

## 線形計画の新解法について

埼玉大政策研 刀根 薫 (Kaoru Tone)

線形計画の新解法として登場してきた N. Karmarkar (米 AT&T, Bell 研) の方法について解説する。この方法はいわゆる多項式オーダーの解法に属する。1979 年に Khachiyan (ソ連) によって発表された最初が多項式オーダーの解法 (橢円体法) に比べてこの Karmarkar の方法 (射影法と呼ぶ) の方が理論的にも数値解法上からもはるかに優れていることは確かである。しかしそれが従来からある単体法より良いかどうかについてはまだ確定していない。本人は「単体法より 50~200 倍は速い」と言っているが方法のアウトラインを発表しただけで、プログラムを公開しないので疑問視する向も多い。目下内外で研究が進行中である。

この稿では射影法の原理について解説するとともにその後内外で行なわれている研究動向についてもふれたいと思う。

## 1. 問題の背景

線形計画法 (linear programming = LP とかく) の解法としては 1947 年に G.B. Dantzig によって発明された単体法 (simplex method) が唯一の実用的な方法として約 40 年間にわたって用いられてきた。しかしよく知られているように単体法では計算量の上限が「変数や制約式の個数の多項式オーダー」で押さえられるという保証がない。ある特定のヒポボッキング規則に対して、可能解が構成する凸多面体のすべての頂点をたどらなければ最適頂点に到着できないような例題を作ることができ、そして凸多面体の頂点の数は変数や制約式の個数に関して組合せ的に増大するからである。したがって単体法は最悪の場合、指数オーダーの解法といわざるを得ない。しかし実用上はそのようなケースが起ることはきわめて稀で、制約式 1 万個、変数 100 万個といった大型問題も許容しうる時間内で解かれている。また理論的にも、単体法の平均的な計算量に関する研究が盛んになり、とあり、S. Smale [9] をはじめとする最近の研究では平均的には多項式オーダーであることが指摘されている。しかしながら LP のような基本的な問題に対して指数オーダーの解法しかないということも計算機科学の汚臭の 1 つと見る向きもあり理論家の好目標となっている。ところが、1979 年に Khachiyan が楕円体法

[6], [2] を併表し, LP に多項式オーダーの解法が存在することをはじめて世に示した. 楕円体法は数値解法としては単体法に遠く及ばないことが判明し, したがって実用化されることは子か, たか, 理論的意義は大きく, 今回の射影法もその延長上に位置づけることもできる.

## 2. 射影法の基本 [4], [5], [12]

### 2.1 基本問題

次の問題を基本問題と呼ぶ.

$$\begin{aligned}
 \text{(P) 目的関数} \quad & z = c^T x \rightarrow \text{最小化} \\
 \text{制約条件} \quad & Ax = 0 \\
 & e^T x = 1 \\
 & x \geq 0
 \end{aligned} \tag{2.1}$$

ここに  $x \in \mathbb{R}^n$ ,  $A$  は  $(m, n)$  型定数行列,  $e^T = (1, 1, \dots, 1) \in \mathbb{R}^n$ ,  $c^T$  は定数ベクトル  $c \in \mathbb{R}^n$  の転置を表わす.

ただし基本問題は次の仮定を満足しているものとする.

仮定 1.  $z$  の最小値は 0 である.

2.  $x^{(0)} > 0$  を満足する可能解が既知である.

3.  $m \leq n$  で  $\text{rank}(A) = m$ .

次に  $D = \text{diag}(x_1^{(0)}, \dots, x_n^{(0)})$  を用いて射影変換  $T$  を定義する.

