数理解析研究所講究録
第598巻 1986年 1-77

$U(4,2)/(U(2)\times U(2,2))$ 上の不変固有超関数の接続公式について.

東大・理　青木 茂 (Shigeru AOKI)
北里大・教養　加藤末広 (Suehiro KATO)

目次

§1．序説

1.1.　問題設定等

Gを半単純リー群，σをその包含的自己同型，Hをσの固定元全体のなすGの部分群G^σとその単位元を含む連結成分G^σ_0との間にある群とする。この時，$X = G/H$を，半単純対称空間と言う。$\mathcal{O}$をXのH-不変な開集合，$\mathbb{D}(X)$をX上のG-不変微分作用素のなす環とする時，以下の２条件を満たす$\mathcal{O}$上のSchwartz超関数Θを考察する。

i)　ΘはH-不変，

ii)　任意の$D \in \mathbb{D}(X)$に対して，　$D.\Theta = \chi(D)\Theta$　となる$\mathbb{D}(X)$の指標$\chi : \mathbb{D}(X) \longrightarrow \mathbb{C}$が存在する。

我々は，群の場合の用語を借用して，このような$\Theta \in \mathcal{D}'(\mathcal{O})$を，$\mathcal{O}$上の（infinitesimal character がχである）不変固有超関数（以下，I.E.D.と略す）と呼び，その全体を$\mathcal{D}'_{\chi,H}(\mathcal{O})$と書く。

Xが，半単純リー群（cf.［Hirai 3,4］）あるいは，そのC-双対の場合（cf.［Sano 10］）には，任意のI.E.D.は局所可積分となる。従って，低次元の部分多様体に台をもつI.E.D.は存在しない。また，この場合，$\mathbb{D}(X)$の動径部分は，本質的には，定数係数微分作用素となる。これらの事情が，群又はそのC-双対の場合のI.E.D.の研究を，一般の場合に比して，容易にしている。ところが，表題の半単純対称空間が属する

$$(\star)\qquad U(p,q)/(U(r)\times U(p-r,q))\qquad (p>r)$$

という系列では、上述の諸性質は望みがたい。実際、階数 $r=1$ の場合にすでに、上述の諸性質が一つも成立しない多くの例がある。我々の $U(4,2)/(U(2)\times U(2,2))$ にも、以下本論で見るように、この困難がつきまとう。(cf. [Aoki-Kato 1], [Faraut 2])

X' を X の半単純正則元の全体がなす H-不変な開稠密部分集合とする。任意の I. E. D. は、X' 上、実解析的関数である事が知られている。 X が群の場合に、[Hirai 4] は、I. E. D. の研究の第一歩として、次の問題を提起し、解決した。

問題　任意の X' 上の I. E. D. Θ' に対して、それが X 上の I. E. D. Θ に拡張できるための条件は何か？

本論稿では、我々は、すでに見た階数 $r=1$ の場合([Aoki-Kato 1])に引き続いて、系列 $(\star)$ の階数 $r=2$ の場合について、上の問題及びその関連事項を考察する。

我々は、[Aoki-Kato 1] と同様に、I. E. D. の研究を不変積分と、不変微分作用素の動径部分の研究を通じて行なう。 動径部分については、系列 $(\star)$ に属する半単純対称空間の場合には、[Hoogenboom 5] から、その構造がわかるので、これが大きな手がかりとなる。 不変積分については、その(正則でない)半単純元

$\mathfrak{j}_0$のまわりでの挙動を、$\mathfrak{j}_0$のcentralizerから生ずるより小さな対称空間(§2の2.2参照)の不変積分の$\mathfrak{j}_0$のまわりでの挙動に帰着させる方法を用いる。この方法を確立するために、我々は、群の場合の不変積分の研究に於いて基本的役割を果した"A Theorem of Compacity"を、半単純対称空間に拡張する。この、不変積分の研究方法は、$\mathfrak{j}_0$がsemi-regularの場合には、$\mathfrak{j}_0$のまわりでの不変積分の挙動を、階数1の半単純対称空間の不変積分の性質(cf.[Faraut 2],[Aoki-Kato 1])に帰着させる事になり、成功する。不変微分作用素の動径部分の性質と照らし合せる事により、I.E.D.の、$\mathfrak{j}_0$のXに於ける近傍での性質を調べられる。

これに反し、$\mathfrak{j}_0$がsemi-regularでない場合は、現在、この方法は必ずしも成功していない。(cf.命題5.5への注意)特に、$\mathfrak{j}_0$が原点の場合には、$\mathfrak{j}_0$のcentralizerから生ずる対称空間が、X自身になってしまうから、この方法を直接適用すると、Xの不変積分の$\mathfrak{j}_0$のまわりでの挙動をそれ自身に帰着させようとする事になり、無効である。何か他の工夫か方法が必要であると思われる。

我々が実際に求めたのは、Xから、正則でもsemi-regularでもない半単純元に関係した数個のH-orbitを除外した集合X_0(cf.§6,P.6-1)に対し、X'上のI.E.D.が$X_0(\supset X')$上のI.E.D.に拡張可能であるための必要十分条件と、その拡張の具体的な形である。

主として記述を簡潔にするために、以下に於いては、主要結果を $p=4$, $q=2$ の場合にしか与えないが、系列 (★) に属する、他の階数 $r=2$ の場合にも同様の議論が妥当する。[表題の $U(4,2)/(U(2)\times U(2,2))$ では、以下にしばしば現われる、$\mu=p+q-2r$ は、$\mu=2$ であるが、他の階数 $r=2$ の場合を考慮して、準備や途中の計算では、$\mu=2$ を代入する以前の μ を残した形を書くように努めた。尚、$U(4,2)/(U(2)\times U(2,2))$ は自己 C-双対である。] 一般に系列 (★) に属する ($r\geqq 3$ の) 半単純対称空間の場合に、本稿に於ける方法は、(少なくとも semi-regular な半単純元のまわりでの、X' 上与えられた I.E.D. の接続状況の研究に対しては) 有効である。

1.2 主要結果と予想

以下、本稿の主要結果である、$X=U(4,2)/(U(2)\times U(2,2))$ の場合に於ける、§1.1 の問題への (部分的) 解答と、それに関係した予想を述べる。記号は、§1.1で用いられなかったものについては、適宜、簡略に説明するが、詳しくは §2 以降を参照されたい。

$X=U(4,2)/(U(2)\times U(2,2))$ の Cartan 部分空間の H-共役類の完全代表系を、J_0 (コンパクト), J_1, J_2 (スプリット) とする。各 J_ℓ

$(\ell=0,1,2)$ に対して，$J_\ell' = J_\ell \cap X'$ と置くと，$X' = \bigsqcup_{\ell=0,1,2} H.J_\ell'$ となる。適当な変数 τ_1, τ_2 $(\tau_i \geqq 0)$ により，各 Cartan 部分部空は左図のように表わされる。

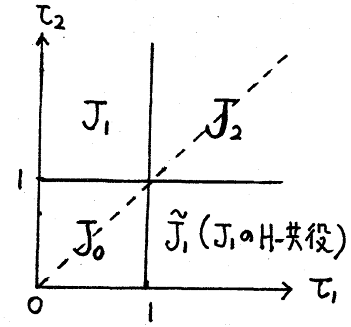


図 1

［点線 $(\tau_1=\tau_2)$ に関する対称性に注意］

$L = 4\tau(\tau-1)\frac{d^2}{d\tau^2} + 4(4\tau-1)\frac{d}{d\tau}$，

$(L-\lambda)F(\tau,\lambda) = 0$，$F(1,\lambda) = 1$ $(\lambda\in\mathbb{C})$；

L_i を L に於いて τ を τ_i で置き換えた偏微分作用素，$\omega(\tau_1,\tau_2) = \tau_1-\tau_2$ とする。Ω_1, Ω_2 を $\mathbb{D}(X)$ の生成元でその動径部分 $\mathfrak{r}(\Omega_i)$ が各 Cartan 部分空間上，$\mathfrak{r}(\Omega_1) = \omega^{-1}(L_1+L_2)\omega$，

$\mathfrak{r}(\Omega_2) = \omega^{-1}L_1L_2\,\omega$ を満たすものとする。$\chi_{\lambda_1,\lambda_2}$ $(\lambda_1,\lambda_2\in\mathbb{C})$ を $\chi_{\lambda_1,\lambda_2}(\Omega_1) = \lambda_1+\lambda_2$，$\chi_{\lambda_1,\lambda_2}(\Omega_2) = \lambda_1\lambda_2$ を満たす $\mathbb{D}(X)$ の指標とする。さらに、数の集合 Λ_d, Λ_s を $\rho=\mu+1$，$\lambda(s) = s^2-\rho^2$ とする時

$$\Lambda_d = \{\lambda(s) \mid s=\pm(\rho+2r),\ r=0,1,2,\cdots\} = \{4r(r+3) \mid r=0,1,2,\cdots\}$$

$$\Lambda_s = \{\lambda(s) \mid s=\pm(\rho+2r),\ r=-1,-2,\cdots,-\mu\} = \{4r(r+3) \mid r=-1,-2\} = \{-8\}$$

によって定義する。

<u>定理 1.1</u>　$\Theta \in \mathcal{D}'_{\chi_{\lambda_1,\lambda_2},H}(X)$ に対し，$\pi_\ell = \Theta|_{J_\ell'}$，$u_\ell = \omega\pi_\ell$ $(\ell=0,1,2)$ と置く。この時，以上の記号・情況のもとで，infinitesumal character の区別に従がい，以下の事実が成り立つ。

i) $\lambda_1 \neq \lambda_2$ (即ち $\chi_{\lambda_1,\lambda_2}$ が regular) の場合

適当な定数 $C_1, C_2, C_3, C_4 \in \mathbb{C}$ に対して.

$$
(1)\begin{cases}
u_0(\tau_1,\tau_2) = C_1 \det(F(\tau_i,\lambda_j))_{i,j=1,2} \\
u_1(\tau_1,\tau_2) = C_2 F(\tau_1,\lambda_1) F(\tau_2,\lambda_2) + C_3 F(\tau_1,\lambda_2) F(\tau_2,\lambda_1) \\
u_2(\tau_1,\tau_2) = C_4 \det(F(\tau_i,\lambda_j))_{i,j=1,2}
\end{cases}
$$

が成立する。更に(1)の C_1, C_2, C_3, C_4 に対して. 次が成立する。

(2-1) : $\lambda_1 \notin \Lambda_d$ ならば. $C_1 = C_2 = 0$

(2-2) : $\lambda_2 \notin \Lambda_d$ ならば $C_1 = C_3 = 0$

(3-1)*) : $\lambda_1 \in \Lambda_s$ ならば $C_1 = C_2 = C_3 = C_4 = 0$

(3-2)*) : $\lambda_2 \in \Lambda_s$ ならば $C_1 = C_2 = C_3 = C_4 = 0$

ii) $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda$ (即ち $\chi_{\lambda_1,\lambda_2}$ が singular) の場合

$\tilde{F}(\cdot,\lambda)$ を $(L-\lambda)\tilde{F}(\cdot,\lambda) = F(\cdot,\lambda)$ を満たす関数とする。この時.

適当な定数 $C_1, C_2, C_3, C_4 \in \mathbb{C}$ に対して.

$$
(1)\begin{cases}
u_0(\tau_1,\tau_2) = C_1\{F(\tau_1,\lambda)\tilde{F}(\tau_2,\lambda) - \tilde{F}(\tau_1,\lambda)F(\tau_2,\lambda)\} \\
u_1(\tau_1,\tau_2) = C_2 F(\tau_1,\lambda)F(\tau_2,\lambda) + C_3\{F(\tau_1,\lambda)\tilde{F}(\tau_2,\lambda) - \tilde{F}(\tau_1,\lambda)F(\tau_2,\lambda)\} \\
u_2(\tau_1,\tau_2) = C_4\{F(\tau_1,\lambda)\tilde{F}(\tau_2,\lambda) - \tilde{F}(\tau_1,\lambda)F(\tau_2,\lambda)\}
\end{cases}
$$

が成立する。更に(1)の C_1, C_2, C_3, C_4 に対して. 以下が成り立つ。

(2) : $\lambda \notin \Lambda_d$ ならば. $C_1 = C_2 = C_3 = 0$

(3)*) : $\lambda \in \Lambda_s$ ならば $C_1 = C_2 = C_3 = C_4 = 0$

註: *) i)(3-2) に於いて、$\lambda_1 \in \Lambda_s$ 即ち $\lambda_1 = -8$ から直接出る等式は $C_1 = -C_3$ $C_2 = C_4$ であるが、$\lambda_1 \in \Lambda_s$ なら $\Lambda_s \cap \Lambda_d = \phi$ より、当然 $\lambda_1 \notin \Lambda_d$ であるから、i)(2-1) より、$C_1 = C_2 = 0$ でもあるので、合わせて $C_1 = C_2 = C_3 = C_4 = 0$ となる。
同様に、i)(3-2) で $\lambda_2 \in \Lambda_s$ より直接出るのは $C_1 = C_2$, $C_3 = -C_4$ ii)(3) で $\lambda \in \Lambda_s$ より直接出るのは $C_3 = C_4$, $C_2 = 0$ である。(cf. §6、系6.7 系6.14)

<u>注意 1.2</u> 単に問題に答えるだけでなく、拡張された I.E.D. の形を具体的に示す事も大切である。本稿中で求められた I.E.D. の具体的表示に関する情報は、表 6.1 ①、② にまとめられている。

<u>注意 1.3</u> $\chi_{\lambda_1,\lambda_2}$ が "generic" な場合には、本稿で用いたのとは別種の方法により、split Cartan 部分空間 J_2 に対し、$(\mathrm{supp}\ \Theta) \cap J_2' \neq \phi$ となる $\Theta \in \mathcal{D}'_{\chi_{\lambda_1,\lambda_2},H}(X)$ の存在が知られる。この事と、上の定理[の $\lambda_1, \lambda_2 \notin \Lambda_d \cup \Lambda_s$ の場合] と合せて、定理の逆も示せる。従って、

『$\chi_{\lambda_1,\lambda_2}$ が generic な場合、$\bigsqcup_{\ell=0}^{2} J_\ell'$ 上の関数 Π に対して、$\Theta|_{\bigsqcup_{\ell=0}^{2} J_\ell'} = \Pi$ となる $\Theta \in \mathcal{D}'_{\chi_{\lambda_1,\lambda_2},H}(X)$ が存在するための必要十分条件は、$\Pi|_{J_1' \cup J_2'} \equiv 0$ かつ $\omega\Pi|_{J_0'}$ は $\det(F(\tau_i, \lambda_j))_{i,j=1,2}$ のスカラー倍となる事である。』

という事になり、この場合．問題に対する解答が得られる。（この項について．教えて下さった大島先生に感謝します。）

注意1.4　現時点で．我々は．$\chi_{\lambda_1,\lambda_2}$が generic の場合ばかりではなく、もっと一般に．定理の逆が成立する、即ち．定理中に示した条件は．$\chi_{\lambda_1,\lambda_2}$の各場合につき、$u_\ell$達（$\ell=0,1,2$）が定める$\mathcal{D}'_{\chi_{\lambda_1,\lambda_2},H}(X')$の元が X 上の I.E.D. に拡張可能であるための必要条件であるばかりでなく．十分条件でもあるのではないかと予想している。

本稿末の付録で詳しく述べる事だが、不変積分に関する．

予想：　不変積分の全体 ${}_X\tilde{\mathcal{H}} = \{F_f \mid f \in C_c^\infty(X)\}$ は．

$$\{(1-\tau_1)^{-\mu}(1-\tau_2)^{-\mu}[\varphi_0(\tau_1,\tau_2)+\eta(1-\tau_1)\varphi_1(\tau_1,\tau_2)+\eta(1-\tau_2)\varphi_1(\tau_2,\tau_1)+\eta(1-\tau_1)\eta(1-\tau_2)\varphi_2(\tau_1,\tau_2) \mid$$

$$\varphi_0,\varphi_1,\varphi_2 \in C_c^\infty([0,\infty)\times[0,\infty)),\ \varphi_0(\tau_1,\tau_2)=\varphi_0(\tau_2,\tau_1),\ \varphi_2(\tau_1,\tau_2)=\varphi_2(\tau_2,\tau_1)\}$$

と一致する。ここに．$\eta(1-\tau) = Y(1-\tau)(1-\tau)^{\mu}$ である。

が成立するとしよう。この予想は§5で調べる．semi-regular な半単純元のまわりでの不変積分の挙動と矛盾しないばかりでなく，特に．nilpotent variety $\mathcal{N}$ に於ける H-不変超関数の空間$\mathcal{D}'_H(X)$の詳しい研究を可能にする。従って．上の不変積分に関する予想が成立し．さらに付加的な技術上の仮定が成立するとした時．任意の$\chi_{\lambda_1,\lambda_2}$に対し．$\mathcal{D}'_{\chi_{\lambda_1,\lambda_2},H}(X)$は決定可能であり．（命題A.5）．その系として．定理の逆が示され、I.E.D.の次元についての簡明な公式：$\dim \mathcal{D}'_{\chi_{\lambda_1,\lambda_2},H}(X) = 2^{\#\{k \mid k=1,2;\ \lambda_k \in \Lambda_d\}}$ も示される。

§2. 準備

我々はこの節で以下で必要な事実や記号について簡単にまとめておく。p, q, r を $r \leqq p$ を満たす負でない整数とし, $G = U(p,q)$, $H = U(r) \times U(p-r,q)$ とする。序説で触れたようにこの報告では以下 $p=4$, $q=r=2$ と仮定し, $X = G/H = U(4,2)/(U(2) \times U(2,2))$ とおく。またGのLie環を $\mathfrak{g}$ とする。

2.1. 一般的事項について.

