\mathfrak{g}_\alpha(A) = \{ x \in \mathfrak{g}(A) \; ; \; [h, x] = \alpha(h) \cdot x \; ; \; {}^\forall h \in \mathfrak{h}^+ \}$

とおく時

$$\mathfrak{g}(A) = \mathfrak{n}_- \oplus \mathfrak{h} \oplus \mathfrak{n}_+ = \bigoplus_{\alpha \in \mathfrak{h}^*} \mathfrak{g}_\alpha(A)$$

という vector 空間としての直和分解を得る。このため有限次元半単純 Lie 環同様に、最高ウエイト表現が定まり、指標公式の類似が成立する。これらは後半の主題となる。

また、Weyl 群も simple root の reflection から生成されるものとして定義できるが、それは最早有限群ではなく、Weyl chamber の和も Cartan 部分代数全体に一致しない

本稿ではこれより Kac-Moody Lie 環において最も重要なクラスである affine タイプに話を限る.

affine タイプの Kac-Moody Lie 環とは、その G.C.M. A の勝手な真の principal minor がすべて正定値であって、$\det A = 0$ なる場合をいう. affine タイプの Dynkin 図形は、勝手な頂点を一つ除くと、有限次元半単純 Lie 環の Dynkin 図形になる。affine タイプの Lie 環の分類については [ ].

今の場合 $\det A = 0$, $\operatorname{corank} A = 1$ であることから、適当な整 vector δ によって $A\delta = 0$ となる。G.C.M の定義より、今の場合には δ の成分はすべて正整数に取れる. 特に、全成分に共通の因子のないもの（これを以下では δ と書く）が affine タイプでは重要な役割を示す.

また、一般の Kac-Moody Lie 環には非退化な不変双一次形式は存在しないが、affine Lie 環においては構成可能であり、Killing 形式の代用となる. 以下の議論では暗にこの事実が効いている。

"affine" Lie 環 の名前は、Weyl 群が affine 変換群の部分群 $\mathring{W} \ltimes T$ になることからきている.

2. affine Lie環の実現

affine Lie環はloop代数の中心拡大としても構成される。(物理の方ではこの形の方が普通らしい)
以下では簡単のためnon-twistedタイプ(tier数が1)のものに限定する。

$\mathfrak{g}$. 有限次元複素単純Lie環, タイプ X_ℓ
(XはA, B, C, D, E, F, Gのどれか)

$$L(\mathfrak{g}) \equiv \mathbb{C}[t, t^{-1}] \underset{\mathbb{C}}{\otimes} \mathfrak{g} \quad : \text{loop代数}$$

loop代数のブラケット積 $[\ ,\ ]_0$ は

$$[P\otimes x, Q\otimes y]_0 = PQ\otimes[x, y]$$
$$(P, Q \in \mathbb{C}[t, t^{-1}],\quad x, y \in \mathfrak{g})$$

によって定める。

$L(\mathfrak{g})$ の2-cocycle ψ を $\mathfrak{g}$ のKilling形式 $(\ |\ )$ を用いて

$$\psi(P\otimes x, Q\otimes y) \equiv \operatorname*{Res}_{t=0}\left(\frac{dP}{dt}\cdot Q\right)\cdot(x|y)$$

と定める。

この ψ による1次元中心拡大 $\tilde{L}(\mathfrak{g})$ を次のように定義する。

$$\hat{L}(\mathring{g}) = L(\mathring{g}) \oplus \mathbb{C}c$$

$L(\mathring{g})$ の bracket 積 $[\ ,\ ]$ は

$$[a + \lambda c, b + \mu c] = [a, b]_0 + \psi(a, b)c$$

$$(a, b \in L(\mathring{g})\ ;\ \lambda, \mu \in \mathbb{C})$$

と定める.

この Lie 環 $\hat{L}(\mathring{g})$ にもう一次元加えて

$$\tilde{L}(\mathring{g}) = \hat{L}(\mathring{g}) \oplus \mathbb{C}d$$

$$\left(\begin{array}{l} [d, c] = 0 \qquad [d, P \otimes x] = t\dfrac{dP}{dt} \otimes x \\ \text{と bracket 積を拡張する} \end{array} \right)$$

としたものが求める Kac-Moody Lie 代数である.

[1] の記号で $X_\ell^{(1)}$ と書く。

なお $\hat{L}(\mathring{g})$ は $X_\ell^{(1)}$ の derived algebra になる.

