数理解析研究所講究録
第579巻 1985年 30-40

Moser type の非線型発展方程式

千葉大学工学部　河原田　秀夫 (Hideo kawarada)
千葉大学工学部　腰越　秀之 (Hideyuki koshigoe)

初期値問題

(1)　$dx/dt + F(t,x) = 0$ ，$0 \leqq t \leqq T$ ，$x(0) = x_0$

の(時間的)局所解の存在を，Newton 法によって考える。そのために，(1)を線型化した z についての線型方程式

(2)
$$dz/dt + F'(t,x)z + F(t,x) - F'(t,x)x = 0, \quad 0 \leqq t \leqq T$$
$$z(0) = x_0$$

の解についての評価が必要である。ここで，$F'(\cdot,x)$ は $F(\cdot,x)$ の x における Fréchet 微分である。

以下，次の順序で報告する。

1. 線型方程式(2)の近似解の概念と M. Altman の結果
2. Banach scale の注意
3. 線型方程式(2)の近似解の構成

1. 線型方程式(2)の近似解の概念とM.Altmanの結果

(J. Moser [2]の意味での)近似解の定義を述べる前に，若干の記号を説明する。

- Banach scale $X_0 \supset X_s \supset X_p$, $0 < s < p$
- $V_0 \equiv \{ x \in X_p \,;\, \|x - x_0\|_s < r \}$

  ここで，正数rは固定する。 $x_0 \in X_p$ とする。
- $x \in G$ とは，$x \in C^1(0,T\,;X_0) \cap C(0,T\,;V_0(\|\cdot\|_p))$ かつ，$x(0) = x_0$ である。

定義 線型方程式(2)が(Moserの意味で) degree μ の近似解をもつとは，次が成り立つことである；

$\forall K \gg 1$, $\forall Q > 1$ をとる。 このとき，

$x \in G$, $\|x\|_{\infty,p} \leqq K$

$\Longrightarrow$

$\exists\, y \in C(0,T\,;X_0)$ with $\|y\|_{\infty,0} \leqq KQ^{-\mu}$

$\exists\, z \in C^1(0,T\,;X_0) \cap C(0,T\,;X_p)$ with $\|z\|_{\infty,p} \leqq KQ$

かつ

$$dz/dt + F'(t,x)z + F(t,x) - F'(t,x)x + y = 0 \ , \ 0 \leqq t \leqq T,$$

$$z(0) = x_0$$

を満たす。ここで，μはK, Q, $x \in G$ に依らない定数である。

(注1)　線型方程式(2)を解くとき，$x \in G$ を与えても，(2)の解zは regularity loss のために，一般には，$C(0,T;X_p)$ に属さない。しかし，上の近似解の定義では，$z \in C(0,T;X_p)$ であることに注意すれば，Newton法によって，近似解列 $\{z_n\}$ を作ることができる。

(M.Altman [1] の結果)

線型方程式(2)の degree μ の近似解の存在を仮定したもとで，$F(t,x)$，$F'(t,x)$ に関するいくつかの条件及び Moser's condition

(3)　$0 < \lambda+1 < (\mu+1)/2$ ，$s/p < \lambda/(\lambda+2)$

がある。

$\Longrightarrow$　非線型方程式(1)の(時間的)局所解は存在する。

(注2)　(3)における λ は，非線型方程式(1)の近似の order に用いられる定数である。

2. Banach scale の注意

1. より，非線型方程式(1)の局所解の存在を示すには，線型方程式(2)の degree μ の近似解が構成できれば

良い。 M. Altman は, Banach scale

(4) $X_0 \supset X_{m_1} \supset X_{m_2} \supset X_s \supset X_p$, $0 < m_1 < m_2 < s < p$

および, linear smoothing operator S_θ を用いて, 近似解を作ろうとした。しかしながら, その構成には成功していない。その理由は, 次の命題である。

命題　Moser's condition (3) および 近似解を構成する時に用いる関係式

(5) $\mu = m/(p - m_2)$, $m = \min(m_1, m_2 - m_1)$

を満たす Banach scale (4) は, 存在しない。

証明.　(3), (5) を満たす Banach scale (4) が存在すると仮定する。 $\delta = m/m_2$ とおく。m のとり方から,

(6) $0 < \delta \leqq 1/2$

がわかる。 (5) より, $p/m_2 = 1 + \delta/\mu$.

これと (3), (4) とから,

$$1 + \delta/\mu = p/m_2 > p/s > (\lambda+2)/\lambda = 1 + 2/\lambda$$

を得る。したがって, $\delta/\mu > 2/\lambda$.