Gの包合的自己同型 σ を

$$\sigma(g) = I_{2,4}\, g\, I_{2,4} \qquad (g \in G)$$

により定義する。但し, $I_{2,4} = \begin{pmatrix} E_2 & 0 \\ 0 & -E_4 \end{pmatrix}$ とする。すぐに分かるように $H = \{g \in G \,;\, \sigma(g) = g\}$。次に σ で安定な極大コンパクト部分群 K をとり, 対応する Cartan involution を θ [e.g. $\theta(g) = {}^t g^{-1}$ $(g \in G)$] とする。σ, θ は $\mathfrak{g}$ の自己同型, あるいは $\mathfrak{g}$ の複素化 $\mathfrak{g}_{\mathbb{C}}$ の複素線型な自己同型を引き起こすが, これも σ, θ と書き, それらによる $\mathfrak{g}$ の固有分解を $\mathfrak{g} = \mathfrak{h} + \mathfrak{q} = \mathfrak{k} + \mathfrak{p}$ とする。σ と θ は可換であり, $\mathfrak{h}, \mathfrak{k}$ はそれぞれ H, K の Lie 環になる。

$\mathfrak{j}$ を $\mathfrak{q}$ の半単純元達から成る極大可換部分空間とする。$\mathfrak{j}$ は X の Cartan 部分空間と呼ばれる。容易に分かるように,

Cartan 部分空間の H- 共役 class の完全代表系として次のようなもの $\{\mathfrak{j}_0, \mathfrak{j}_1, \mathfrak{j}_2\}$ を取ることができる：

$$\mathfrak{j}_0 = \left\{ {}_0\underline{\mathfrak{j}}_{\theta_1,\theta_2} = \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} \overbrace{\quad}^{2} & \overbrace{\quad\quad}^{2} & \overbrace{\quad}^{2} \end{array} \\ \left(\begin{array}{c|c|c} 0 & \begin{smallmatrix} & -\theta_2 \\ -\theta_1 & \end{smallmatrix} & 0 \\ \hline \begin{smallmatrix} & \theta_1 \\ \theta_2 & \end{smallmatrix} & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \begin{array}{l} \}2 \\ \}2 \\ \}2 \end{array} \end{array} ;\ \theta_i \in \mathbb{R} \right\}$$

$$(2.1) \qquad \mathfrak{j}_1 = \left\{ {}_1\underline{\mathfrak{j}}_{\theta_1,t_2} = \left(\begin{array}{c|c|c} 0 & \begin{smallmatrix} & 0 \\ -\theta_1 & \end{smallmatrix} & \begin{smallmatrix} & t_2 \\ 0 & \end{smallmatrix} \\ \hline \begin{smallmatrix} & \theta_1 \\ 0 & \end{smallmatrix} & 0 & 0 \\ \hline \begin{smallmatrix} & 0 \\ t_2 & \end{smallmatrix} & 0 & 0 \end{array}\right) ;\ \theta_1, t_2 \in \mathbb{R} \right\}$$

$$\mathfrak{j}_2 = \left\{ {}_2\underline{\mathfrak{j}}_{t_1,t_2} = \left(\begin{array}{c|c|c} 0 & 0 & \begin{smallmatrix} & t_2 \\ t_1 & \end{smallmatrix} \\ \hline 0 & 0 & 0 \\ \hline \begin{smallmatrix} & t_1 \\ t_2 & \end{smallmatrix} & 0 & 0 \end{array}\right) ;\ t_i \in \mathbb{R} \right\}.$$

よく知られているように，一般に Cartan 部分空間 $\mathfrak{j}$ の次元は $\mathfrak{j}$ に依らず一定であるが，これを X の rank と呼び rank X で表わす。　我々の場合 (2.1) から分かるように rank $X = 2$ である。　次に $J_\ell = \exp \mathfrak{j}_\ell H\ [\subset X]$ とおこう $(\ell = 0, 1, 2)$。J_ℓ は群における Cartan 部分群に類似の役割を演ずる。また G の各元 ${}_0\mathfrak{j}_{\theta_1,\theta_2}$，${}_1\mathfrak{j}_{\theta_1,t_2}$，${}_2\mathfrak{j}_{t_1,t_2}$ をそれぞれ $\exp {}_0\underline{\mathfrak{j}}_{\theta_1,\theta_2}$ $\exp {}_1\underline{\mathfrak{j}}_{\theta_1,t_2}$，$\exp {}_2\underline{\mathfrak{j}}_{t_1,t_2}$ により定義する。　そのとき簡単な計算により次のことが成り立つ。（但し，式の中に現われる $\pm$ は別に複号同順を意味しない。）

$$(2.2) \left\{ {}_0\mathfrak{j}_{\theta_1,\theta_2} H = {}_0\mathfrak{j}_{\theta_1',\theta_2'} H \iff \theta_i \equiv \theta_i' \pmod{\pi} \right.$$

$$H\,{}_0j_{\theta_1,\theta_2}H = H\,{}_0j_{\theta_1',\theta_2'}H \Leftrightarrow \begin{cases} (\theta_1 \equiv \pm\theta_1' \text{ かつ } \theta_2 \equiv \pm\theta_2') \\ \qquad \text{または} \\ (\theta_1 \equiv \pm\theta_2' \text{ かつ } \theta_2 \equiv \pm\theta_1') \end{cases} (\mathrm{mod}\,\pi)$$

$$(2.3)\quad \begin{cases} {}_1j_{\theta_1,t_2}H = {}_1j_{\theta_1',t_2'}H \Leftrightarrow \theta_1 \equiv \theta_1' \ (\mathrm{mod}\,\pi) \text{ かつ } t_2 = t_2' \\ H\,{}_1j_{\theta_1,t_2}H = {}_1j_{\theta_1',t_2'}H \Leftrightarrow \theta_1 \equiv \pm\theta_1' \ (\mathrm{mod}\,\pi) \text{ かつ } t_2 = \pm t_2' \end{cases}$$

$$(2.4)\quad \begin{cases} {}_2j_{t_1,t_2}H = {}_2j_{t_1',t_2'}H \Leftrightarrow t_1 = t_1',\ t_2 = t_2' \\ H\,{}_2j_{t_1,t_2}H = H\,{}_2j_{t_1',t_2'}H \Leftrightarrow \begin{cases} (t_1 = \pm t_1' \text{ かつ } t_2 = \pm t_2') \\ \qquad \text{または} \\ (t_1 = \pm t_2' \text{ かつ } t_2 = \pm t_1'). \end{cases} \end{cases}$$

なお我々は以下しばしば Cartan 部分空間

$$(2.5)\qquad \tilde{\mathfrak{j}}_1 = \left\{ {}_1\tilde{\underline{j}}_{t_1,\theta_2} = \left(\begin{array}{c|c|c} 0 & {}_0{}^{-\theta_2} & {}_{t_1}{}^{0} \\ \hline {}_{\theta_2}{}^{0} & 0 & 0 \\ \hline {}_0{}^{t_1} & 0 & 0 \end{array}\right) ;\ t_1,\theta_2 \in \mathbb{R} \right\}$$

を取り扱う。　前と同様，$\tilde{J}_1 = \exp\tilde{\mathfrak{j}}_1 H$，${}_1\tilde{j}_{t,\theta} = \exp {}_1\tilde{\underline{j}}_{t,\theta}$ とおけば，$H\tilde{J}_1 = HJ_1$，あるいはより詳しく ${}_1\tilde{j}_{t,\theta} = h_0\,{}_1j_{\theta,t}\,h_0$ が成り立ち，$\tilde{\mathfrak{j}}_1$ は $\mathfrak{j}_1$ と H-共役であることが分かる。但し，

$$h_0 = \left(\begin{array}{c|c|c} \begin{smallmatrix} & 1 \\ 1 & \end{smallmatrix} & & \\ \hline & \begin{smallmatrix} & 1 \\ 1 & \end{smallmatrix} & \\ \hline & & \begin{smallmatrix} & 1 \\ 1 & \end{smallmatrix} \end{array}\right) \in H$$

とおいた。

$\mathfrak{j}$ を X の Cartan 部分空間，$\mathfrak{j}_c$ をその複素化，また $\mathfrak{j}^*$ を $\mathfrak{j}$ の双対空間，$\mathfrak{j}_c^*$ をその複素化とする。　$\lambda \in \mathfrak{j}_c^*$ に対し，

$$\mathfrak{g}_c(\mathfrak{j},\lambda) = \{X \in \mathfrak{g}_c ;\ [\underline{j}, X] = \lambda(\underline{j})X \quad (\underline{j} \in \mathfrak{j})\}$$

とおき，さらに $\mathfrak{g}(\mathfrak{j},\lambda) = \mathfrak{g}_c(\mathfrak{j},\lambda) \cap \mathfrak{g}$，$\Sigma(\mathfrak{j}) = \{\lambda \in \mathfrak{j}_c^* - \{0\} ;\ \mathfrak{g}_c(\mathfrak{j},\lambda) \neq \{0\}\}$ とする。　そのとき $\Sigma(\mathfrak{j})$ はルート系の公理

を満たすことが知られている。 実際 $\mathfrak{j}_c^*$ の元 α_1, α_2 を

(i) $\alpha_i({}_0\mathfrak{j}_{\theta_1,\theta_2}) = \theta_i \quad (i=1,2)$ （$\mathfrak{j} = \mathfrak{j}_0$ の場合）

(ii) $\alpha_1({}_1\mathfrak{j}_{\theta_1,t_2}) = \theta_1$
$\alpha_2({}_1\mathfrak{j}_{\theta_1,t_2}) = t_2$ （$\mathfrak{j} = \mathfrak{j}_1$ の場合）

(iii) $\alpha_i(\mathfrak{j}_{t_1,t_2}) = t_i \quad (i=1,2)$ （$\mathfrak{j} = \mathfrak{j}_2$ の場合）

と定義すると, $\Sigma(\mathfrak{j}) = \{\pm\alpha_1, \pm\alpha_2, \pm 2\alpha_1, \pm 2\alpha_2, \pm(\alpha_1 \pm \alpha_2)\}$ が成立することが分かる。 特に $\Sigma(\mathfrak{j})$ は BC 型 $\circ\!\Longrightarrow\!\circ$ になる。

ここでルートの分類について復習しておこう。 $\alpha \in \Sigma(\mathfrak{j})$ が real [imaginary] とは任意の $\underline{j} \in \mathfrak{j}$ に対して $\alpha(\underline{j})$ が実数 [純虚数] であるときを云う。 また $\alpha \in \Sigma(\mathfrak{j})$ が complex であるとは, α が real でも imaginary でもないことである。

さて $(\mathfrak{g}_c, \mathfrak{j}_c)$ の任意のルート α に対し, $X_\alpha \in \mathfrak{g}_c(\mathfrak{j}, \alpha)$ $(X_\alpha \neq 0)$ を選んでおき, $H_\alpha = [X_\alpha, X_{-\alpha}]$ とおく。 さらに $\mathfrak{l}_c = \mathbb{C}H_\alpha + \mathfrak{g}_c(\mathfrak{j}, \alpha) + \mathfrak{g}_c(\mathfrak{j}, -\alpha)$ とおく。 そのとき $\alpha \in \Sigma(\mathfrak{j})$ を次のように分類する:

(i) real root α が
- singular (SR) $\overset{\text{def}}{\Longleftrightarrow} \mathfrak{l}_c \cap (\mathfrak{k} \cap \mathfrak{q}) \neq \{0\}$
- vectorial $\overset{\text{def}}{\Longleftrightarrow} \mathfrak{l}_c \cap (\mathfrak{k} \cap \mathfrak{q}) = \{0\}$

(ii) imaginary root α が
- Singular (SI) $\overset{\text{def}}{\Longleftrightarrow} \mathfrak{l}_c \cap (\mathfrak{p} \cap \mathfrak{q}) \neq \{0\}$
- compact $\Longleftrightarrow \mathfrak{l}_c \cap (\mathfrak{p} \cap \mathfrak{q}) = \{0\}$.

（"Vectorial" の用語は佐野茂氏による。）

我々の場合では，$\alpha \in \Sigma(\mathfrak{j})$ は各 $\mathfrak{j}=\mathfrak{j}_0, \mathfrak{j}_1, \mathfrak{j}_2$ に応じて次の表のようになる。

$\Sigma(\mathfrak{j})$	$\pm\alpha_1$	$\pm\alpha_2$	$\pm 2\alpha_1$	$\pm 2\alpha_2$	$\pm(\alpha_1 \pm \alpha_2)$
$\mathfrak{j}=\mathfrak{j}_0$	SI	SI	SI	SI	compact
$\mathfrak{j}=\mathfrak{j}_1$	SI	SR	SI	SR	complex
$\mathfrak{j}=\mathfrak{j}_2$	SR	SR	SR	SR	vectorial
重複度	2μ	2μ	1	1	2

表 2.1　　　　$(\mu=2)$

さて X 上の函数 D_i を次の公式によって定義する：

$$\det\left((t+1)\,\mathrm{Id}_{\mathfrak{g}} - \mathrm{Ad}_{\mathfrak{g}}(g\sigma(g)^{-1})\right) = \sum_{i=0}^{\dim G} D_i(gH)\, t^i .$$

そして k を $D_i \neq 0$ となる i のうちの最小のものとする。そのとき $gH \in X$ が <u>regular</u> <u>semisimple</u>（または <u>X-regular</u>）とは，$D_k(gH) \neq 0$ のときをいう。また $gH \in X$ が <u>nilpotent</u> であるとは $\mathfrak{g}$ の自己同型 $\mathrm{Ad}_{\mathfrak{g}}(g\sigma(g)^{-1})$ が unipotent になる時にいう。X の中の nilpotent 元全体の集合は <u>nilpotent</u> <u>variety</u> と呼ばれ $\mathcal{N}$ によって表わす。さらに X の中の regular semisimple 元全体の集合を X'，J_ℓ と X' の共通部分を J_ℓ' によって表わす $(\ell=0,1,2)$。容易に分かるように，

$$(2.6)\quad \begin{cases} \text{(i)}\ \ j_{\theta_1,\theta_2}H \in J_0' \iff \theta_1, \theta_2 \neq 0, \tfrac{\pi}{2} \pmod{\pi} \text{ かつ } \theta_1 \neq \pm\theta_2 \pmod{\pi} \\ \text{(ii)}\ \ j_{\theta_1,t_2}H \in J_1' \iff \theta_1 \neq 0, \tfrac{\pi}{2} \pmod{\pi} \text{ かつ } t_2 = 0 \\ \text{(iii)}\ \ j_{t_1,t_2}H \in J_2' \iff t_1, t_2 \neq 0 \text{ かつ } t_1 \neq \pm t_2 . \end{cases}$$

我々は以下の便宜の為，各 J_ℓ に対し，τ_i を

(2.7)
(1) $\tau_i = \cos^2\theta_i \quad (i=1,2)$ （J_0 に対して）
(2) $\tau_1 = \cos^2\theta_1,\ \tau_2 = \cosh^2 t_2$ （J_1 に対して）
(3) $\tau_i = \cosh^2 t_i \quad (i=1,2)$ （J_2 に対して）
(4) $\tau_1 = \cosh^2 t_1,\ \tau_2 = \cos^2\theta_2$ （$\tilde{J}_1$ に対して）