3 最高weight加群と指標公式

affine Lie環 $\mathfrak{g}(A)$-加群 V は、次の条件を満たす時に、最高weight $\Lambda \in \mathfrak{h}^*$ に関して最高weight加群（h. w. m.）という。

$\exists v \in V$ i) $\mathfrak{n}_+(v) = 0$

ii) $h(v) = \Lambda(h) \cdot v \quad \forall h \in \mathfrak{h}$

iii) $U(\mathfrak{n}_-) \cdot v = V$

この時、v を最高weight vectorと呼ぶ

すべての $\Lambda \in \mathfrak{h}^*$ について Λ を最高weightにもつ既約なh.w.m. $L(\Lambda)$ が存在する（同型を除いて一意）

また、$\Lambda \in \mathfrak{h}^*$ が integral dominant のとき、つまり、すべての i について $\langle \Lambda, h_i \rangle$ が非負整数になる時、$L(\Lambda)$ は局所的に巾零な表現となる。

（局所的に巾零 $\iff$ $\forall x \in \mathfrak{g}(A)$, $\forall u \in L(\Lambda)$, $\exists N$: 自然数
$x^N(u) = 0$ ）

h. w. m. V は

$$V = \bigoplus_{\lambda \in \mathfrak{h}^*} V_\lambda \quad ; \quad V_\lambda = \{ v \in V : [h, v] = \lambda(h) v \}$$

という直和分解をもち、$\dim_{\mathbb{C}} V_\lambda < \infty$ である。

さて affine Lie 環 $\mathfrak{g}(A)$ の h.w.m. の指標

$$\mathrm{ch}\, L(\Lambda) \equiv \sum_{\lambda \in \mathfrak{h}^*} (\dim V_\lambda)\, e^\lambda$$

について次の定理が成りたつ

<u>定理</u> $\Lambda \in \mathfrak{h}^*$ を integral dominant とすると次の指標公式が成立する

$$\mathrm{ch}\, L(\Lambda) = \frac{\sum_{w \in W} \det(w)\, e^{w(\rho+\Lambda)-\rho}}{\sum_{w \in W} \det(w)\, e^{w(\rho)-\rho}}$$

ここで W は $\mathfrak{g}(A)$ の Weyl 群 $\rho \in \mathfrak{h}^*$ はすべての i について $\rho(h_i) = 1$ となる元とする

$\mathrm{ch}\, L(\Lambda)$ は $\mathfrak{h}$ 上の形式的巾級数であるが実は $\mathfrak{h}$ の領域

$$Y = \{ h \in \mathfrak{h} ;\ \mathrm{Re}(\delta(h)) > 0 \}$$

において 指標公式の右辺の分子 分母はともに収束する

以下では Y において $\mathrm{ch}\, L(\Lambda)$ を theta 函数を用いて書き直す

4 theta函数と指標公式

まずtheta函数を定義する。

$\mathfrak{h}_{\mathbb{R}}$: $(l+2)$次元実vector空間 , $\mathfrak{h} = \mathfrak{h}_{\mathbb{R}} \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{C}$

$(\,|\,)$: $\mathfrak{h}_{\mathbb{R}}$上の$\mathrm{sign}(l+1,1)$の非退化双一次形式

M : $\mathfrak{h}_{\mathbb{R}}$のrank lのlatticeで

$\alpha, \beta \in M$のとき $(\alpha|\beta) \in \mathbb{Z}$ かつ

$\mathring{\mathfrak{h}}_{\mathbb{R}} \equiv M \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{R}$ 上$(\,|\,)$は正定値

δ : $\mathfrak{h}_{\mathbb{R}}$のisotropic vectorで $(\delta|M) = 0$

$Y = \{ \lambda \in \mathfrak{h} \mid \mathrm{Re}(\delta|\lambda) > 0 \}$

定義 degree mのtheata函数とは、次の性質をみたすY上の正則函数のことである

i) $F(\lambda + u\delta) = F(\lambda)$; $u \in 2\pi i \mathbb{Z}$

ii) $F(\lambda + 2\pi i \alpha) = F(\lambda)$ $\forall \alpha \in M$

iii) $F(t_\beta(\lambda)) = F(\lambda)$ $\forall \beta \in M$

ここで $t_\beta(\lambda) \equiv \lambda + (\lambda|\delta)\beta - \left\{(\lambda|\beta) + \dfrac{(\beta|\beta)(\lambda|\delta)}{2}\right\}\delta$

iv) $F(\lambda + a\delta) = e^{ma} F(\lambda)$ $\forall a \in \mathbb{C}$

degree mのtheta函数のつくるvector空間をTh_mとかく。

$$\widetilde{Th} := \bigoplus_{m \geq 0} \widetilde{Th}_m$$

以下では半空間 Y の座標を

$$Y = \{ (z, \tau, u) \; ; \; z = (z_1, \cdots, z_\ell) \in \mathbb{C}^\ell, \; \mathrm{Im}\,\tau > 0 \}$$

で表す。ここで $v_1, \cdots, v_\ell$ を $\mathring{g}_{\mathbb{R}}$ の正規直交基底、Λ_0 を $(\Lambda_0|\delta) = 1$、$(\Lambda_0|M) = 0$、$(\Lambda_0|\Lambda_0) = 0$ となる元として

$$Y \ni v = \sum_{k=1}^{\ell} z_k \cdot v_k + \tau \Lambda_0 + u\delta$$

である。

さて、Y 上の Laplacian

$$D = \frac{1}{4\pi^2}\left(2\partial_u \partial_\tau + \sum_{k=1}^{\ell} \partial_{z_k}^2 \right)$$