これに (3) を用いると

$$\delta > (2\mu)/\lambda > 2(2\lambda+1)/\lambda = 2(2 + 1/\lambda) > 4$$

となり, (6) と矛盾することがわかる。 ■

上の命題より，近似解の構成に必要な条件 (5) と非線型発展方程式 (1) の解の存在証明に必要な Moser's condition (3) を前提とする限り，$X_{m_2} \subset X_s$ と逆になる。
それ故に，我々は (3), (5) と整合する Banach scale

(7) $X_0 \supset X_{m_1} \supset X_s \supset X_{m_2} \supset X_{m_3} \supset X_p$, $0 < m_1 < s < m_2 < m_3 < p$

を inverted Banach scale と呼び，(4) のような Banach scale を normal Banach scale と呼ぶことにする。

〈例〉 inverted Banach scale の例

$\lambda = 53/10$, $\mu = 12$, $m_1 = 2$, $s = 3$, $m_2 = 4$,
$p = 25/6$, $4 < m_3 < 25/6$.

最後に，上の命題に注意して，線型方程式 (2) の近似解を構成する方法として，次の二つの方法を提案する；

(A) 条件 (3), (5) と整合する inverted Banach scale (7) を作り，このもとで，線型方程式 (2) の解 z に，次の

$$\|z\|_{\infty, m_2} \leqq C\,(1 + \|x\|_{\infty, m_3}) \quad \text{for } x \in G$$

という評価を要請する方法。

(B) normal Banach scale (4) のもとで，線型方程式 (2) に singular perturbation を導入し，次の方程式

$$dz_\eta/dt + H_\eta z_\eta + F'(t,x) z_\eta + F(t,x) - F'(t,x)x = 0 \,, \quad 0 \leqq t \leqq T,$$
$$z_\eta(0) = 0$$

の解 z_η に smoothing operator を作用させる方法． $\blacksquare$

次の章では，特に，inverted Banach scale の場合(A)に対して，線型方程式(2)の近似解が構成できることを報告する。

3. 線型方程式(2)の近似解の構成

まず，定義と仮定を述べる。

<u>定　義</u>　　inverted Banach scale (7) は，次の意味での linear operator S_θ $(\theta \geqq 1)$ をもつとする；

$$S_\theta : X_0 \longrightarrow X_p \quad ,$$

$$(8) \quad \begin{aligned} &\| (I - S_\theta) x \|_0 \leqq C \theta^{-m_1} \| x \|_{m_1} && \text{for } x \in X_{m_1} \; , \\ &\| (I - S_\theta) x \|_{m_1} \leqq C \theta^{-(m_2 - m_1)} \| x \|_{m_2} && \text{for } x \in X_{m_2} \; , \\ &\| S_\theta x \|_p \leqq C \theta^{p - m_j} \| x \|_{m_j} && \text{for } x \in X_{m_j} \, (j = 1, 2, 3) . \end{aligned}$$

ただし，C は θ, x によらない定数である。

このとき，上のような S_θ を smoothing operator と呼び，smoothing operator をもつ Banach scale を tame な Banach scale という。

（注3）　tame な Banach scale は norm に関して logarithm convex property をもつ。特に，

$$(9)\qquad \|\cdot\|_{m_3} \leqq C\|\cdot\|_s^{(p-m_3)/(p-s)}\ \|\cdot\|_p^{(m_3-s)/(p-s)}$$

が成り立つ。ここで，Cは正定数である。

次に，線型作用素$F'(t,x)$についての仮定および線型方程式(2)の解に対する仮定を述べる。

＜仮定 1＞

$$(10)\qquad \begin{aligned} &\|F'(t,x)h\|_0 \leqq L_1\|h\|_{m_1} \quad \text{for } (t,x)\in[0,T]\times V_0,\ h\in X_{m_1},\\ &\|F'(t,x)h\|_{m_1} \leqq L_1\|h\|_{m_2} \quad \text{for } (t,x)\in[0,T]\times V_0,\ h\in X_{m_2},\\ &\|F(t,x)-F'(t,x)x\|_{\infty,m_1} \leqq L_2(1+\|x\|_{\infty,m_3}) \\ &\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad \text{for } x\in G \end{aligned}$$

＜仮定 2＞　$x\in G$に対して，線型方程式(2)は，解$z\in C^1(0,T;X_{m_1})\cap C(0,T;X_{m_2})$をもち，次の評価

$$(11)\qquad \|z\|_{\infty,m_2} \leqq L_3(1+\|x\|_{\infty,m_3})$$

が成り立つ。

ただし，上の定数L_1, L_2, L_3はx, hに依らない定数である。

上の＜仮定2＞は，我々の方法において重要である。

（注4）　(9), (10), (11)から，次のことが容易に導ける；　$x\in G$，$\|x\|_{\infty,p}\leqq K$のとき，

あるα $(0<\alpha<1)$ に対して，

(10)' $\|F(t,x)-F'(t,x)x\|_{\infty,m_1} \leqq dK^{\alpha}$,

(11)' $\|z\|_{\infty,m_2} \leqq DK^{\alpha}$

が成り立つ。ここで，d，D は x，K に依らない定数である。また，$\alpha = (m_3-s)/(p-s)$.