とおいて，（パラメータ θ_i, t_i の代わりに）パラメータ τ_i を考えることが多い。 実際，$F(x)$ を X 上の H-不変関数 [i.e. $F(hx)=F(x)$, $(h\in H)$] としよう。 そのとき $F(x)$ は (2.2) ～(2.4) を用いて，$\bigcup_{\ell=0}^{2} HJ_\ell'$ 上（あるいは $H\tilde{J}_1'$ 上）で，τ_1, τ_2 による関数 $F(\tau_1,\tau_2)$ とみなすことができる。 またこの関数 $F(\tau_1,\tau_2)$ は (2.2)，(2.4) 及び $H\tilde{j}_{t,0}H = Hj_{\theta,t}H$ から，$F(\tau_1,\tau_2)=F(\tau_2,\tau_1)$ を満たすことが分かる。

次に，J_ℓ 上の函数 Δ_ℓ を

$$\Delta_\ell(\exp \underline{j} H) = \prod_{\alpha\in\Sigma^+(\mathfrak{j}_\ell)} \left(e^{\alpha(\underline{j})} - e^{-\alpha(\underline{j})}\right)^{m_\alpha}$$

(2.8)
$$= \prod_{i=1}^{2} \left(e^{\alpha_i(\underline{j})} - e^{-\alpha_i(\underline{j})}\right)^{2\mu}\left(e^{2\alpha_i(\underline{j})} - e^{-2\alpha_i(\underline{j})}\right)$$
$$\times \left(e^{(\alpha_1+\alpha_2)(\underline{j})} - e^{-(\alpha_1+\alpha_2)(\underline{j})}\right)^2 \left(e^{(\alpha_1-\alpha_2)(\underline{j})} - e^{-(\alpha_1-\alpha_2)(\underline{j})}\right.$$
$$(\forall \underline{j} \in \mathfrak{j}_\ell \ ;\ \ell = 0,1,2)$$

により定義する。 但し，$\Sigma^+(\mathfrak{j}_\ell)$ は $(\mathfrak{g}, \mathfrak{j}_\ell)$ の正のルート全体，m_α は α の重複度で表2.1により与えられる。 Δ_ℓ は後述の Weyl の積分公式 (4.4) に現われる Jacobian である。 この Δ_ℓ をパラメータ τ_i で表示すると，簡単な計算

から，

(2.9) $\Delta_l(\exp \underline{j} H)\, dt_1 dt_2 = c(1-\tau_1)^{\mu}(1-\tau_2)^{\mu}(\tau_1-\tau_2)^2 d\tau_1 d\tau_2$

$(\underline{j} \in j_l \ ; \ l=0,1,2)$

が成り立つことが分かる。但し $\underline{j}$ は $l=0,1,2$ に応じてそれぞれ $\underline{j}=\underline{j}_{\theta_1,\theta_2}$, $\underline{j}=\underline{j}_{\theta_1,t_2}$, $\underline{j}=\underline{j}_{t_1,t_2}$ であるとし，また c は $\underline{j}\in j_l$ 及び l に依らない定数，μ はより一般の半単純対称空間 $U(p,q)/(U(r)\times U(p-r,q))$ に対し，

(2.10) $\mu = p+q-2r$

によって定義された整数で($p=4$，$q=r=2$である)今の場合 $\mu=2$ である。[(2.9)をわざわざ μ を用いて表わしたのは，$r=2$ の時には(2.9)が一般の p,q の場合にも通用するからである。以後 μ を用いた式が出てきた場合，その式は任意の p,q 及び $r=2$ に対して一般化できる。] $\tau_1-\tau_2$ は以後しばしば記号：

(2.11) $\omega = \tau_1-\tau_2$

で表わすことが多い。

2.2. $Z_G(A)/Z_H(A)$ について．

この小節で，我々は群の場合の semiregular element に相応する X の元達[後述の集合 A_e'，$A_{\pm}'$ の元達]の中心化群，及びそれから生じる rank 1 対称空間について述べる。今後我々はしばし

ば $X=G/H$ を埋め込み写像：

(2.12) $\quad G/H \hookrightarrow G : \ gH \longmapsto g\sigma(g)^{-1}$

により群 G の中に実現して考える。 また $g\sigma(g)^{-1}$ は $\hat{\sigma}(gH)$ あるいは $\hat{\sigma}(g)$ で表わすことにする。 さらに $\mathbb{A}$ を X の部分空間としたとき $Z_G(\mathbb{A})$, $Z_H(\mathbb{A})$ により、それぞれ $\{\hat{\sigma}(x);\ x\in\mathbb{A}\}$ の G または H の中における中心化群とし、$X_{/\mathbb{A}} = Z_G(\mathbb{A})/Z_H(\mathbb{A})$ とおく：

$$Z_G(\mathbb{A}) = \{ g\in G;\ g\hat{\sigma}(x)=\hat{\sigma}(x)g \quad (x\in\mathbb{A})\}$$
$$Z_H(\mathbb{A}) = \{ h\in H;\ h\hat{\sigma}(x)=\hat{\sigma}(x)h \quad (x\in\mathbb{A})\}.$$

また，$\mathbb{A}'=\{gH\in\mathbb{A};\ \dim Z_G(\{gH\})=\dim Z_G(\mathbb{A})\}$ とする。一般に $\mathbb{A}$ が σ 安定かつ θ 安定の場合には，$X_{\mathbb{A}}$ は $X_{/\mathbb{A}}\subset X$ と考えたとき X の中の閉集合であることが容易に示せる。このことから $X_{/\mathbb{A}}$ の位相は X の相対位相になっていることが分かる（cf. 命題4.2の証明）。

さて我々はまず $\mathbb{A}=\mathbb{A}_1=J_1\cap J_2$ とおき $X_{/\mathbb{A}_1'}$ について考察しよう。 この場合 $Z_G(\mathbb{A}_1')$, $Z_H(\mathbb{A}_1')$ は定義から容易に計算できるように，

(2.13)
$$Z_G(\mathbb{A}_1') = \left\{ \begin{pmatrix} e^{i\varphi}\mathrm{ch}\,t & & e^{i\varphi}\mathrm{sh}\,t \\ & U_4 & \\ e^{i\varphi}\mathrm{sh}\,t & & e^{i\varphi}\mathrm{ch}\,t \end{pmatrix};\ \begin{matrix} U_4\in U(3,1) \\ \varphi,\ t\in\mathbb{R} \end{matrix} \right\}$$

$$Z_H(\mathbb{A}_1') = \left\{ \begin{pmatrix} e^{i\varphi} & & \\ & U_4 & \\ & & e^{i\varphi} \end{pmatrix};\ \begin{matrix} U_4\in U(1)\times U(2,1) \\ \varphi\in\mathbb{R} \end{matrix} \right\}.$$

従って $Z_G(\mathbb{A}_1')\cong U(3,1)\times\mathbb{R}\times\mathbb{T}$, $Z_H(\mathbb{A}_1')\cong U(1)\times U(2,1)\times\mathbb{T}$, $X_{\mathbb{A}_1'}\cong(U(3,1)/(U(1)\times U(2,1)))\times\mathbb{R}$ 〔$\mathbb{T}$は1次元トーラス〕となって，$X_{\mathbb{A}_1'}$ は rank 1 の半単純対称空間と $\mathbb{R}$ の直積となる。 また $jH\in\mathbb{A}_1'$ とするとき，$X_{\{jH\}}=X_{\mathbb{A}_1'}=X_{\mathbb{A}_1}$ となることも明らかである。 同様にして $\mathbb{A}_0=J_0\cap J_1$ とおくとき，

(2.14)

$$Z_G(\mathbb{A}_0')=Z_G(\mathbb{A}_0)=\left\{\begin{pmatrix} a & & & b \\ & e^{i\varphi}\cos\theta & e^{i\varphi}\sin\theta & \\ & -e^{i\varphi}\sin\theta & e^{i\varphi}\cos\theta & \\ c & & & d \end{pmatrix};\ \begin{matrix}\begin{pmatrix} a & b \\ c & d\end{pmatrix}\in U(2,2) \\ \left[\begin{matrix} a\in\mathbb{C};\ {}^t b, c\in\mathbb{C}^3; \\ d\in M_3(\mathbb{C})\end{matrix}\right] \\ \varphi,\theta\in\mathbb{R}\end{matrix}\right\}$$

$$Z_H(\mathbb{A}_0')=Z_H(\mathbb{A}_0)=\left\{\begin{pmatrix} a & & & \\ & e^{i\varphi} & & \\ & & e^{i\varphi} & \\ & & & d \end{pmatrix};\ \begin{matrix} a\in U(1),\ d\in U(1,2); \\ \varphi\in\mathbb{R}\end{matrix}\right\}.$$

また $\mathbb{A}=\mathbb{A}_+=\{{}_1j_{\frac{\pi}{2},t}H;\ t\in\mathbb{R}\}$, $\mathbb{A}=\mathbb{A}_-=\{{}_0j_{\frac{\pi}{2},\theta}H;\ \theta\in\mathbb{R}\}$ のときにはそれぞれ，

(2.15)

$$Z_G(\mathbb{A}_+')=Z_G(\mathbb{A}_+)=\left\{\begin{pmatrix} e^{i\varphi}\mathrm{ch}\,t & & & e^{i\varphi}\mathrm{sh}\,t \\ & U_2 & & \\ & & U_2' & \\ e^{i\varphi}\mathrm{sh}\,t & & & e^{i\varphi}\mathrm{ch}\,t \end{pmatrix};\ \begin{matrix} U_2\in U(2) \\ U_2'\in U(1,1) \\ \varphi, t\in\mathbb{R}\end{matrix}\right\}$$

$$Z_H(\mathbb{A}_+')=Z_H(\mathbb{A}_+)=\left\{\begin{pmatrix} e^{i\varphi} & & & & \\ & u & & & \\ & & u' & & \\ & & & U_2' & \\ & & & & e^{i\varphi} \end{pmatrix};\ \begin{matrix} u, u'\in U(1) \\ U_2'\in U(1,1) \\ \varphi\in\mathbb{R}\end{matrix}\right\}$$

(2.16)

$$Z_G(\mathbb{A}_-')=Z_G(\mathbb{A}_-)=\left\{\begin{pmatrix} e^{i\varphi}\cos\theta & & e^{i\varphi}\sin\theta & \\ & U_2 & & \\ -e^{i\varphi}\sin\theta & & e^{i\varphi}\cos\theta & \\ & & & U_2' \end{pmatrix};\ \begin{matrix} U_2, U_2'\in U(2) \\ \varphi,\theta\in\mathbb{R}\end{matrix}\right\}$$

$$Z_H(\mathbb{A}_-')=Z_H(\mathbb{A}_-)=\left\{\begin{pmatrix} e^{i\varphi} & & & & \\ & u & & & \\ & & u' & & \\ & & & e^{i\varphi} & \\ & & & & U_2' \end{pmatrix};\ \begin{matrix} u, u'\in U(1) \\ U_2'\in U(2) \\ \varphi\in\mathbb{R}\end{matrix}\right\}$$

と表わせる。[$\hat{\sigma}({}_1\gamma_{\frac{\pi}{2},t}) = {}_1\gamma_{\pi,2t}$, $\hat{\sigma}({}_0\gamma_{\frac{\pi}{2},\theta}) = {}_0\gamma_{\pi,2\theta}$ などに注意。] $\mathbb{A} = \mathbb{A}_2 \equiv \{{}_2\gamma_{t,t}H \,;\, t\in\mathbb{R}\}$, $\mathbb{A} = \mathbb{A}_{-1} \equiv \{{}_0\gamma_{\theta,\theta}H \,;\, \theta\in\mathbb{R}\}$ に対しても同様にして結局次の補題が成り立つことが分かる。

補題 2.1. $\mathbb{A}_\ell$ $(-1\leqq \ell \leqq 2)$, $\mathbb{A}_\pm$ を上記のように定義したとき, 各 $X_{\mathbb{A}'}$ は表 2.2 の ① のような rank 1 の半単純対称空間と同型になる。 また $X_{\mathbb{A}'}$ の Cartan 部分空間の $Z_H(\mathbb{A})$-共役 class としては, $X_{\mathbb{A}'}$ を自然な同一視により X の部分集合と考えた時, 表 2.2 の ② に列挙した X の Cartan 部分空間達を取ることができる。

$\mathbb{A}$	$X_{\mathbb{A}'}$ と同型な対称空間 ①		②
$\mathbb{A}_1 = J_1 \cap J_2$	$X^s_{\mathbb{A}_1} \times \mathbb{R}$	$[X^s_{\mathbb{A}_1} = U(3,1)/(U(1)\times U(2,1))]$	J_1, J_2
$\mathbb{A}_0 = J_0 \cap J_1$	$X^s_{\mathbb{A}_0} \times \mathbb{T}$	$[X^s_{\mathbb{A}_0} = U(2,2)/(U(1)\times U(1,2))]$	J_0, J_1
$\mathbb{A}_+ = \{{}_1\gamma_{\frac{\pi}{2},t}H \,;\, t\in\mathbb{R}\}$	$X^s_{\mathbb{A}_+} \times \mathbb{R}$	$[X^s_{\mathbb{A}_+} = U(2)/(U(1)\times U(1))]$	J_1
$\mathbb{A}_- = \{{}_0\gamma_{\frac{\pi}{2},\theta}H \,;\, \theta\in\mathbb{R}\}$	$X^s_{\mathbb{A}_-} \times \mathbb{T}$	$[X^s_{\mathbb{A}_-} = U(2)/(U(1)\times U(1))]$	J_0
$\mathbb{A}_2 = \{{}_2\gamma_{t,t}H \,;\, t\in\mathbb{R}\}$	$X^s_{\mathbb{A}_2} \times \mathbb{R}$	$[X^s_{\mathbb{A}_2} = O(3,1)/O(3)]$	J_2
$\mathbb{A}_{-1} = \{{}_0\gamma_{\theta,\theta}H \,;\, \theta\in\mathbb{R}\}$	$X^s_{\mathbb{A}_{-1}} \times \mathbb{T}$	$[X^s_{\mathbb{A}_{-1}} = O(4)/O(3)]$	J_0

表 2.2

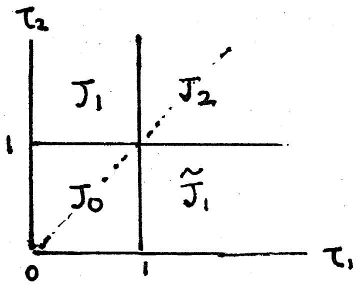


図 2.1

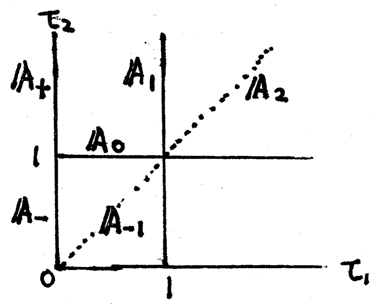


図 2.2

§3. 不変微分作用素とその動径部分

対称空間 $X = G/H$ 上の H-不変微分作用素環を $\mathbb{D}(X)$ で表わす。$D \in \mathbb{D}(X)$ に対して、$\mathfrak{P}^\ell(D)$ を Cartan 部分空間 J_ℓ に対する D の動径部分（radial component）即ち、

$$(3.1) \qquad \mathfrak{P}^\ell(D)(f|_{J_\ell'}) = (Df)|_{J_\ell'}$$

が任意の $f \in C_c^\infty(H.J_\ell')$ に対して成立するという条件で、一意的に定まる J_ℓ' 上の微分作用素とする。　常微分作用素 L を

$$(3.2) \qquad L = a(\tau)\frac{d^2}{d\tau^2} + b(\tau)\frac{d}{d\tau}\ ; \quad \begin{aligned} a(\tau) &= 4\tau(\tau-1) \\ b(\tau) &= 4\{(\mu+2)\tau-1\} = 4(4\tau-1) \end{aligned}$$

と定める。　L の formal adjoint L^* につき、

$$(3.3) \qquad L^* = (1-\tau)^{\mu} L (1-\tau)^{-\mu} = (1-\tau)^2 L (1-\tau)^{-2}$$

が成り立つ。

$$(3\text{-}2)' \qquad L_i = a(\tau_i)\frac{\partial^2}{\partial\tau_i^2} + b(\tau_i)\frac{\partial}{\partial\tau_i}$$

と置くと、[Hoogenboom 5 ; Theorem 5] から、我々の議論の出発点となる次の補題が成立する。

補題 3.1　"τ-変数" のもとで、(cf. (2.7)) $\mathbb{D}(X)$ から $\{ S(\omega^{-1}L_1\omega, \omega^{-1}L_2\omega) \mid S$ は 2 変数対称多項式 $\}$ の上への同型写像 $\mathfrak{P}$ が存在して、任意の $D \in \mathbb{D}(X)$; $\ell = 0, 1, 2$ に対して、

$$(3.4) \qquad \mathfrak{P}(D)|_{J_\ell'} = \mathfrak{P}^\ell(D)$$

が成立する。

<u>定義 3.2</u>　　Ω_1, Ω_2 を

(3. 5)　　$\mathfrak{I}(\Omega_1) = \omega^{-1}(L_1+L_2)\omega$,　$\mathfrak{I}(\Omega_2) = \omega^{-1}L_1L_2\omega$