$$T: \quad x' = D^{-1}x / e^T D^{-1}x$$

$T$  の逆変換は次の通りである。

$$T^{-1} : x = Dx' / e^T Dx'$$

この変換により次の射影問題を作る。

$$(P') \quad \text{目的関数 } z' = (Dc)^T x' \rightarrow \text{最小化}$$

$$\text{制約条件 } ADx' = 0$$

$$e^T x' = 1$$

$$x' \geq 0$$

射影法の基本的な考え方は、(P) を直接解く代わりに (P') を解き、逆変換によって元の問題に戻ることにある。

## 2.2 基本問題の解法

(2.1) 式で定義された基本問題を解くために点列  $x^{(0)}, x^{(1)}, \dots, x^{(k)}, \dots$  を規則

$$x^{(k+1)} = \phi(x^{(k)})$$

により生成する。一般に入力  $a = (a_1, \dots, a_n)^T$  から出力  $b = \phi(a)$  を得る手順を次に示す。ただし  $D = \text{diag}(a_1, \dots, a_n)$ ,  $a_0 = (1/n, \dots, 1/n)^T$ ,  $r = 1/\sqrt{n(n-1)}$  とする。

### ステップ 1

$$B = \begin{bmatrix} AD \\ e^T \end{bmatrix} \quad \text{とする。}$$

### ステップ 2

$$C_p = [I - B^T(BB^T)^{-1}B]Dc \quad \text{とする。}$$

ステップ 3  $\bar{c} = C_p / |C_p|$  とする.

ステップ 4  $b' = a_0 - \alpha r \bar{c}$  とする.

ここに  $\alpha \in (0, 1)$

ステップ 5  $b = D b' / e^T D b'$  とする.

ここで以下用いた記号をまとめて記す.

$$\Omega = \{x \in \mathbb{R}^n \mid Ax = 0\} \text{ (アフィン空間)}$$

$$\Omega' = \{x' \in \mathbb{R}^n \mid ADx' = 0\} \text{ (変換されたアフィン空間)}$$

$$S = \{x \in \mathbb{R}^n \mid x \geq 0, e^T x = 1\} \text{ (単体)}$$

$$S' = \{x' \in \mathbb{R}^n \mid x' \geq 0, e^T x' = 1\} \text{ (単体)}$$

$$a_0 = (1/n, \dots, 1/n)^T \text{ (S'の重心)}$$

$$r = \sqrt{1/n(n-1)} \text{ (S'の内接球の半径)}$$

$$R = \sqrt{(n-1)/n} \text{ (S'の外接球の半径)}$$

$B(a_0, \alpha r)$ : 中心  $a_0$ , 半径  $\alpha r$  の球.  $0 < \alpha \leq 1$

$$F = \{x \in \mathbb{R}^n \mid Ax = 0, e^T x = 1, x \geq 0\} \text{ ((P)の可能領域)}$$

$$F' = \{x' \in \mathbb{R}^n \mid ADx' = 0, e^T x' = 1, x' \geq 0\} \text{ ((P')の可能領域)}$$

$$f(x) = \sum_{i=1}^n \log(c^T x / x_i) \text{ (ポテンシャル関数)}$$

$$f'(x') = \sum_{i=1}^n \log((Dc)^T x' / x'_i) - \sum_{i=1}^n \log a_i \text{ (射影変換されたポテンシャル関数)}$$

(解説) 射影法は逐次反復法であるが, 単体法と異なり内  
 点法である. 可能領域  $F$  の内点  $x^{(k)}$  から次の  $x^{(k+1)}$  に進むた  
 めに一度問題を射影変換して  $(P')$  の形にしそれをある意味で  
 最適に解いて  $F'$  内の点を求めそれを逆変換によって再び  $F$  に  
 戻し  $x^{(k+1)}$  とする. 射影変換  $\mathcal{T}$  により問題  $(P)$  は次の形にな  
 る.

$$(\text{目的関数}) \quad (Dc)^T x' / e^T D x' \rightarrow \text{最小化}$$

$$(\text{制約条件}) \quad (P') \text{ と同じ}$$

この目的関数の分子だけを考慮したものが問題  $(P')$  である.  
 そのよう置き換えをしても  $(P)$  とそれ程かけ離れないことを  
 示すことができるのである. 次に, 反復  $b = \phi(a)$  の意味  
 について述べる. 変換  $\mathcal{T}$  により入力点  $a$  は単体  $S'$  の重心  $a_0$  に  
 移る. そこで  $x' = a_0 + y$  とすると  $(P')$  は