に対して、

$$Th_m = \{ F \in \widetilde{Th}_m \; ; \; D(F) = 0 \} \quad (m > 0)$$

$$Th_0 = \mathbb{C}$$

$$Th = \bigoplus_{m \geq 0} Th_m$$

とする。

Th の $\mathbb{C}$-基底が次のように取れる。

M^* を $(\ |\ )_{\mathring{\mathfrak{h}}_{\mathbb{R}}}$ に関する M の dual lattice, $\bar{\lambda}$ で $\lambda \in \mathfrak{h}$ の $\mathring{\mathfrak{h}}$ への直交射影を表すものとして,

$$P_m = \{\lambda \in \mathfrak{h} \ ; \ (\lambda|\delta) = m \ , \bar{\lambda} \in M^*\}$$

とおくと, 次の命題が成立する

<u>命題</u>　$\lambda \in P_m$ に対して theta 函数

$$\Theta_\lambda = e^{-\frac{(\lambda|\lambda)}{2m}\delta} \sum_{\alpha \in M} e^{t_\alpha(M)}$$

$$= e^{m\Lambda_0} \sum_{\gamma \in M + m^{-1}\bar{\lambda}} e^{-\frac{1}{2}m(\gamma|\gamma)\delta + m\gamma}$$

を定めると

$$\{\Theta_\lambda \ : \ \lambda \in P_m \ (\mathrm{mod}\ mM + \mathbb{C}\delta)\}$$

は Th_m の $\mathbb{C}$-basis になる.

上で定めた Θ_λ を用いて, 次に Jacobi の虚数変換公式を導く

$SL_2(\mathbb{R})$ の Y への作用を

$$\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} (z + \tau \Lambda_0 + u \delta)$$

$$= \frac{z}{c\tau + d} + \frac{a\tau + b}{c\tau + d} \Lambda_0 + \left(u + \frac{c(z|z)}{2(c\tau+d)} \right) \delta$$

と定めると、 $\lambda \in P_m$ に対して

$$\Theta_\lambda \left(\begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \cdot (z + \tau \Lambda_0 + u \delta) \right)$$

$$= (-i\tau)^{\frac{l}{2}} \times \left| M^* / mM \right|^{-\frac{1}{2}}$$

$$\times \sum_{\mu \in P_m \bmod (mM + \mathbb{C}\delta)} e^{-\frac{2\pi i}{m} (\bar\lambda | \bar\mu)} \Theta_\mu$$

が成り立つ。 $\{\Theta_\lambda\}_{\lambda \in P_m \bmod (mM + \mathbb{C}\delta)}$ を basis にとれば $\begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$ による変換は unitary である。実は $\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ による変換も unitary となるので、$SL_2(\mathbb{Z})$ の作用は $\widetilde{Th}_m$ 上 unitary となる。

最後に、この theta 函数を用いて指標公式を書き直す。

affine Lie 環の Weyl 群は古典 Weyl 群 $\mathring{W}$ と $\mathfrak{h}_{\mathbb{R}}$ のある lattice M のなす群との半直積 $\mathring{W} \ltimes T$ となる。$\alpha \in M$ の $\mathfrak{h}$ への作用は前に定義した。

と一致する. このことから

$$\sum_{w \in W} \det(w)\, e^{w(\rho+\Lambda)-\rho}$$

$$= e^{-\rho} \sum_{w \in \mathring{W}} \det(w) \sum_{\alpha \in M} e^{t_\alpha (w(\rho+\Lambda))}$$

$$= e^{-\rho + \frac{|\rho+\Lambda|^2}{2(g+m)}\delta} \sum_{w \in \mathring{W}} \det(w)\, \Theta_{w(\rho+\Lambda)} .$$

$$(m = (\Lambda | \delta) \quad , g = (\rho | \delta))$$

$$s_\Lambda = \frac{|\rho+\Lambda|^2}{2(g+m)} - \frac{|\rho|^2}{2g}$$

とおいて

$$e^{-s_\Lambda \delta} \cdot ch\, L(\Lambda) = \frac{\sum_{w \in W} \det(w)\, \Theta_{w(\Lambda+\rho)}}{\sum_{w \in \mathring{W}} \det(w)\, \Theta_{w(\rho)}}$$

を得る.

文　献

[1] Kac, V. Infinite dimensional Lie algebra (Birkhäuser, 1983)

[2] Kac-Peterson Infinite dimensional Lie algebras, theta functions and modular forms (Adv. Math. 53 (125～264) '84)

Kac-Moody Lie環全体については [1] を参照されたい. 本稿は主に [2] によった.