を満足する $\mathbb{D}(X)$ の元とする。$\mathbb{D}(X)$ は、補題3.1 より、Ω_1, Ω_2 を自由生成元とする多項式環となるので、$\mathbb{D}(X)$ の指標 $\chi : \mathbb{D}(X) \longrightarrow \mathbb{C}$ と、順序を考えない複素数の対 (λ_1, λ_2) との間に（従って集合 $\{\lambda_1, \lambda_2\}$ との間に）次式によって定まる全単射がある。

(3. 6)　　$\chi(\Omega_1) = \lambda_1+\lambda_2$,　$\chi(\Omega_2) = \lambda_1\lambda_2$

この全単射により、(λ_1, λ_2) に対応する $\mathbb{D}(X)$ の指標 χ を $\chi_{\lambda_1,\lambda_2}$ と書く。定義から $\chi_{\lambda_1,\lambda_2} = \chi_{\lambda_2,\lambda_1}$ である。$\lambda_1 \neq \lambda_2$ のとき、$\chi_{\lambda_1,\lambda_2}$ は <u>regular</u> であるといい、$\lambda_1 = \lambda_2$ のとき、$\chi_{\lambda_1,\lambda_2}$ は <u>singular</u> であると言うことにする。

$\Theta \in \mathcal{D}'_{\chi_{\lambda_1,\lambda_2},H}(X)$ に対して、

(3. 7)　　$\Pi_\ell = \Theta|_{J'_\ell}$,　$u_\ell = \omega\Pi_\ell = \omega\,\Theta|_{J'_\ell}$

と置くと、$u = u_\ell$ $(\ell = 0, 1, 2)$ は微分方程式

(3. 8. 1)　$(L_1+L_2)u = (\lambda_1+\lambda_2)u$

$$(3.8.2)\qquad L_1L_2u = \lambda_1\lambda_2 u$$

を満たす。

<u>**補題 3.3**</u>　$u(\tau_1,\tau_2)$ が $\{(\tau_1,\tau_2)\mid \tau_1,\tau_2\geqq 0\}$ のある領域で、微分方程式 (3.8.1) (3.8.2) を満たすとき、同じ領域で、u は、

$$(3.9)\qquad (L_i-\lambda_1)(L_i-\lambda_2)u = 0\qquad (i=1,2)$$

という微分方程式を満足する。

証明　各 $i=1,2$ に対して、

$$\begin{aligned}(L_i-\lambda_1)(L_i-\lambda_2)u &= L_i^2u - L_i(\lambda_1+\lambda_2)u + \lambda_1\lambda_2 u\\ &= L_i^2u - L_i(L_1+L_2)u + L_1L_2u\\ &= (L_i-L_1)(L_i-L_2)u\\ &= 0\end{aligned}$$

□

この補題 3.3 から、まず、

$$(3.9)'\qquad (L-\lambda_1)(L-\lambda_2)F = 0$$

の解を調べておく事が有効となる。以下、$(0,1)$ 又は $(1,\infty)$ [あるいはそれらの部分開区間] に於いて考える。微分方程式 $(L-\lambda)F=0$ の一次独立な2つの解を、$F_1(\tau,\lambda)$, $F_2(\tau,\lambda)$ とする。従って、

$$(3.10.1)\qquad (L-\lambda)F_i(\tau,\lambda) = 0\qquad (i=1,2)$$

そして、$F_3(\tau,\lambda)$, $F_4(\tau,\lambda)$ を、

$$(3.10.2)\qquad (L-\lambda)F_{i+2}(\tau,\lambda) = F_i(\tau,\lambda)\qquad (i=1,2)$$

となるように取る。すると、$(3.9)'$ の解全体のなす4次元空間の基底としては、

i) $\lambda_1 \neq \lambda_2$ のときは、 $\{F_1(\tau,\lambda_1), F_2(\tau,\lambda_1), F_1(\tau,\lambda_2), F_2(\tau,\lambda_2)\}$

ii) $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda$ のときは $\{F_1(\tau,\lambda), F_2(\tau,\lambda), F_3(\tau,\lambda), F_4(\tau,\lambda)\}$

が取れる。

各Cartan部分空間 J_ℓ $(\ell = 0,1,2)$ に対し、$\{(\tau_1,\tau_2) \mid 0 \leqq \tau_1 \leqq \tau_2\}$ 内に $J_\ell' = J_\ell \cap X'$ に対応する領域を取り (cf.(2.7))、以下、本節では、その上で考える。こう考えた時、各領域は連結である事を注意しておく。
(cf. 図1.1, (2.7))　$\{F_i(\tau,\lambda) \mid i=1,2,3,4\}$　$\{\tilde{F}_i(\tau,\lambda) \mid i=1,2,3,4\}$ を、

$$(3.10)' \quad \begin{aligned} (L-\lambda)F_i &= 0 & (L-\lambda)F_{i+2} &= F_i \\ (L-\lambda)\tilde{F}_i &= 0 & (L-\lambda)\tilde{F}_{i+2} &= \tilde{F}_i \end{aligned} \quad (i=1,2)$$

を満たす $\{F \mid (L-\lambda)^2 F = 0\}$ の2組の基底とする。

補題3.4　$\{(\tau_1,\tau_2) \mid 0 \leqq \tau_1 \leqq \tau_2\}$ 内の上記、各領域に於ける連立微分方程式 (3.9) の解空間は16次元であり、解 u は次のように表わされる。

i) $\lambda_1 \neq \lambda_2$ のとき、

$$(3.11) \quad u(\tau_1,\tau_2) = \sum_{\substack{i,j=1,2 \\ k_1,k_2=1,2}} C_{ij}^{k_1,k_2} F_i(\tau_1,\lambda_{k_1}) \tilde{F}_j(\tau_2,\lambda_{k_2}) \quad (C_{ij}^{k_1,k_2} \in \mathbb{C})$$

ii) $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda$ のとき、

$$(3.12) \quad u(\tau_1,\tau_2) = \sum_{i,j=1,2,3,4} C_{ij} F_i(\tau_1,\lambda) \tilde{F}_j(\tau_2,\lambda) \quad (C_{ij} \in \mathbb{C})$$

補題 3.5　上記各領域上の連立微分方程式 (3.8.1) (3.8.2) の解空間は 8 次元であり，解 u は次のように表わされる。

i) $\lambda_1 \neq \lambda_2$ のとき，

(3.13)　$$u(\tau_1,\tau_2) = \sum_{\substack{i,j=1,2\\ k=1,2}} C_{ij}^{k} F_i(\tau_1,\lambda_k)\tilde{F}_j(\tau_2,\lambda_{k'}) \qquad (C_{ij}^{k} \in \mathbb{C})$$

但し，

(3.14)　$$k' = \begin{cases} 2 & (k=1) \\ 1 & (k=2) \end{cases}$$ 。

ii) $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda$ のとき，

(3.12)　$$u(\tau_1,\tau_2) = \sum_{i,j=1,2,3,4} C_{ij} F_i(\tau_1,\lambda)\tilde{F}_j(\tau_2,\lambda) \qquad (C_{ij} \in \mathbb{C})$$

但し C_{ij} は次式を満たす。

(3.15)　$$C_{i+2,j} = -C_{i,j+2}, \quad C_{i+2,j+2} = 0 \qquad (i,j=1,2)$$

即ち，　$C_{ij}^1,\ C_{ij}^2 \in \mathbb{C}$ とするとき，

(3.16)　$$u(\tau_1,\tau_2) = \sum_{i,j=1,2}\Big[C_{ij}^1 F_i(\tau_1,\lambda)\tilde{F}_j(\tau_2,\lambda) + C_{ij}^2 \{F_i(\tau_1,\lambda)\tilde{F}_{j+2}(\tau_2,\lambda) - F_{i+2}(\tau_1,\lambda)\tilde{F}_j(\tau_2,\lambda)\}\Big]$$

註：我々が主として関心をもつのは，$\tilde{F}_i = F_i$ $(i=1,2,3,4)$ の場合（しかも，さらに F_i を本節末の指定に従って取った場合）である。しかし，上の形で，補題 3.5 を利用する機会もある。

証明　補題 3.3 及び補題 3.4 により，$u(\tau_1,\tau_2)$ は，i), ii) の場合にそれぞれ，(3.11), (3.12) の形をしている。

i) $\lambda_1 \neq \lambda_2$ のとき，(2.11) を (3.8.1) に代入した式より，

$$\sum_{k_1,k_2,\,i,j=1,2} (\lambda_{k_1} + \lambda_{k_2} - \lambda_1 - \lambda_2)\, C_{ij}^{k_1,k_2} F_i(\tau_1,\lambda_{k_1}) F_j(\tau_2,\lambda_{k_2}) = 0$$

$\left\{ F_i(\tau_1,\lambda_{k_1}) F_j(\tau_2,\lambda_{k_2}) \;\middle|\; \begin{matrix} i,j=1,2 \\ k_1,k_2=1,2 \end{matrix} \right\}$ は一次独立だから、

$(\lambda_{k_1}+\lambda_{k_2}-\lambda_1-\lambda_2)\, C_{ij}^{k_1,k_2} = 0 \quad (i,j,k_1,k_2=1,2)$

$\lambda_1 \neq \lambda_2$ より、$\lambda_{k_1}+\lambda_{k_2}-\lambda_1-\lambda_2=0$ と $k_1 \neq k_2$ は同値だから、

$k_1 = k_2$ のとき $C_{ij}^{k_1,k_2} = 0 \quad (i,j=1,2)$。よって、$u(\tau_1,\tau_2)$ は $C_{ij}^{k} = C_{ij}^{k,k'}$ とおいて、(3.13)の形をしている。逆に(3.13)の形の $u(\tau_1,\tau_2)$ は、(3.8.1),(3.8.2)を満たす。

ii) $\lambda_1=\lambda_2=\lambda$ のとき、(3.12)の両辺に $(L_1+L_2-2\lambda)$ を作用させ、

$$(L_1+L_2-2\lambda)\,u(\tau_1,\tau_2) = \sum_{i,j=1,2,3,4} C_{ij}\{(L_1-\lambda)F_i\cdot\tilde{F}_j + F_i\cdot(L_2-\lambda)\tilde{F}_j\} 。$$

$$= \sum_{i,j=1,2}\left[(C_{i+2,j}+C_{i,j+2})F_i\tilde{F}_j + C_{i+2,j+2}(F_i\tilde{F}_{j+2}+F_{i+2}\tilde{F}_j)\right]$$

よって、(3.8.1)は、$\{F_i(\tau_1,\lambda)\tilde{F}_j(\tau_2,\lambda) \mid i,j=1,2,3,4\}$ の一次独立性より(3.15)と同値である。逆に、(3.15)を満たす(3.12)式 即ち、

(3.17) $\quad C_{ij}^{1} = C_{ij}, \quad C_{ij}^{2} = C_{i,j+2} \quad (i,j=1,2)$

という定数名の置きかえにより、それと同一である(3.16)式に対しては、明らかに、(3.8.2)が成立する。 □

以下、$(0,1)\cup(1,\infty)$ 上、(3.10.1),(3.10.2)を満たす F_1,F_2,F_3,F_4 を一組指定する。次節以下では、特にことわらない限り、この F_1,F_2,F_3,F_4 を用いる事とする。[我々の指定は、本節末の表にまとめてある。]

常微分方程式 $(L-\lambda)F=0$ は，

(3.18) $\quad \alpha+\beta+1=2+\mu \ , \ \alpha\beta=-\frac{\lambda}{4} \ , \ \gamma=1$

即ち，

(3.18)' $\quad \alpha=\frac{1}{2}(s+\mu+1)$ 但し $s=\sqrt{\lambda+(1+\mu)^2}$

$\beta=\frac{1}{2}(-s+\mu+1)$

$\gamma=1$

に対する超幾何微分方程式

(3.19) $\quad \tau(1-\tau)\frac{d^2}{d\tau^2}F+\{\gamma-(\alpha+\beta+1)\tau\}\frac{d}{d\tau}F-\alpha\beta F=0$

他ならないから，周知の事実（たとえば［犬井 6］の§13 特に p.83 参照）より，$\lim_{\tau\to 1}F_1(\tau,\lambda)=1$ となるように F_1 をとると，超幾何関数 $F(\alpha,\beta,\gamma:z)=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(\alpha)_k(\beta)_k}{k!\,(\gamma)_k}z^k$ （但し $(\alpha)_k=\alpha(\alpha+1)\cdots(\alpha+k-1)$ $(k\geqq 1)$，$(\alpha)_0=1$ ）を用いて，

(3.20) $\quad F_1(\tau,\lambda)=F(\alpha,\beta,\mu+1\,;\,1-\tau)$

であり，F_2 については，初項（$(1-\tau)$ につき，$-\mu=-2$ 次の項）の係数は 1，定数項は 0 となるものを取ると，

$$
\begin{aligned}
F_2(\tau,\lambda) &= \sum_{k=0}^{\mu-1}\frac{(\alpha-\mu)_k(\beta-\mu)_k}{k!\,(1-\mu)_k}(1-\tau)^{k-\mu} \\
&\quad+\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^{\mu-1}(\alpha-\mu)_{\mu+k}(\beta-\mu)_{\mu+k}}{k!\,(\mu-1)!\,(\mu+k)!}\times\sum_{j=0}^{k-1}\left(\frac{1}{\alpha+j}+\frac{1}{\beta+j}-\frac{1}{\mu+1-j}-\frac{1}{1+j}\right)\times(1-\tau)^{k} \\
&\quad+\frac{(-1)^{\mu-1}}{\mu!\,(\mu-1)!}\prod_{\tilde{k}=1}^{\mu}(\alpha-\tilde{k})(\beta-\tilde{k})\log|1-\tau|\times F(\alpha,\beta,\mu+1\,;\,1-\tau)
\end{aligned} \tag{3.21}
$$

となる。 ここで，α 又は β が $1, 2, \cdots, \mu$ のいずれかと等しい時，即ち，$\lambda \in \Lambda_s$ のとき，(3.21) の右辺の第2項，第3項はともに0であり，$F_2(\tau, \lambda) = (1-\tau)^{-\mu} F(\alpha-\mu, \beta-\mu, 1-\mu; 1-\tau)$ となる。 さらに，

(3.22)
$$
\begin{aligned}
&(L-\lambda)\sum_{i \geq i_0} g_i (1-\tau)^i \\
&= \sum_{i \geq i_0} [4(\mu+i+1)\{i g_i - (i+1) g_{i+1}\} - \lambda g_i] (1-\tau)^i \\
&\quad - 4 i_0 (i_0+\mu) g_{i_0} (1-\tau)^{i_0 - 1}
\end{aligned}
$$

より，$(L-\lambda)F_3 = F_1$ をみたす，$F_3(\tau, \lambda) = \sum_{i \geq 1} g_i (1-\tau)^i$，$g_1 = 1$ という展開をもつ実解析関数 F_3 が，唯一つ定まる。($\mu \geqq 2$ のとき.) $\lim_{\tau \to 1} (1-\tau)^{\mu-1} F_4(\tau, \lambda) = 1$； $F_4(\tau, \lambda)$ の定数項は0という条件により，$(L-\lambda)F_4 = F_2$ を満たす F_4 を一意に指定する。

最後に，参照の便宜のため，上に述べた F_1, F_2, F_3, F_4 の指定を表にまとめておく。

註*)：展開に於ける $\tau \to 1$ のときの主要項． [$\mu \geqq 2$とする]

			$F_1(\tau,\lambda)$	$F_2(\tau,\lambda)$	$F_3(\tau,\lambda)$	$F_4(\tau,\lambda)$
定義	満足する微分方程式		$(L-\lambda)F_1 = 0$	$(L-\lambda)F_2 = 0$	$(L-\lambda)F_3 = F_1$	$(L-\lambda)F_4 = F_2$
	$(1-\tau)$ に関する展開	初項*) の形	1 (定数)	$(1-\tau)^{-\mu}$	$(1-\tau)$	$(1-\tau)^{1-\mu}$
		その他の条件	—	定数項は0	—	定数項は0
具体的な形			(3.20)	(3.21)	—	—

表 3.1 [以下特記無き限り，F_1, F_2, F_3, F_4 はこの表のものをさす]