$$(\text{目的関数}) \quad z'' = (Dc)^T y \rightarrow \text{最小化}$$

$$(\text{制約条件}) \quad A D y = 0, \quad e^T y = 0, \quad a_0 + y \geq 0$$

となる. ここでスカラー  $\lambda$  を与えて,  $y^T y = \lambda^2$  とおいて,  $y$  に  
 ついて上の問題を解くと  $y = -\lambda [I - B^T (B B^T)^{-1} B] D c$  と  
 なる. こゝに  $\lambda$  は  $y^T y = \lambda^2$  とするよう定める. ステップ 2  
 の  $C_p$  はこの逆方向であり, ステップ 3 でそれを正規化し, ステッ  
 プ 4 で  $b' = a_0 - \alpha r \bar{c}$  ( $0 < \alpha < 1$ ) とすれば,  $b'$  は  
 $(P')$  の可能領域内に止まり, 球  $B(a_0, \alpha r)$  上で  $(P')$  の目的

関数を最小化する点があることがわかる。ステップ5で  $b'$  を逆変換  $P^{-1}$  により  $F$  上に戻す。この一反復に要する計算の手間は  $O(n^3)$  である。ただし  $O(n/m) = O(1)$  とする。

### 3. 射影法の収束

射影法の一反復  $b = \phi(a)$  によって  $(P)$  の目的関数は必ずしも減少するわけではない。しかしながらポテンシャル関数  $f(x)$  は確実に減少することを示すことができる。そして  $f(x) \rightarrow -\infty$  となるので  $c^T x \rightarrow 0$  が成立することになる。

#### [定理1]

ステップ4により得られた  $b'$  は

$$(i) \quad (Dc)^T b' = 0$$

または

$$(ii) \quad f'(b') \leq f'(a_0) - \delta$$

を満足する。ここに  $\delta$  は  $\alpha$  によって決まる正定数であり、 $\alpha = 0.25$  のとき  $\delta \geq 0.1$  である。

#### [定理2]

ステップ5により得られた  $b$  は

$$(i) \quad c^T b = 0$$

または

$$(ii) \quad f(b) \leq f(a) - \delta$$

を満足する。ここに  $\delta$  は  $\alpha$  によって決まる正定数であり、

$\alpha = 0.25$  のとき  $\delta \geq 0.1$  である。

[定理3] (主定理)

射影法を初期点  $x^{(0)}$  に対して適用するとき、

$O(n(q + \log n))$  回以内の反復後に

$$(i) \quad C^T x = 0$$

または

$$(ii) \quad C^T x / C^T x^{(0)} \leq 2^{-q}$$

を満たす可能解  $x$  を見いだす。

(注: Karmarkar の原論文 [4], [5] では  $O(n(q + \log n))$  とまわっているが,  $O(nq)$  とすることもできる。[10])

(解説) 以上の結果より射影法の計算(時間)複雑度に関して次の上限を得る。

1反復の複雑度  $\dots O(n^3 q)$

反復回数<sup>の</sup>複雑度  $\dots O(nq)$

全体としての複雑度は  $O(n^4 q^2)$  とする。

ただしこの複雑度は射影法を忠実に実行する場合のそれであるので、 $D$  の変化を観察しながら rank-one update を用いることにより 1反復の複雑度を  $O(n^{2.5} q)$  に下げることができるので本当の上限は  $O(n^{3.5} q^2)$  であると Karmarkar はしている。