定理　tame な inverted Banach scale (7) のもとで，仮定1，仮定2 が成り立つとする。このとき，

$$\mu = m/(p-m_2) \ , \quad m = \min(m_1, m_2-m_1)$$

とおくと，線型方程式 (2) は，degree μ の近似解をもつ。

証明. 線型方程式なので，$x_0 = 0$ と仮定しても一般性を失なわない。今，$x \in G$，$\|x\|_{\infty,p} \leqq K$ をとる。仮定2より，線型方程式 (2) は解 $\bar{z}$ をもつ。$z = S_\theta \bar{z}$ とおくとき，これが (2) の degree μ の近似解であることを以下に示そう。

(12) $\quad -y = dz/dt + F'(t,x)z + F(t,x) - F'(t,x)x$

とおく。このとき，$\bar{z}$ が (2) の解であることと S_θ の性質を用いると，

$$\|y\|_{\infty,0} = \| dz/dt + F'(t,x)z + F(t,x) - F'(t,x)x \|_{\infty,0}$$

$$\leqq \| d\bar{z}/dt + F'(t,x)\bar{z} + F(t,x) - F'(t,x)x \|_{\infty,0}$$

$$+ \| (I-S_\theta)(d\bar{z}/dt) \|_{\infty,0} + \| F'(t,x)(I-S_\theta)\bar{z} \|_{\infty,0}$$

$$= \|(I-S_\theta)(dz/dt)\|_{\infty,0} + \|F'(t,x)(I-S_\theta)z\|_{\infty,0}$$

$(\equiv I_1 + I_2$ とおく)。

仮定1，仮定2，(10)′，(11)′ を用いると

$$I_1 \leqq \|(I-S_\theta)[F'(t,x)z + F(t,x) - F'(t,x)x]\|_{\infty,0}$$
$$\leqq C\theta^{-m_1}\{\|F'(t,x)z\|_{\infty,m_1} + \|F(t,x)-F'(t,x)x\|_{\infty,m_1}\}$$
$$\leqq C\theta^{-m_1}(L_1\|z\|_{\infty,m_2} + dK^\alpha)$$
$$\leqq C\theta^{-m_1}(L_1 D + d)K^\alpha$$
$$\leqq \theta^{-m_1} K \qquad (\text{十分大きな}K\text{をとる}).$$

また，仮定1，仮定2，(11)′ を用いると

$$I_2 \leqq L_1\|(I-S_\theta)z\|_{\infty,m_1} \leqq L_1 C\theta^{-(m_2-m_1)}\|z\|_{\infty,m_2}$$
$$\leqq L_1 C D\theta^{-(m_2-m_1)}K^\alpha$$
$$\leqq \theta^{-(m_2-m_1)} K \qquad (\text{十分大きな}K\text{をとる}).$$

以上より，

(13) $\quad \|y\|_{\infty,0} \leqq \theta^{-m} K \quad , \quad m = \min(m_1, m_2-m_1)$

を得る。 同様に，仮定2，(11)′を用いると，

$$\|z\|_{\infty,p} = \|S_\theta z\|_{\infty,p} \leqq C\theta^{p-m_2}\|z\|_{\infty,m_2}$$
$$\leqq CD\theta^{p-m_2}K^\alpha$$
$$\leqq \theta^{p-m_2} K \qquad (\text{十分大きな}K\text{をとる}).$$

故に，

(14) $\quad \|z\|_{\infty,p} \leqq \theta^{p-m_2} K$

を得る。

したがって，

$$Q = \theta^{p-m_2}$$

とおくと，$Q > 1$　かつ　$\mu = m/(p-m_2)$　より，

$\theta^{-m} = Q^{-\mu}$　を得る。それ故に，これと (13), (14) より

$$\|y\|_{\infty,0} \leqq KQ^{-\mu} \quad , \quad \|z\|_{\infty,p} \leqq KQ$$

となる。しかも，(12) より

$$dz/dt + F'(t,x)z + F(t,x) - F'(t,x)x + y = 0 \quad , 0 \leqq t \leqq T,$$

$$z(0) = 0$$

が成り立つ。故に，線型方程式 (2) の近似解が構成された。

$\blacksquare$

（注5）　上の定理および Moser's condition (3) によって，非線型発展方程式 (1) の（時間的）局所解の存在がわかる（ 1. M. Altman の結果より ）。

参考文献

[1] M. Altman, Nonlinear equations of evolution in Banach spaces, Nonlinear Analysis 8, 491-499 (1984)

[2] J. Moser, A rapidly convergent iteration method and nonlinear partial differential equations I, Anaali Scu. norm. sup. Pisa 20, 265-315 (1966)

[3] H. Kawarada and H. Koshigoe, On a construction of an approximate solution of the linearized equation of Moser's type, Tech. Rep. Math. Sci. Chiba Univ. No. 5 (1985)