§4. 不変積分——階数1へのreduction

この節では、まず不変積分の定義・基本的性質を述べたあと、X上の不変積分を、$\mathbb{A}$（表2.2を見よ）のcentralizerから生ずる、階数1の半単純対称空間 $X_{\mathbb{A}}^{S}$ と自明な一次元対称空間 $X_{\mathbb{A}}^{T}$ の直積の対称空間 $X_{\mathbb{A}} = X_{\mathbb{A}}^{S} \times X_{\mathbb{A}}^{T}$ の上の不変積分を同一視する。（命題4.6）これによって、Xのsemi-regularな半単純元 $j_0 \in \mathbb{A}'$（§2.2を参照）のまわりでの、H-不変超関数、特に、I.E.D.の研究を、高階の対称空間Xから、階数1の対称空間 $X_{\mathbb{A}}^{S}$ へ舞台を移して行なう基礎が出来る。

<u>定義4.1</u>　　$f \in C_c^{\infty}(X)$ に対して、

(4.1)　$$ {}_X F_f(j) = F_f(j) = \int_{H/Z_H(J_l)} f(h.j)\, d\tilde{h} \quad (j \in J_l';\ l = 0,1,2) $$

を f の不変積分（invariant integral）と呼ぶ。

ここに、$H/Z_H(J_l)$ $(l=0,1,2)$ 上のH-不変測度は、

(4.2)　$$ \int_{H/Z_H(J_l)} f(h.j)\, d\tilde{h} = \int_{H/Z_H(A_k)} \int_{Z_H(A_k)/Z_H(J_l)} f(h.\zeta.j)\, d\tilde{\zeta}\, d\tilde{h} \quad \begin{pmatrix} k=0,1 \\ l=k,k+1 \end{pmatrix} $$

によって定まるものとする。(cf.(2.9)) 但し、$k=0,1$ 対して、$Z_H(A_k)/Z_H(J_k)$ と $Z_H(A_k)/Z_H(J_{k+1})$ は、階数1の対称空間 $X_{A_k}^{S}$ (cf.表2.2) 上の不変積分の定義にあらわれるcoset spaceと自然に同型であるから、その上での不変測度としては、$X_{A_k}^{S}$ の

不変積分の定義に用いられるものを取る。(cf. [Faraut 2], [Aoki-Kato 1; p.4]) また、$H/Z_H(A_k)$ $(k=0,1)$ の不変測度としては、(4.2)式が $l=1$; $k=0,1$ に対して、矛盾なく成立するものを取る。

${}_XF_f$ は $\bigsqcup_{l=0}^{2} J_l' \subset X$ 上の関数であるが、Weyl群不変である (cf. (2.2)~(2.4)) ことより、$\bigsqcup_{l=0}^{2} J_l'$ を (2.7) によって $\{(\tau_1,\tau_2) \mid 0 \leqq \tau_1 \leqq \tau_2\}$ 内に移して考えて、(τ_1,τ_2)-変数の関数と見る事が出来る。さらに、τ_1, τ_2 に関する対称性を要請する事により、定義域を拡大して、$\{(\tau_1,\tau_2) \mid 0<\tau_1,\tau_2;\ \tau_1 \neq 1, \tau_2 \neq 1, \tau_1 \neq \tau_2\}$ 上の関数と見る事もある。

任意の $D \in \mathbb{D}(X)$, $f \in C_c^\infty(X)$ に対して、良く知られているように、

(4.3) $${}_XF_{Df} = \Upsilon(D)\, F_f$$

(4.4) $$\int_X f(x)\,dx = \sum_{l=0}^{2} w_l^{-1} \int_{J_l'} F_f(j)\,\Delta_l(j)\,dj$$

が成り立つ。(4.4) は Weyl の積分公式と呼ばれ、(cf [Sano 10]) 右辺に於ける w_l は、Cartan 部分空間 J_l の Weyl 群の位数を表わす。

以後、上にも述べたように、$\bigcup_{l=0}^{2} J_l$ の (Weyl 群・不変な) 部分集合と、(2.7) による $\{(\tau_1,\tau_2) \mid 0 \leqq \tau_1 \leqq \tau_2\}$ 内の像とを、適宜、

同一視する。 $\{ j \in \bigcup_{l=0}^{2} J'_l \mid F_f(j) \neq 0 \}$ の $\bigcup_{l=0}^{2} J'_l$ での閉包を、不変積分 F_f の台と呼び、$\mathrm{supp}\, F_f$ と書く。 $\bigcup_{l=0}^{2} J_l$ の部分集合 $\mathcal{O}$ に対して、

(4.5) $\quad {}_X\tilde{\mathcal{H}}(\mathcal{O}) = \tilde{\mathcal{H}}(\mathcal{O}) = \{ {}_XF_f \mid f \in C_c^\infty(X),\ \mathrm{supp}\, {}_XF_f \subset \mathcal{O} \}$

と置く。 $\mathcal{O}$ を $\bigcup_{A \subset J_l} J_l$ の部分集合とする時、(4.5) と同様にして、${}_{X_A}\tilde{\mathcal{H}}(\mathcal{O})$ を定義する。 $\mathcal{O} = \bigcup_{l=0}^{2} J_l$ のときの (4.5) を単に ${}_X\tilde{\mathcal{H}} = \tilde{\mathcal{H}}$ と記す。 便宜上、F_f の代りに、以後、

(4.6) $\quad M_f(\tau_1, \tau_2) = \omega (1-\tau_1)^{\mu} (1-\tau_2)^{\mu} F_f(\tau_1, \tau_2)$

を考える事も多い。 ${}_X\tilde{\mathcal{H}}(\mathcal{O})$ に対応する M_f の全体を、

${}_X\mathcal{H}(\mathcal{O}) = \mathcal{H}(\mathcal{O}) = \{ M_f \mid f \in C_c^\infty(X),\ \mathrm{supp}\, M_f (= \mathrm{supp}\, F_f) \subset \mathcal{O} \}$

と置く。 F_f の性質から (4.6) によって対応する M_f の性質が容易に導びかれる。例えば、(3.3), (3.5), (4.3), (4.6) から、

(4.7) $\quad M_{\Omega_1 f} = (L_1^* + L_2^*) . M_f \quad ; \quad M_{\Omega_2 f} = L_1^* L_2^* . M_f \quad$ 。

${}_X\tilde{\mathcal{H}}(\mathcal{O})$ の双対空間 ${}_X\tilde{\mathcal{H}}'(\mathcal{O}) = \tilde{\mathcal{H}}'(\mathcal{O})$ を

(4.8) $\quad {}_X\tilde{\mathcal{H}}'(\mathcal{O}) = \left\{ \theta : {}_X\tilde{\mathcal{H}}(\mathcal{O}) \to \mathbb{C} \;\middle|\; \begin{array}{l} \cdot\ \theta \text{ は } \mathbb{C}\text{-線形} \\ \cdot\ f \mapsto \langle \theta, F_f \rangle \text{ は } X - \overline{H.(\bigcup_{l=0}^{2} J'_l - \mathcal{O})} \\ \quad \text{上の Schwartz 超関数} \end{array} \right\}$

と定める。 f に対してその不変積分を対応させる線形写像 $F : C_c^\infty(X) \to \tilde{\mathcal{H}}$ の双対写像を $F' : \tilde{\mathcal{H}}' \to \mathcal{D}'(X)$ と書くと、容易に、$\theta \in \tilde{\mathcal{H}}$ に対し、$F'(\theta)$ は、H-不変 Schwartz 超関数の空間

$\mathcal{D}'_H(X)$ の元である事がわかる。同様の事が、$\tilde{\mathcal{H}}(\sigma)$, $\mathcal{H}(\sigma)$ に対し成立する。

以下、我々は、群の場合(cf [Hirai 3]) と類似の議論を、半単純対称空間の場合に拡張して行なう。そのために、まず、群上の不変積分の研究で重要であった、いわゆる Theorem of compacity を、半単純対称空間の場合に拡張する。

命題 4.2 (A Theorem of compacity for symmetric spaces)

$X = G/H$ を半単純対称空間、j_0 を X の半単純元、J を j_0 を含む X の Cartan 部分空間とする。この時、以下の性質をみたす j_0 の J に於ける近傍 $\mathcal{O}(j_0) = \mathcal{O}_J(j_0)$ が存在する。

: 任意の X のコンパクト集合 ω に対して、$H/Z_H(j_0)$ のコンパクト集合 $\Omega = \Omega(\omega) = \Omega(\omega, \mathcal{O}_J(j_0))$ が存在し、$\mathcal{O}(j_0)$, ω, Ω に対し、

$$(4.9)\qquad \left.\begin{array}{l} j \in \mathcal{O}(j_0) \\ h.j \in \omega \end{array}\right\} \Longrightarrow \bar{h} = h.Z_H(j_0) \in \Omega$$

が成立する。

我々は、この命題を、次の、良く知られた、群の場合の対応する定理を用いて、証明する。

補題4.3（[Warner 12; vol.II p.75 Theorem 8.1.4.1]）

γ_0 を半単純リー群 G の半単純元，$\tilde{J}$ を γ_0 を含む G の Cartan 部分群，$Z_G(\gamma_0)=\{g\in G \mid g\gamma_0 g^{-1}=\gamma_0\}$ とする。$x\in G$ に対して，$\dot{x}\in G/Z_G(\gamma_0)$ をその属する coset とする。この時 以下の性質をみたす γ_0 の $\tilde{J}$ に於ける開近傍 $\tilde{O}(\gamma_0)$ が存在する。

：G の任意のコンパクト集合 $\tilde{\omega}$ に対し，$G/Z_G(\gamma_0)$ のコンパクト集合 $\tilde{\Omega}=\tilde{\Omega}(\tilde{\omega},\tilde{O}(\gamma_0))$ が存在して，

$$(4.10)\quad \left.\begin{array}{l} x\gamma x^{-1}\in\tilde{\omega} \\ \gamma\in\tilde{O}(j_0)\end{array}\right\}\Rightarrow \dot{x}\in\tilde{\Omega}$$

。

証明（命題4.2の）　$X=G/H$ から G への連続写像 $\tilde{\sigma}$ を，$\tilde{\sigma}(gH)=g\sigma(g)^{-1}$ によって定義する。(cf. §2. (2.12))．ここに，σ は，対称対 (G,H) に対応する G の包合的自己同型写像である。すると，任意の $j\in J$ に対し，$\tilde{\sigma}(j)$ は，G の半単純元であり，$\tilde{\sigma}(J)$ を含む G の Cartan 部分群 $\tilde{J}$ を一つとる。$\tilde{\sigma}(j_0)$，$\tilde{J}$ に補題4.3を適用して求まる，$\tilde{\sigma}(j_0)$ の $\tilde{J}$ に於ける開近傍 $\tilde{O}_{\tilde{J}}(\tilde{\sigma}(j_0))$ に対して，

$$O_J(j_0)=(\tilde{\sigma}|_J)^{-1}(\tilde{O}_{\tilde{J}}(\tilde{\sigma}(j_0)))$$

とおく。$O_J(j_0)$ は明らかに，j_0 の J に於ける開近傍であるが，これが求めるものである事を以下示す。

X の任意のコンパクト集合 ω に対して，$\tilde{\omega}=\tilde{\sigma}(\omega)$ は G

のコンパクト集合であるから，補題4.3から求まる $G/Z_G(\tilde{\sigma}(j_0))$ のコンパクト集合 $\tilde{\Omega}=\tilde{\Omega}(\tilde{\sigma}(\omega),\ \tilde{O}_{\tilde{J}}(\tilde{\sigma}(j_0)))$ がある。$H/Z_H(\tilde{\sigma}(j_0))$ を自然な同一視によって，$G/Z_G(\tilde{\sigma}(j_0))$ の部分集合と考えるとき，閉集合となっている事に注意する。$G/Z_G(\tilde{\sigma}(j_0))$ の部分空間としての $H/Z_H(\tilde{\sigma}(j_0))$ は，局所コンパクト Hausdorff 空間の閉部分空間として，それ自身局所コンパクト Hausdorff であり，それに，可算基を有する局所コンパクト群 H が推移的に作用しているという情況であるから，$H/Z_H(\tilde{\sigma}(j_0))=H/Z_H(j_0)$ の剰余空間としての固有の位相は，$G/Z_G(\tilde{\sigma}(j_0))$ からの相対位相と一致する。(cf. [松島 8; IV章 §5 定理1 (p.167)]；尚，§2 の定義より，$Z_H(j_0)=Z_H(\tilde{\sigma}(j_0))=Z_G(\tilde{\sigma}(j_0))\cap H$ である事に注意せよ。)
従って，$\Omega=\tilde{\Omega}\cap H/Z_H(j_0)$ は $H/Z_H(j_0)$ のコンパクト部分集合である。この $O_J(j_0)$，ω，Ω に対して，(4.9) が成立する事は，それらの作り方より，次に見るように明らかである。$j\in O_J(j_0)$，$h\in H$，$h.j\in\omega$ と仮定する。すると，
$\tilde{\sigma}(h.j)=h\,\tilde{\sigma}(j)\,\sigma(h)^{-1}=h\,\tilde{\sigma}(j)\,h^{-1}\in\tilde{\sigma}(\omega)=\tilde{\omega}$，$\tilde{\sigma}(j)\in\tilde{O}_{\tilde{J}}(\tilde{\sigma}(j_0))$
従って，補題4.3 (4.10) より，$\dot{h}=h.Z_G(\tilde{\sigma}(j_0))\in\tilde{\Omega}$ よって，
$\bar{h}=h.Z_H(j_0)\in\tilde{\Omega}\cap H/Z_H(j_0)$。 ∎

<u>補題4.4</u>　　A を表2.2 の左列にある集合の一つとし，$j_0\in A'$ (cf. §2.2) とする。 $A\subset J_\ell$ なる各 Cartan 部分空間 J_ℓ

（表2.2の右側を参照せよ）に対し、J_ℓ に於ける j_0 の開近傍 $\mathcal{O}_{J_\ell}(j_0)$ で、以下の性質をみたすものが存在する。

$\mathcal{O}_{J_\ell}(j_0)' = \mathcal{O}_{J_\ell}(j_0) \cap X'$, $\mathcal{O}(j_0)' = \bigsqcup_{A \subset J_\ell} \mathcal{O}_{J_\ell}(j_0)'$ と置く時、任意の $f \in C_c^\infty(X)$ に対して、

$$(4.11) \quad {}_X F_f |_{\mathcal{O}(j_0)'} = {}_{X_A} F_{g_f} |_{\mathcal{O}(j_0)'} \ ; \ \mathrm{supp}\, g_f \subseteqq (H.\mathrm{supp}\, f) \cap X_A$$

となる $g_f \in C_c^\infty(X_A)$ が存在する。

証明　$A \subseteqq J_\ell$ なる各 J_ℓ に対し、命題4.2により定まる、j_0 の J_ℓ に於ける近傍を $\mathcal{O}_{J_\ell}(j_0)$ とする。以下この $\mathcal{O}_{J_\ell}(j_0)$ に対して、補題が成立することを示す。

$j \in \mathcal{O}(j_0)'$ とする時、任意の $f \in C_c^\infty(X)$ に対して、

$$(4.12) \quad {}_X F_f(j) = \int_{H/Z_H(J_\ell)} f(h.j)\, d\tilde{h} \quad (\text{但し} \ J_\ell \ni j)$$

$$= \int_{H/Z_H(A)} \left(\int_{Z_H(A)/Z_H(J_\ell)} f(\bar{h}.\tilde{\xi}.j)\, d\tilde{\xi} \right) d\bar{h}$$

となる。(cf.(4.2))　ここに、([Hirai 3: p.22] にならって) h の属する $Z_H(A)$ coset を $\bar{h}$, $\xi \in Z_H(A)$ の属する、ある ℓ に対する $Z_H(J_\ell)$ coset を $\tilde{\xi}$ と書いた。　命題4.2の記号のもとで、

$$\Omega_f = \bigcup_{A \subset J_\ell} \Omega(\mathrm{supp}\, f, \mathcal{O}_{J_\ell}(j_0))$$

と置くと、Ω_f は $H/Z_H(A)$ のコンパクト集合であり、$h \in H$, $j \in \mathcal{O}(j_0)'$ に対し、$f(h.j) \neq 0$ とすると、$hj \in \mathrm{supp}\, f$ より、$\bar{h} \in \Omega(\mathrm{supp}\, f, \mathcal{O}_{J_\ell}(j_0)) \subseteqq \Omega_f$ となる。(但し $J_\ell \ni j$ とした。)