#### 4. 一般のLPの場合

問題(P)は非常に特殊な形のLPであったが、一般のLP

$$(LP) \quad c^T x \rightarrow \text{最小化}$$

$$\text{制約} \quad Ax \geq b, \quad x \geq 0$$

は次の手順により(P)の場合に帰着させることができる。

##### ステップ1. 主・双対問題の結合

双対変数  $u$  を導入して次の等式・不等式系を作る。

$$Ax \geq b, \quad x \geq 0$$

$$A^T u \leq c, \quad u \geq 0$$

$$c^T x - b^T u = 0$$

双対定理よりこの結合問題に可能解があるのは、(LP)が有界な最適解をもつときかつ、そのときに限る。

##### ステップ2. スラック変数の導入

$$Ax - y = b, \quad x \geq 0, \quad y \geq 0$$

$$A^T u + v = c, \quad u \geq 0, \quad v \geq 0$$

$$c^T x - b^T u = 0$$

##### ステップ3. 人為変数 $\lambda$ の導入

正の定ベクトル  $x_0, y_0, u_0, v_0$  をもとに次のLPを考える。

$$\lambda \rightarrow \text{最小化}$$

$$\text{制約} \quad Ax - y + (b - Ax_0 + y_0)\lambda = b$$

$$A^T u + v + (c - A^T u_0 - v_0)\lambda = c$$

$$c^T x - b^T u + (-c^T x_0 + b^T u_0) \lambda = 0$$

$$x \geq 0, u \geq 0, y \geq 0, v \geq 0, \lambda \geq 0$$

この問題は  $x=x_0, y=y_0, u=u_0, v=v_0, \lambda=1$  という正の可能解をもつ。ステップ2の問題が可能解をもつとき、かつそのときのみ  $\lambda$  の最適値は0となる。

ここで記号を変更して、ステップ3の問題を次のように一般的に表わす。

$$c^T x \rightarrow \text{最小化} \quad (x \in \mathbb{R}^n)$$

$$\text{制約} \quad Ax = b, x \geq 0$$

ここに  $x=a$  は既知の内点で可能解とする ( $Aa=b, a > 0$ )。目的関数の最小値は0である。

ステップ4. 正領域を単体に移す射影変換

変換  $x' = T(x), x \in \mathbb{R}^n, x' \in \mathbb{R}^{n+1}$  を次により定義する。

$$x'_i = \frac{x_i / a_i}{\sum_{j=1}^n (x_j / a_j) + 1} \quad (i=1, 2, \dots, n)$$

$$x'_{n+1} = 1 - \sum_{i=1}^n x'_i$$

また次の記号を定める： $P_+ = \{x \in \mathbb{R}^n \mid x \geq 0\}$ ,

$$\Delta = \{x \in \mathbb{R}^{n+1} \mid x \geq 0, \sum_{i=1}^{n+1} x_i = 1\}$$

そのとき  $T(x)$  は次の性質をもつ。

1.  $T$  は  $P_+$  を  $\Delta$  上に map する。
2. 対応は1対1で、逆は  $x_i = a_i x'_i / x'_{n+1}$  ( $i=1, 2, \dots, n$ )。

3.  $a$  の像は単体  $\Delta$  の重心

4.  $A$  の各行を  $A_i$  とすれば

$$\sum_{i=1}^m A_i x_i = b \rightarrow \sum_{i=1}^m a_i A_i x_i' - b x_{n+1} = 0$$

$$\rightarrow \sum_{i=1}^{n+1} A_i' x_i' = 0 \quad (\text{ここに } A_i' = a_i A_i, A_{n+1}' = -b)$$

こうして変換された空間内での同次の1次方程式系を得る.

### ステップ5. 基本問題への変形

いま  $Z = \{x \in \mathbb{R}^n \mid C^T x = 0\}$  とすれば  $\mathcal{T}$  により  $Z$  は

$$Z' = \{x' \in \mathbb{R}^{n+1} \mid C'^T x' = 0\} \quad (\text{ここに } C_i' = a_i C_i \ (i=1, \dots, n), \\ C_{n+1}' = 0)$$

に変換される. よって次の基本問題に帰着する.

$$C'^T x' \rightarrow \text{最小化}$$

$$\text{制約 } A' x' = 0, \sum_{i=1}^{n+1} x_i' = 1, x' \geq 0$$

ここで, 単体の重心は可能点である.

(解説) 上記の変形によりどの形のLPも基本問題に帰着できる. そして射影法によって解くことができる. また, 不能な場合や目的関数値が有界でない場合の判定も行うことができる. しかし上の変形は“理論的”な方法を示したもので“数値計算上”は好ましくないものではない. 問題のサイズを拡大するからである. 実際には元のLPのサイズで解くためにさまざまな工夫がなされている.