この事に注意すると，任意の $\bar{h} \in \Omega_f$ なる $h \in H$ に対して．

$$\int_{Z_H(A)} \alpha(h.\xi)\,d\xi \equiv 1$$

が成立する $\alpha = \alpha_{\Omega_f} \in C_c^\infty(H)$ を用いて，$g_f = g_{f,\alpha} \in C_c^\infty(X_A)$ を．

(4.13) $\quad g_f(\eta) = \int_H \alpha(h) f(h.\eta)\,dh$

により定義したとき，明らかに $\mathrm{supp}\, g_f \subseteq H.\mathrm{supp}\, f \cap X_A$ が成立し，更に，(4.12)，α のとり方より，$j \in \mathcal{O}'_{J_\ell}(j_0) \subseteq \mathcal{O}'(j_0)$ に対し．

$$\begin{aligned} {}_XF_f(j) &= \int_H \alpha(h)\left(\int_{Z_H(A)/Z_H(J_\ell)} f(h\xi.j)\,d\tilde{\xi}\right)dh \\ &= \int_{Z_H(A)/Z_H(J_\ell)} \left(\int_H \alpha(h) f(h.\xi.j)\,dh\right) d\tilde{\xi} \\ &= \int_{Z_H(A)/Z_H(J_\ell)} g_f(\xi.j)\,d\tilde{\xi} \end{aligned}$$

が成立する。 ▯

<u>補題 4.5</u> 前の補題と同一の記号を用いる。
$j_0 \in A'$ に対して．j_0 の $X_A = Z_G(A)/Z_H(A)$ に於ける適当な開近傍 U を取る。すると．任意の $g \in C_c^\infty(U)$ に対して．次の性質をみたす $f \in C_c^\infty(X)$ が存在する。

(4.14) $\quad {}_XF_f\Big|_{\bigsqcup_{A \subset J_\ell} J'_\ell} = {}_{X_A}F_g \quad ; \quad \mathrm{supp}\, f \subseteq H.\mathrm{supp}\, g$

<u>略証</u>（cf. [Hirai 3 ; Appendix I]）

S を $H/Z_H(A)$ の原点 $Z_H(A)$ を通る C^ω-局所切断，U を j_0 の

$X_A = Z_G(A)/Z_H(A)$ に於ける適当な(十分小さい)開近傍とする。 $s \in S$ に対して. $sZ_H(A) = \bar{h} \in H/Z_H(A)$ となる時. $s = s(\bar{h})$ と書く事にする。 $\Psi \in C_c^\infty(S)$, $g \in C_c^\infty(U)$ とする. 但し. $\int_{H/Z_H(A)} \Psi(s(\bar{h}))\, d\bar{h} = 1$ とする。

$$(4.15) \qquad f(s.u) = \Psi(s)\, g(u)$$

と置く。 $U_S = \{ s.u \mid s \in S,\ u \in U \}$ は. $X = G/H$ の開集合となる事. U_S の元の $s.u$ の形の分解は一意である事より. 補集合では0と置いて. (4.15) により. $f \in C_c^\infty(X)$ が矛盾なく定義できる。 作り方より明らかに. $\operatorname{supp} f \subseteq H.\operatorname{supp} g$ である。 この f に対して. $j \in J'_\ell \subseteq \bigsqcup_{A \subset J_\ell} J'_\ell$ のとき.

$$
\begin{aligned}
{}_X F_f(j) &= \int_{H/Z_H(J_\ell)} f(h.j)\, d\tilde{h} = \int_{H/Z_H(A)} \int_{Z_H(A)/Z_H(J_\ell)} f(h.\xi.j)\, d\tilde{\xi}\, d\bar{h} \\
&= \int_{H/Z_H(A)} \int_{Z_H(A)/Z_H(J_\ell)} f(s(\bar{h})\xi.j)\, d\tilde{\xi}\, d\bar{h} \\
&= \int_{H/Z_H(A)} \int_{Z_H(A)/Z_H(J_\ell)} \Psi(s(\bar{h}))\, g(\xi.j)\, d\tilde{\xi}\, d\bar{h} \\
&= \int_{H/Z_H(A)} \Psi(s(\bar{h}))\, d\bar{h} \cdot \int_{Z_H(A)/Z_H(J_\ell)} g(\xi.j)\, d\tilde{\xi} \\
&= {}_{X_A}F_g(j)
\end{aligned}
$$

□

semi-regular な半単純元 $j_0 \in A'$ に対して、自然な同一視のもとで、

$$(4.16)\quad j_0 \in \mathcal{O}(j_0) \subsetneq \bigcup_{A \subset J_\ell} J_\ell \subset X_A = Z_G(A)/Z_H(A) \subset X = G/H$$

であった。必要なら、$\mathcal{O}(j_0)$ をさらに小さく取り直すことにより、補題4.4 補題4.5 より次の命題を得る。

<u>命題4.6</u> Aを表2.2の左列にある集合の一つとする。このとき、任意の$j_0 \in A'$に対して、j_0 の $\bigcup_{A \subset J_\ell} J_\ell$ に於ける開近傍 $\mathcal{O}(j_0)$ が存在して、(4.5) の記号のもとで

$$_X\tilde{\mathcal{H}}(\mathcal{O}(j_0)) = {}_{X_A}\tilde{\mathcal{H}}(\mathcal{O}(j_0))$$

が成立する。

X_Aは、X_A^Sと自明な一次元の対称空間X_A^Tの直積であるから、階数1の半単純対称空間X_A^S上の不変積分の全体 $_{X_A^S}\tilde{\mathcal{H}}$ の構造を援用する事により、(cf.[Faraut 2], [Aoki-Kato 1]) 容易に $_{X_A}\tilde{\mathcal{H}} \cong {}_{X_A^S}\tilde{\mathcal{H}} \otimes {}_{X_A^T}\tilde{\mathcal{H}}$ の構造はわかる。従って、上の命題4.6により、$_X\tilde{\mathcal{H}}(\mathcal{O}(j_0))$ の構造がわかる。この事から、双対空間に移る事により、$_X\tilde{\mathcal{H}}(\mathcal{O}'(j_0))$、従って、それと$F'$を媒介として同一視できる、$j_0$のまわりでの H-不変 Schwartz 超関数の全体がわかる。

§5. singular I. D.

本節では、semi-regular な半単純元 $\mathfrak{z}_0$ を、表 2.2 に列挙した各 A 内に取った時、前節の応用として得られる事柄のいくつかを述べ、次節への準備をする。事情は $\mathfrak{z}_0$ の属する A が、

I. 複数の Cartan 部分空間 $\mathfrak{J}_\ell$ $(\ell=0,1,2)$ に含まれる場合……A_1, A_0

II 唯一つの Cartan 部分空間 $\mathfrak{J}_\ell$ $(\ell=0,1,2)$ に含まれる場合…A_+, A_-, A_2, A_{-1}

のいずれかによって、多少違なってくる。が、$\mathfrak{z}_0$ のまわりで、まず、不変積分の形を前節の結果を適用して、各 A の場合ごとに求め、それによって、$\mathfrak{J}_\ell'$ $(\mathfrak{J}_\ell \supset A)$ 上で 0 となる $\mathcal{H}'$ の元に対応する H-不変超関数即ち、singular な(台を持つ)不変超関数を確定し、さらに、$(L_1+L_2-\lambda_1-\lambda_2)F_f$ 又は $(L_1^*+L_2^*-\lambda_1-\lambda_2)M_f$ 等を計算する事により、不変微分作用素の、singular な台をもつ不変超関数への作用のし方を調べるという方針は同一である。このsingularな不変超関数については、$\Omega_1-\lambda_1-\lambda_2$ の作用が"次数"をあげる(cf. (5.9) (5.10)　)という事実が基本的である。

表2.2を見てみよう。II に属する A の場合は、X_A^s は、コンパクト対称空間又はリーマン対空間となっている。従って、不変積分はコンパクト部分群上の積分という形で定義される事になり、$\mathfrak{z}_0$ のまわりでは、不変積分 F_f は C^∞ 関数に拡張され、その全体は、所定の対称性をみたす $\mathfrak{J}_\ell(\ni\mathfrak{z}_0)$ 上の C^∞ 関数の全体と

一致する。 Ｉに属する $\mathbb{A}$ の場合は、不変積分の $\mathfrak{j}_0$ のまわりでの形は、もう少し複雑である。 以下、上記の方針による singular な台をもつ不変超関数の研究を、よりこみいっているＩの場合について、やや詳しく記述し、Ⅱに属する場合については、Ｉの場合とほぼ同様の方法により、① I.E.D. の研究に際し、singular な台をもつ不変超関数の寄与を考慮する必要は無い。（特に、singular な台をもつ I.E.D. は（$\mathfrak{j}_0$ のまわりでは）存在しない。） ② J_ℓ' 上の関数 $u_\ell = \omega \Theta_{|J_\ell'}$（$\Theta \in \mathcal{D}'_{X_{\lambda_1,\lambda_2,H}}(X)$）は $\mathfrak{j}_0$ のまわりでは、解析的に接続される。 という事実が、結論される事を述べるにとどめる。（$\mathbb{A}=\mathbb{A}_+, \mathbb{A}_-$ については cf. [Aoki-Kato 1; Appendix]）

5.1. $\mathbb{A} = \mathbb{A}_1$ の場合

$\mathbb{A} = \mathbb{A}_1$ の場合には、$X_{\mathbb{A}_1} = X^S_{\mathbb{A}_1} \times X^T_{\mathbb{A}_1} = U(3,1)/(U(1)\times U(2,1)) \times \mathbb{R}$ である（表 2.2）${}_+X^T_{\mathbb{A}_1} = \{t \mid t>0\} \cong \{\tau \mid \tau > 1\}$ $(\tau = ch^2 t)$, ${}_+X_{\mathbb{A}_1} = X^S_{\mathbb{A}_1} \times {}_+X^T_{\mathbb{A}}$ とおく。直積の第2項は τ_2 に対応している。 ${}_{{}_+X_{\mathbb{A}_1}}\tilde{\mathcal{H}} \cong {}_{X^S_{\mathbb{A}_1}}\tilde{\mathcal{H}} \,\overline{\otimes}\, {}_{{}_+X^T_{\mathbb{A}_1}}\tilde{\mathcal{H}} = {}_{U(3,1)/(U(1)\times U(2,1))}\tilde{\mathcal{H}} \,\overline{\otimes}\, C_c^\infty(\{\tau_2 \mid \tau_2 > 1\})$ であるから、階数 1 の場合の結果（cf. [Faraut 2; P.380], [Aoki-Kato 1]）から、この場合、$Y(x)$ を Heaviside 関数とすれば、

$$(5.1)\quad {}_{X^S_{\mathbb{A}_1}}\tilde{\mathcal{H}} = \{ (1-\tau)^{-\mu}\varphi_0(\tau) + Y(1-\tau)\varphi_1(\tau) \mid \varphi_0, \varphi_1 \in C_c^\infty([0,\infty))\}$$

となる事と、 $C_c^\infty((1,\infty)) = \{(1-\tau)^{-\mu}\phi(\tau) \mid \phi \in C_c^\infty((1,\infty))\}$ から、

$$(5.2)\quad {}_{{}_+X_{\mathbb{A}_1}}\tilde{\mathcal{H}} = {}_{X_{\mathbb{A}_1}}\tilde{\mathcal{H}}({}_+X_{\mathbb{A}_1}) = \{(1-\tau_1)^{-\mu}(1-\tau_2)^{-\mu}\phi_0(\tau_1,\tau_2) + Y(1-\tau_1)\phi_1(\tau_1,\tau_2) \mid \phi_i \in C_c^\infty([0,\infty)\times(1,\infty))\}$$

$$= \{ (1-\tau_1)^{-\mu} \phi_0(\tau_1,\tau_2) + \Upsilon(1-\tau_1)\phi_1(\tau_1,\tau_2) \mid \phi_i \in C_c^\infty([0,\infty)\times(1,\infty)) \}$$

が成立する。従って．§4（(4.11)，命題4.6）により $j_0 \in A_1$ のまわりで．次の漸近展開が、成立する。

$$(5.3.)\ \omega F_f(\tau_1,\tau_2) \sim \sum_{m=0}^{\infty} A_m(f,\tau_2)(1-\tau_1)^{m-\mu} + \Upsilon(1-\tau_1)\sum_{m=0}^{\infty} B_m(f,\tau_2)(1-\tau_1)^m$$

ここに．$A_m(f,\cdot)$，$B_m(f,\cdot)$ は（$f \in C_c^\infty(X)$ の台に応じて．適当な台を持つ）C^∞-級関数である。

${}_{X^S_{A_1}}\tilde{\mathcal{H}}'$ の元 A_m, B_m を．

$$(5.4)\quad \begin{aligned} A_m(\varphi) &= \frac{\varphi_0^{(m)}(1)}{m!} \\ B_m(\varphi) &= \frac{\varphi_1^{(m)}(1)}{m!} \end{aligned} \qquad \varphi(\tau) = (1-\tau)^{-\mu}\varphi_0(\tau) + \Upsilon(1-\tau)\varphi_1(\tau) \in {}_{X^S_{A_1}}\tilde{\mathcal{H}}$$

によって定める。直積分解 ${}_{+}X_{A_1} = X^S_{A_1} \times {}_{+}X^T_{A_1}$ に従って．$\alpha, \beta \in \mathcal{D}'((1,\infty))$ に対し．

$$(5.5)\quad \begin{aligned} \langle A_m \otimes \alpha, \phi \rangle &= \langle \alpha_m, \frac{1}{m!}\frac{\partial^m \omega\phi_0}{\partial \tau_1^m}(1,\cdot) \rangle \\ \langle B_m \otimes \beta, \phi \rangle &= \langle \beta_m, \frac{1}{m!}\frac{\partial^m \omega\phi_1}{\partial \tau_1^m}(1,\cdot) \rangle \end{aligned} \;:\; \phi(\tau_1,\tau_2) = (1-\tau_1)^{-\mu}\phi_0(\tau_1,\tau_2) + \Upsilon(1-\tau_1)\phi_1(\tau_1,\tau_2) \in {}_{X_{A_1}}\tilde{\mathcal{H}}$$

により．${}_{+X_{A_1}}\tilde{\mathcal{H}}'$ の元 $A_m\otimes\alpha$, $B_m\otimes\beta$ を定める。$A_m\otimes\alpha$, $B_m\otimes\beta$ は ${}_{+X_{A_1}}\mathcal{H}'$ の対応する元と同一視するばかりでなく，命題4.6 によって．局所的に．${}_X\tilde{\mathcal{H}}'$ 又は ${}_X\mathcal{H}'$ の対応する元と同一視し．さらに．$\mathcal{D}'_H(X)$ の対応する元と局所的に同一視する事にする。

このように．$A_m\otimes\alpha$, $B_m\otimes\beta$ を局所的に．$\mathcal{D}'_H(X)$ の元と同一視すると．$f \in C_c^\infty(X)$ を台が適当な集合に入るものとするとき．

$$(5.6)\quad \langle A_m\otimes\alpha, f\rangle = \langle \alpha, A_m(f,\cdot)\rangle\ ;\ \langle B_m\otimes\beta, f\rangle = \langle \beta, B_m(f,\cdot)\rangle$$

が、成立する事になる。(cf. (5.3))。

$\mathbb{A}=\mathbb{A}_0$ 場合にも、$X_{\mathbb{A}_0}=X^S_{\mathbb{A}_0}\times X^T_{\mathbb{A}_0}=U(2,2)/(U(1)\times U(1,2))\times\mathbb{T}$

であり、右辺の直積の第一項は変数 τ_2 に対応している。${}_{X_{\mathbb{A}_0}}\tilde{\mathcal{H}}=$ ${}_{X^S_{\mathbb{A}_0}}\tilde{\mathcal{H}}\,\hat{\otimes}\,C^\infty_c(\mathbb{T})$ であり、${}_{X^S_{\mathbb{A}_0}}\tilde{\mathcal{H}}\cong{}_{X^S_{\mathbb{A}_1}}\tilde{\mathcal{H}}$ であるから、$\mathbb{A}=\mathbb{A}_1$ の場合と同様にして、${}_{+}X_{\mathbb{A}_0}=X^S_{\mathbb{A}_0}\times\{\tau_1\,|\,1>\tau_1\geq 0\}\simeq X^S_{\mathbb{A}_0}\times\{\theta_1\,|\,\frac{\pi}{2}\geq\theta_1>0\}\subset X_{\mathbb{A}_0}$ に対し、

$$(5.2)'\quad {}_{{}_+X_{\mathbb{A}_0}}\tilde{\mathcal{H}}=\left\{(1-\tau_1)^{-\mu}(1-\tau_2)^{-\mu}\phi_0(\tau_1,\tau_2)+Y(1-\tau_2)\phi_1(\tau_1,\tau_2)\;\middle|\;\begin{array}{l}\phi_i\in\\ C^\infty_c([0,1)\times[0,\infty))\end{array}\right\}$$
$$=\left\{(1-\tau_2)^{-\mu}\phi_0(\tau_1,\tau_2)+Y(1-\tau_2)\phi_1(\tau_1,\tau_2)\;\middle|\;\begin{array}{l}\phi_i\in\\ C^\infty_c([0,1)\times[0,\infty))\end{array}\right\}$$

である。従って、$j_0\in\mathbb{A}_0$ のまわりで、

$$(5.3)'\quad \omega F_f(\tau_1,\tau_2)\sim\sum_{m=0}^{\infty}E_m(f,\tau_1)(1-\tau_2)^{m-\mu}+Y(1-\tau_2)\sum_{m=0}^{\infty}F_m(f,\tau_1)(1-\tau_2)^m$$

という漸近展開が成立する。$\mathbb{A}=\mathbb{A}_1$ の場合と同様にして、

$$(5.6)'\quad \langle E_m\otimes\gamma,f\rangle=\langle\gamma,E_m(f,\cdot)\rangle\;;\quad\langle F_m\otimes\delta,f\rangle=\langle\delta,F_m(f,\cdot)\rangle$$

が成立するように、任意の $\gamma,\delta\in\mathcal{D}'([0,1))$ に対して、$E_m\otimes\gamma$, $F_m\otimes\delta$ を定め、これを(局所的に)適宜、$\mathcal{D}'_H(X)$, ${}_X\tilde{\mathcal{H}}'$, ${}_X\mathcal{H}'$, ${}_{X_{\mathbb{A}_0}}\tilde{\mathcal{H}}'$, ${}_{X_{\mathbb{A}_0}}\mathcal{H}'$ の元とみなすことにする。$\mathbb{A}=\mathbb{A}_0$ の場合は、$\mathbb{A}=\mathbb{A}_1$ の場合と本質的な差異はないので、以下、$\mathbb{A}=\mathbb{A}_1$ の場合のみについて述べる事にする。

我々は超関数としては、Schwartz超関数を考えている。従って、相対コンパクトな開集合への制限は order が有限となる。

<u>補題 5.1</u>　任意の $j_0\in\mathbb{A}_1$ に対し、その $J_1\cup J_2$ に於ける適当な開近傍 $\mathcal{O}(j_0)$ を取ると、${}_X\tilde{\mathcal{H}}'$ の元で $\tau_1=1$ に台を持つものは、$\mathcal{O}(j_0)$ 上、$A_m\otimes\alpha_m$, $B_m\otimes\beta_m$ $(\alpha_m,\beta_m\in\mathcal{D}'([1,\infty)))$ の有限

和に限る。

我々は補題5.1.に現われる超関数のように、$X-X'$ 内に台を持つ X(の開集合)上の H-不変な Schwartz 超関数を、singular な(台を持つ)不変超関数(singular I.D. と略す)と呼ぶ。

$A_m, B_m \in X^{s}_{A_1}\tilde{\mathcal{H}}'$ が $\mathbb{C}$上一次独立である事から、次が成立する。

<u>補題 5.2.</u>

$$\sum_{m=0}^{\infty}(A_m \otimes \alpha_m + B_m \otimes \beta_m) \equiv 0 \quad \text{ならば} \quad \alpha_m \equiv \beta_m \equiv 0$$

$\alpha_m \in \mathcal{D}'((1,\infty))$ を A_m の係数、$\beta_m \in \mathcal{D}'((1,\infty))$ を B_m の係数と呼ぶ。

次に、不変微分作用素(の動径部分)が singular I.D. $A_m \otimes \alpha_m$, $B_m \otimes \beta_m$ にどのように作用するかを調べる。§5 のはじめに述べたように、不変微分作用素の動径部分の不変積分 F_f への作用を計算する事によって、調べれば良いが、$A = A_1$ の場合には、階数1の半単純対称空間 $X^{s}_{A_1}$ に於いて、その方針で既に求めた結果(cf [Aoki-Kato 1; Lemma 2.3])が利用可能である。そこで、階数1の場合の結果を引用しよう。次の l_m, $\tilde{l}_m$ $(m \in \mathbb{Z})$ に対し、

$$(5.7) \qquad \begin{aligned} l_m &= 4(m+1)(m-\mu) \\ \tilde{l}_m &= -4(m+1)(m+1-\mu) \end{aligned}$$

$$(5.8) \qquad \begin{aligned} L\,A_m &= l_m A_m + \tilde{l}_m A_{m+1} \\ L\,B_m &= l_{m+\mu} B_m + \tilde{l}_{m+\mu} B_{m+1} \end{aligned}$$

が成立する。 ここで，(5.7) において，$m \geqq 0$ で $\tilde{\ell}_m = 0$ となるのは，$m = \mu - 1$ の時に限る事に注意する。(5.8) より，

$$(5.9)\quad \begin{aligned}(L_1+L_2)\,A_m\otimes\alpha_m &= L_1 A_m\otimes\alpha_m + A_m\otimes L_2\alpha_m \\ &= A_m\otimes(L_2+\ell_m)\alpha_m + \tilde{\ell}_m A_{m+1}\otimes\alpha_m \\ (L_1+L_2)\,B_m\otimes\beta_m &= L_1 B_m\otimes\beta_m + B_m\otimes L_2\beta_m \\ &= B_m\otimes(L_2+\ell_{m+\mu})\beta_m + \tilde{\ell}_{m+\mu} B_{m+1}\otimes\beta_m\end{aligned}$$

$$(5.10)\quad \begin{aligned}(L_1L_2)\,A_m\otimes\alpha_m &= L_1 A_m\otimes L_2\alpha_m \\ &= \ell_m A_m\otimes L_2\alpha_m + \tilde{\ell}_m A_{m+1}\otimes L_2\alpha_m \\ (L_1L_2)\,B_m\otimes\beta_m &= \ell_{m+\mu} B_m\otimes L_2\beta_m + \tilde{\ell}_{m+\mu} B_{m+1}\otimes L_2\beta_m \quad 。\end{aligned}$$

従って簡単な計算により，次の命題を得る。

<u>命題 5.3</u>　　$\alpha_{-1} \equiv \beta_{-1} \equiv 0$ とおく。

$$\begin{aligned}&(L_1+L_2-\lambda_1-\lambda_2)\sum_{m\geqq 0}(A_m\otimes\alpha_m + B_m\otimes\beta_m) \\ &= \sum_{m\geqq 0}\left[A_m\otimes\{(L_2+\ell_m)\alpha_m + \tilde{\ell}_{m-1}\alpha_{m-1}\} + B_m\otimes\{(L_2+\ell_{m+\mu})\beta_m + \tilde{\ell}_{m+\mu-1}\beta_{m-1}\}\right] \\ &= \sum_{m\geqq 0}\left[A_m\otimes\{L_2+4(m+1)(m-\mu)\alpha_m - 4m(m-\mu)\alpha_{m-1}\}\right. \\ &\qquad \left.+ B_m\otimes\{(L_2+4(\mu+m+1)m)\beta_m - 4m(m+\mu)\beta_{m-1}\}\right]\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}&L_1L_2.\sum_{m\geqq 0}(A_m\otimes\alpha_m + B_m\otimes\beta_m) \\ &= \sum_{m\geqq 0}\left[A_m\otimes\{\ell_m L_2\alpha_m + \tilde{\ell}_{m-1}L_2\alpha_{m-1}\} + B_m\otimes\{\ell_{m+\mu}L_2\beta_m + \tilde{\ell}_{m+\mu-1}L_2\beta_{m-1}\}\right] \\ &= \sum_{m\geqq 0}\left[A_m\otimes\{4(m+1)(m-\mu)L_2\alpha_m - 4m(m-\mu)L_2\alpha_{m-1}\}\right. \\ &\qquad \left.+ B_m\otimes\{4(\mu+m+1)mL_2\beta_m - 4(\mu+m)mL_2\beta_{m-1}\}\right]\end{aligned}$$

注意：我々の実際の計算（§6）で必要となる $A_m\otimes\alpha_m$, $B_m\otimes\beta_m$ については，α_m, β_m はすべて実解析的関数となっている。（§6 の (6.11)，補題6.5，補題6.12を参照せよ。）

(5.9)式，又は命題5.3 の系として得られる次の補題は，§6 に於いて用いられる。（§6.1 (6.11) の付近を参照せよ。）

<u>補題 5.4.</u>

(5.11) $(L_1+L_2-\lambda_1-\lambda_2)\sum_{m\geqq 0}(A_m\otimes\alpha_m+B_m\otimes\beta_m) = B_0\otimes b+\sum_{0\leqq m\leqq\mu}A_m\otimes a_m$

という等式を満足する $\alpha_m, \beta_m, b, a_m \in \mathcal{D}'((1,\infty))$ に対して，次の (5.12) が成立する。

$$(5.12)\quad \begin{aligned} &b\equiv 0\ ,\quad a_\mu\equiv 0\\ &\alpha_m\equiv 0\quad (m\geqq\mu)\quad ;\quad \beta_m\equiv 0\ (\forall m\geqq 0)\end{aligned}$$

<u>証明</u> $j_0={}_1j_{0,t_2}={}_2j_{0,t_2}\in A_1'$ とする。j_0 の $J_1\cup J_2$ に於ける十分小さな近傍 $\Theta(j_0)$ とそれに対応する $\tau_2=ch^2t_2$ (cf.(2.7)) の近傍 I を適当に取り，

$$m_A = \max(\{m\in\{0,1,2,\cdots\}\mid \alpha_{m|_I}\neq 0\}\cup\{-1\})$$

$$m_B = \max(\{m\in\{0,1,2,\cdots\}\mid \beta_{m|_I}\neq 0\}\cup\{-1\})$$

と置く。すると，補題5.1 により，$m_A<\infty$，$m_B<\infty$ である。命題5.3 より，

$$(5.13)\quad \begin{aligned}&(L_1+L_2-\lambda_1-\lambda_2)\Big(\sum_{m\leqq m_A}A_m\otimes\alpha_m+\sum_{m\leqq m_B}B_m\otimes\beta_m\Big)\\ &=-4(m_A+1)(m_A+1-\mu)A_{m_A+1}\otimes\alpha_{m_A}-4(\mu+m_B+1)(m_B+1)B_{m_B+1}\otimes\beta_{m_B}\\ &\quad+\sum_{m\leqq m_A}A_m\otimes\tilde{\alpha}_m+\sum_{m\leqq m_B}B_m\otimes\tilde{\beta}_m\end{aligned}$$

という等式が適当な $\tilde{\alpha}_m, \tilde{\beta}_m \in \mathcal{D}'((1,\infty))$ に対して成立する。これが $\mathcal{O}(j_0)$ 上、$B_0 \otimes b + \sum_{m \leq \mu} A_m \otimes a_m$ と等しいのだから、補題5.2より、A_m, B_m の対応する係数は、$\tau_2 = ch^2 t_2$ の近傍 I 上で等しい。従って、$m_A \geq \mu$ と仮定すると、A_{m_A+1} の係数を比較する事により、τ_2 のその近傍 I で、$4(m_A+1)(m_A+1-\mu)\alpha_{m_A} \equiv 0$ が成立する事になるが、これは明らかに矛盾である。従って、$m_A < \mu$。同様に $m_B \geq 0$ と仮定すると、B_{m_B+1} の係数を比較する事により I 上 $4(\mu + m_B + 1)(m_B+1)\beta_{m_B} \equiv 0$ となり矛盾する。よって $m_B = -1$、即ち任意の $m \geq 0$ に対して、I 上 $\beta_m \equiv 0$ である。従って B_0 の係数を比較して、I 上、$b \equiv 0$。(5.13)式の左辺では、A_μ の係数は、$m_A \leq \mu - 2$ なら明らかに 0 であり、$m_A = \mu - 1$ なら、$4(m_A+1)(m_A+1-\mu) = 0$ より 0 となるから、A_μ の係数を比較して、$a_\mu \equiv 0$ が I 上成立する。以上により、(5.12)が I 上成立する事が示された。$j_0 = {}_1j_{0,t_2} = {}_2j_{0,t_2}$ が A_1' を動くとき、$\tau_2 = ch^2 t_2$ は $(1,\infty)$ 全体を動き、従って τ_2 の近傍 I の和集合は $(1,\infty)$ と一致するから、結局、(5.12)が $(1,\infty)$ 全体で成立する事になる。$\square$

5.2 各Cartan部分空間内での条件

$u_\ell(\tau_1,\tau_2) = u_\ell(\tau_1,\tau_2;\lambda_1,\lambda_2)$ を、$(\mathfrak{I}(\Omega_1) - \lambda_1 - \lambda_2)\omega^{-1}u_\ell = 0, (\mathfrak{I}(\Omega_2) - \lambda_1\lambda_2)\omega^{-1}u_\ell = 0$

を満たす J_ℓ' 上の Weyl 群不変な関数とする。$(\ell=0,1,2)$ すると、補題 3.5. より、

i) $\chi_{\lambda_1,\lambda_2}$ が regular のとき、

$$(5.14)\quad {}_\ell u(\tau_1,\tau_2)=\sum_{\substack{i,j=1,2\\k=1,2}} {}_\ell C_{ij}^k F_i(\tau_1,\lambda_k)F_j(\tau_2,\lambda_{k'}) \quad ({}_\ell C_{ij}^k\in\mathbb{C})$$

ii) $\chi_{\lambda_1,\lambda_2}$ が singular のとき、$\lambda=\lambda_1=\lambda_2$ と置くと、

$$(5.15)\quad {}_\ell u(\tau_1,\tau_2)=\sum_{i,j=1,2,3,4} {}_\ell C_{ij} F_i(\tau_1,\lambda)F_j(\tau_2,\lambda) \quad ({}_\ell C_{ij}\in\mathbb{C})$$

但し、

$$(5.16)\quad {}_\ell C_{i+2,j}=-{}_\ell C_{i,j+2},\quad {}_\ell C_{i+2,j+2}=0 \quad \left(\begin{smallmatrix}\ell=0,1,2\\ i,j=1,2\end{smallmatrix}\right)$$

が成り立つ。

u_ℓ を自然に $H.J_\ell'$ 上の H-不変超関数とみなしたものを Θ_{u_ℓ}' とする。

$$(5.17)\quad \langle\Theta_{u_\ell}',f\rangle = w_\ell'\int_{J_\ell'} u_\ell(\tau_1,\tau_2)\,M_f(\tau_1,\tau_2)\,d\tau_1 d\tau_2$$

(但し、$f\in C_c^\infty(H.J_\ell')$, $w_0'=w_2'=\frac{1}{2}$, $w_1'=1$)

が成立する。Θ_{u_ℓ}' は $\bigsqcup_{k\neq\ell} H.J_k'$ で 0 とする事によって自然に、$X'=\bigsqcup_{\ell=0,1,2} H.J_\ell'$ 上の I.E.D. と考える事が出来る。

以下、P. 5-2 で述べた事実（①, ② 特に ②）にもとづく、Θ_{u_ℓ}' が $\overline{(H.J_\ell')}^{\circ}$ 上の I.E.D. に拡張出来るための条件を述べる。これは、いわば、u_ℓ が、X 上の I.E.D. の構成要素となるための、各 Cartan 部分空間 J_ℓ 内での条件である。

(5.18): $a_0(\lambda,\mu)=\dfrac{\Gamma(\mu)}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)}$

$b_0(\lambda,\mu)$ は $a_0(\lambda,\mu)=0$ のとき $b(\lambda,\mu)\neq0$ となる λ,μ のある関数

とする。また、

(5.19) $\quad \mathcal{O}_\ell = (\overline{H.J_\ell'})^\circ \quad (\ell = 1, 2)$; $\quad \mathcal{O}_0 = (\overline{H.J_0'})^\circ - H_0 j_{\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}} H$