## 5. Karmarkar 以後の研究動向

Karmarkar がプログラムを公開せずに計算結果のみを宣伝するので多くの人が射影法の本当の価値について疑問をもつのも無理からぬことである。理論面での貢献は大きいとして数値計算法として単体法との比較が問題となっている。射影法をそのまま実行したのでは単体法に遠く及ばないことは実証されている。しかし多くの点で改良の余地がある。とくに、射影バクトル  $C_p$  計算の簡略化、直線探索の導入、問題の縮小化、双対問題の導入などである。また射影法に刺激されて内点法が再認識される動きも出ている。さらに、この分野の計算に並列処理の機構が利用できる可能性も開かれたと見る向きもある。

以下、Karmarkar 以後の主要な動向を記す。

### (1) Charnes et al. [1]

Karmarkar 法を忠実に実行すると 1 次収束であることを例証した。

### (2) Tomlin [11]

数値計算を行ない、通常的手段では射影法が単体法に及ばないことを示した。スパース行列の処理、悪条件問題への対応、projection matrix の計算など多くの問題点があることを指摘している。射影法を Phase I の処理に使うメリットを

示唆している。

(3) Todd et al. [10]

双対問題と双対解を導入して、射影法を従来の数値計画の枠組の中でとらえることに成功している。また一般LPへの適用法の改良、とくに目的関数の下界値の更新に新方式を提案している。計算例は多い。

(4) 伊理他 [3]

ニュートン法をLPに適用した内点法である。大域的に1次収束、局所的に超1次収束であるのが特色。射影変換などは用いない。数値例あり。

(5) 刀根 [13]

射影法に基底を導入し Reduced Gradient 法を適用する。このことにより最適基底解が得られる。射影法自体よりははるかに高速。数値例あり。

(6) 小島 [7]

射影法に Reduced Gradient 法と Conjugate Gradient 法を導入して高速化を実現した。問題の縮小化にもある程度成功している。数値例あり。

(7) Shanno [8]

Sparsity を考慮した射影法の implementation に成功している。数値例あり。

### 参考文献

- [1] A. Charnes, T. Song and M. Wolfe, "An explicit solution sequence and convergence of Karmarkar's algorithm," Research Report CCS 501, University of Texas at Austin, 1984.
- [2] 伊理正夫, "線形計画法の計算複雑度", オ1回数理計画シンポジウム論文集, 1980.
- [3] 伊理正夫, 今井浩, "A multiplicative penalty function method for linear programming", オ6回数理計画シンポジウム論文集, 1985.
- [4] N. Karmarkar, "A new polynomial-time algorithm for linear programming", Proceedings of 16th Annual ACM Symposium on Theory of Computing, Washington D.C., 1984.
- [5] N. Karmarkar, "A new polynomial time algorithm for linear programming", *Combinatorica* 4, 373-395, 1984.
- [6] L.G. Khachiyan, "A polynomial algorithm in linear programming", *Doklady Academia Nauk SSSR* 244: S 1093-1096, 1979, translated in *Soviet Mathematics Doklady* 20:1, 191-194, 1979.
- [7] 小島政和, "Karmarkar法の改良について", オ6回数理計画シンポジウム論文集, 1985.

- [8] D.F. Shanno, "Computing Karmarkar projections quickly", Working Paper 85-10, Graduate School of Administration, University of California, Davis, 1985.
- [9] S. Smale, "On the average number of steps of the simplex method of linear programming", *Mathematical Programming* 27, 241-262, 1983.
- [10] M. J. Todd and B. P. Burrell, "An extension of Karmarkar's algorithm for linear programming using dual variables", T. R. 648, Dept. of Operations Research, Cornell University, 1985.
- [11] J. A. Tomlin, "An experimental approach to Karmarkar's projective method for linear programming", Ketron, Inc., 1985.
- [12] 刀根 薫, Karmarkarの新LP解法(1), (2).  
オペレーション・リサーチ Vol. 30, No. 3, No. 4, 215-220, 271-277, 1985.
- [13] 刀根 薫, "A hybrid method for linear programming", Research Report 85-B-1, Institute for Policy Science, Saitama University, 1985. (Part Iのみ オ6回数理計画シンポジウム論文集, 1985に収録)