と置く。 すると、以上の条件と記号のもとで、次の命題が成立する。

命題 5.5 各 $\ell = 0, 1, 2$ に対して、Θ'_{u_ℓ} が $\mathcal{O}_\ell$ 上の I.E.D. に拡張可能であるための必要十分条件は、Θ'_{u_ℓ} の infinitesimal character $\chi_{\lambda_1,\lambda_2}$ が regular か singular かに応じて、以下の条件 ℓ) が成立する事である。拡張可能な場合には、拡張は一意で、それは、任意の $f \in C_c^\infty(\mathcal{O}_\ell)$ に対して、上の (5.17)式の右辺を対応させる Schwartz 超関数である。

i) $\chi_{\lambda_1,\lambda_2}$ が regular な場合

$$0)\begin{cases} {}_0C^k_{1j} \times a_0(\lambda_k, \mu) = {}_0C^k_{2j} \times b_0(\lambda_k, \mu) & \begin{pmatrix} k = 1,2 \\ j = 1,2 \end{pmatrix} \\ {}_0C^k_{ij} + {}_0C^{k'}_{ji} = 0 & \begin{pmatrix} k = 1,2 \\ i,j = 1,2 \end{pmatrix} \end{cases}$$

$$1)\quad {}_1C^k_{1j} \times a_0(\lambda_k, \mu) = {}_1C^k_{2j} \times b_0(\lambda_k, \mu) \quad \begin{pmatrix} k = 1,2 \\ j = 1,2 \end{pmatrix}$$

$$2)\quad {}_2C^k_{ij} + {}_2C^{k'}_{ji} = 0 \quad \begin{pmatrix} k = 1,2 \\ i,j = 1,2 \end{pmatrix}$$

ii) $\chi_{\lambda_1,\lambda_2}$ が singular な場合

$$0)\begin{cases} {}_0C_{1+m,j} \times a_0(\lambda, \mu) = {}_0C_{2+m,j} \times b_0(\lambda, \mu) & \begin{pmatrix} j = 1,2 \\ m = 0,2 \end{pmatrix} \\ ({}_0C_{ij})_{i,j=1,\dots,4} \text{ は } \ell = 0 \text{ に対し (5.16) をみたす歪対称行列} \end{cases}$$

1) ${}_1C_{1+m,j} \times a_0(\lambda,\mu) = {}_1C_{2+m,j} \times b_0(\lambda,\mu) \left(\begin{smallmatrix} j=1,2 \\ m=0,2 \end{smallmatrix}\right)$; $({}_1C_{ij})_{i,j=1,\cdots,4}$ は (5.16) を満たす

2) $({}_2C_{ij})_{i,j=1,\cdots,4}$ は $l=2$ に対し、(5.16) を満たす歪対称行列

注意：① $a_0(\lambda,\mu)=0$ と $\lambda \in \Delta_d$ は同値である。

② i) 0), 2) の「${}_lC^k_{ij} + {}_lC^k_{ji} = 0 \left(\begin{smallmatrix} i,j=1,2 \\ k=1,2 \end{smallmatrix}\right)$」という条件や

ii) 0) 2) の「$({}_lC_{ij})_{i,j=1,\cdots,4}$ は(5.16)を満たす歪対称行列」という条件

は、u_l が $\tau_1=\tau_2$ で実解析的であり、τ_1,τ_2 について対称である事実の反映である。

③ i) 0) 1) の「${}_lC^k_{1j} \times a_0(\lambda_k,\mu) = {}_lC^k_{2j} \times b_0(\lambda_k,\mu) \left(\begin{smallmatrix} k=1,2 \\ j=1,2 \end{smallmatrix}\right)$」

ii) 0) 1) の「${}_lC_{1+m,j} \times a_0(\lambda,\mu) = {}_0C_{2+m,j} \times b_0(\lambda,\mu) \left(\begin{smallmatrix} j=1,2 \\ m=0,2 \end{smallmatrix}\right)$」

は、u_l が $\tau_1=0$ で実解析的である事実に対応する。

$\bar{F}_i(\tau,\lambda)$ を $(L-\lambda)F=0$ の $[0,1)$ に於ける解空間の基底で $\bar{F}_1(0,\lambda)=1$ となるものとする。この時、

$$(\bar{F}_1(\cdot,\lambda), \bar{F}_2(\cdot,\lambda)) = (F_1(\cdot,\lambda), F_2(\cdot,\lambda)) \begin{bmatrix} b_0(\lambda,\mu) & b_1(\lambda,\mu) \\ a_0(\lambda,\mu) & a_1(\lambda,\mu) \end{bmatrix}$$

が成り立つ事に注意。($b_1(\lambda,\mu)$, $a_1(\lambda,\mu) \in \mathbb{C}$)

④ 現在のところ、正確に証明できてはいないが、上の $\mathcal{O}_0$ のかわりに、$\mathcal{O}_0 = \overline{(H.J_0')}$ としても上の命題は成立するものと思われる。(cf. P.5-12 ; 付録)

最後に、注意④に関連して、本稿では除外点とした3点、

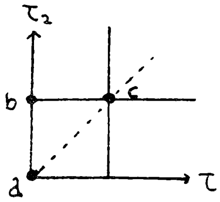


図 5.1

${}_0 j_{\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}} H$ （左図のa），${}_0 j_{\frac{\pi}{2},0} H = {}_1 j_{\frac{\pi}{2},0} H$ （左図のb）

（原点）$= eH = {}_0 j_{0,0} H = {}_1 j_{0,0} H = {}_2 j_{0,0} H$ （左図のc）

についてコメントする。(cf. §1, p.1-3; §6, p.6-1)

便宜上、この3点をa, b, c. と書く事にすると、

$$Z_G(a)/Z_H(a) \cong U(4)/(U(2)\times U(2)) \ ; \quad Z_G(b)/Z_H(b) \cong U(1,1)/(U(1)\times U(1)) \times U(2)/(U(1)\times U(1))$$

$Z_G(c)/Z_H(c) = G/H = X$ 　となる。ともに階数2の半単純対称空間である。この点に、階数1の半単純対称空間と自明な対称空間の直積となった semi-regular の場合（cf. 表2.2）との相違がある。しかし、a, bの場合については、Xより真に次元のさがった対称空間になっており、しかも、aの場合、コンパクト対称空間である。一方、不変積分の研究の出発点となった A Theorem of compacity（命題4.2）は一般の半単純元に対し、確立されていて、a, b に適用可能である。従って、以下aを例に略述する様に、我々の方針（§1, 1.1）内で a, b を取扱えるとの期待が持てる。そうだとすると、格別に難しいのは c（従って原点と nilpotent variety N）という事になる。

$a = {}_0 j_{\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}} H$ を取扱う方針（cf. 注意④）

：$j_0 = a$ に対して、命題4.6（の類似）を示し、それによって、コンパクト対称空間 $U(4)/U(2)\times U(2)$ に帰着させて、aのまわりでは $\{F_f \mid f \in C_c^\infty(X)\}$ は所定の対称性をもつ C^∞ 関数全体と一致する事を見る。不変微分作用素の動径部分はわかっているから、それを、singular I.D.，u_ℓ の正則化（e.g. 有限部分）、に作用させ計算結果をつき合わせる。

§6. 定理1.1の証明

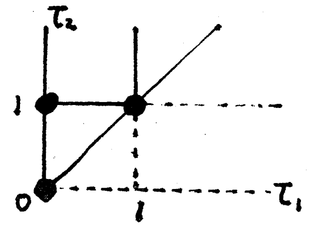
この節で我々は前節までの結果を用いて定理1.1を証明する。以下，簡単のため，$f\in C_c^\infty(X)$ に対し，

$$Mf(\tau_1,\tau_2)=\omega(1-\tau_1)^{\mu}(1-\tau_2)^{\mu}F_f(\tau_1,\tau_2)\qquad(\mu=2) \tag{6.1}$$

とおく。また $X_0=\{x\in X\,;\ \tilde{\sigma}(x)$ の固有値に ±1 と異なるものが存在$\}$ とおき，以下 $C_c^\infty(X)$ の代わりに専ら，

$$C_c^\infty(X_0)\equiv\{f\in C_c^\infty(X)\,;\ \mathrm{supp}\,f\subset X_0\}$$

の方を考える。これは Mf の $(\tau_1,\tau_2)=(1,1),(0,1),(0,0)$ における挙動を著者達はまだ良く理解をしていないためである（cf. 付録 P. A-1）。



$X\setminus X_0$ に対応する部分
（●で示したところ）
図 6.1

はじめに我々は $f\in C_c^\infty(X_0)$ に対して，積分：

$$\begin{aligned}&\int_{J_\ell}u_\ell(\tau_1,\tau_2)\,F_f(\tau_1,\tau_2)\,\omega(1-\tau_1)^{\mu}(1-\tau_2)^{\mu}\,d\tau_1 d\tau_2\\ &=\int_{J_\ell}u_\ell(\tau_1,\tau_2)\,Mf(\tau_1,\tau_2)\,d\tau_1 d\tau_2\end{aligned} \tag{6.2}$$

を考える。この積分自身は u_ℓ の表示式（補題3.5）及び Mf の $(\tau_1,\tau_2)=(1,\tau_2)$ あるいは $(\tau_1,1)$ のまわりの漸近挙動（(5.3) 及び (5.3)$'$）から分かるように一般には収束しない。実際 $f\in C_c^\infty(X_0)$ とする時，J_ℓ $(\ell=0,1,2)$ 上の積分はそれぞれ，$0<\delta_1,\delta_2<1$ に対して，

(i) $\displaystyle\int_0^{1-\delta_1}d\tau_1\int_0^{1-\delta_2}d\tau_2\,u_0(\tau_1,\tau_2)\,Mf(\tau_1,\tau_2)$

$$=\zeta_0(\delta_2)\frac{1}{\delta_1}+\zeta_0'(\delta_2)\log\delta_1+\xi_0(\delta_1)\frac{1}{\delta_2}+\xi_0'(\delta_1)\log\delta_2+G_0(\delta_1,\delta_2)$$

(ii) $\int_0^{1-\delta_1} d\tau_1 \int_{1+\delta_2}^{\infty} d\tau_2\, u_1(\tau_1,\tau_2) Mf(\tau_1,\tau_2)$

$$= \zeta_1(\delta_2)\frac{1}{\delta_1} + \zeta_1'(\delta_2)\log\delta_1 + \xi_1(\delta_1)\frac{1}{\delta_2} + \xi_1'(\delta_1)\log\delta_2 + G_1(\delta_1,\delta_2)$$

(iii) $\int_{1+\delta_1}^{\infty} d\tau_1 \int_{1+\delta_2}^{\infty} d\tau_2\, u_2(\tau_1,\tau_2) Mf(\tau_1,\tau_2)$

$$= \zeta_2(\delta_2)\frac{1}{\delta_1} + \zeta_2'(\delta_2)\log\delta_1 + \xi_2(\delta_1)\frac{1}{\delta_2} + \xi_2'(\delta_1)\log\delta_2 + G_2(\delta_1,\delta_2)$$

と表わせる。 ここで，ζ_i, ζ_i' はそれぞれ $\lim_{\delta_2\to+0}\zeta_i(\delta_2)$，$\lim_{\delta_2\to+0}\zeta_i'(\delta_2)$ が存在するような δ_2 の函数，ξ_i, ξ_i' は $\lim_{\delta_1\to+0}\xi_i(\delta_1)$，$\lim_{\delta_1\to+0}\xi_i'(\delta_1)$ が存在するような δ_1 の函数，また $G_i(\delta_1,\delta_2)$ は，$G_i(0,0) = \lim_{\substack{\delta_1\to+0\\ \delta_2\to+0}} G_i(\delta_1,\delta_2)$ が存在するような δ_1, δ_2 の二変数函数である。 我々はこの事実をみながら，積分 (6.2) の <u>finite part</u> を $\ell=0,1,2$ に応じてそれぞれ次のように定義する：

$$\text{(6.3)}\quad \begin{aligned} &\mathrm{P.f.}\int_{J_0} u_0(\tau_1,\tau_2) Mf(\tau_1,\tau_2)\, d\tau_1 d\tau_2 = G_0(0,0) \\ &\mathrm{P.f.}\int_{J_1} u_1(\tau_1,\tau_2) Mf(\tau_1,\tau_2)\, d\tau_1 d\tau_2 = G_1(0,0) \\ &\mathrm{P.f.}\int_{J_2} u_2(\tau_1,\tau_2) Mf(\tau_1,\tau_2)\, d\tau_1 d\tau_2 = G_2(0,0). \end{aligned}$$

Θ を $\mathcal{D}'_{\chi_{\lambda_1,\lambda_2},H}(X)$ の元としよう。 我々は積分 (6.2) の finite part を利用して $\Theta_{u_\ell} \in \mathcal{D}'_H(X_0)$ を次のように定義する （$\mathcal{D}'_H(X_0)$ は X_0 上の H-不変超函数の全体）。 Θ の J_ℓ' への制限を π_ℓ，そして $u_\ell = \omega\pi_\ell$ とおく。 そのとき，

$$\text{(6.4)}\quad \langle \Theta_{u_\ell}, f\rangle = w_\ell'\ \mathrm{P.f.}\int_{J_\ell} u_\ell(\tau_1,\tau_2) Mf(\tau_1,\tau_2)\, d\tau_1 d\tau_2 \quad (f \in C_c^\infty(X_0),\ \ell=0,1,2).$$

但し，w_ℓ' は $w_0' = w_2' = \frac{1}{2}$，$w_1' = 1$ により定義する。 この Θ_{u_ℓ} と §5 で定義された $A_m\otimes\alpha_m$，$B_m\otimes\beta_m$，$E_m\otimes\gamma_m$，$F_m\otimes\delta_m$

を用いて，Θ の $C_c^\infty(X_0)$ への制限 $\Theta|C_c^\infty(X_0)$ は，

$$(6.5)\quad \Theta|C_c^\infty(X_0) = \sum_{\ell=0}^{2}\Theta_{u_\ell} + \sum_{m=0}^{\infty} A_m\otimes\alpha_m + \sum_{m=0}^{\infty} B_m\otimes\beta_m + \sum_{m=0}^{\infty} E_m\otimes\gamma_m + \sum_{m=0}^{\infty} F_m\otimes\delta_m$$

$\left[\begin{array}{l}\alpha_m,\beta_m \text{ は } \mathcal{D}'((1,\infty)),\ \gamma_m,\delta_m \text{ は } \mathcal{D}'((1,\infty)) \text{ のある元。}\\ \text{なお，} A_m\otimes\alpha_m,\ B_m\otimes\beta_m,\ E_m\otimes\gamma_m,\ F_m\otimes\delta_m \text{ はそれぞれ}\\ \mathcal{D}'_H(X)\cong\mathcal{M}' \text{ (§4. §5) により，} \mathcal{D}'_H(X) \text{ の元と同一視したことに}\\ \text{注意せよ。}\end{array}\right]$

と分解することができる。何故ならば，Θ は命題5.5などから $X_0\cap\bigcup_{\ell=0,1,2}(\overline{HJ'_\ell})^\circ$ 上正則函数 u_ℓ で表わせるし，一方補題5.1などから $\tau_1=1$ [resp. $\tau_2=1$] 上に台を持つ不変超函数は，$A_m\otimes\alpha_m$，$B_m\otimes\beta_m$ [resp. $E_m\otimes\gamma_m$，$F_m\otimes\delta_m$] の一次結合で表わせるからである。（なお付録(A.9)を参照。）

$f\in C_c^\infty(X_0)$ としよう。そのときすぐに分かるように，

$$\langle(\Omega_i-\chi_{\lambda_1,\lambda_2}(\Omega_i))\Theta_{u_\ell}, f\rangle$$
$$= w'_\ell\ \mathrm{P.f.}\int_{J_\ell} u_\ell(\tau_1,\tau_2)\,F_{(\Omega_i-\chi_{\lambda_1,\lambda_2}(\Omega_i))f}(\tau_1,\tau_2)\,\omega\,(1-\tau_1)^{\mu}(1-\tau_2)^{\mu}d\tau_1 d\tau_2$$

が従う。次の補題は後で J_1 と J_2 の間の接続公式を求める際基本的である。

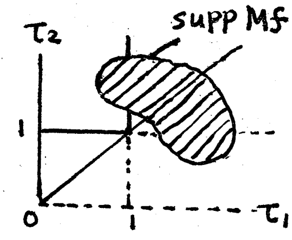


図 6.2

<u>補題 6.1.</u>　$\Theta\in\mathcal{D}_{\chi_{\lambda_1,\lambda_2},H}(X)$，$f$ を条件：

$$(6.6)\quad \mathrm{supp}\,Mf\cap\{(\tau_1,\tau_2);\ \tau_1\le\tfrac{1}{2} \text{ または } \tau_1,\tau_2\le 1\}=\phi$$

をみたす $C_c^\infty(X)$ の函数とする（図6.2参照）。

そのとき，充分小さい $\delta_1,\delta_2>0$ に対して次の式が成立する．

$$\text{(i)}\quad \int_{J_1(\delta_1)} u_1(\tau_1,\tau_2)\,F_{(\Omega_1-\chi_{\lambda_1,\lambda_2}(\Omega_1))f}(\tau_1,\tau_2)\,\omega\,(1-\tau_1)^{\mu}(1-\tau_2)^{\mu}d\tau_1 d\tau_2$$
$$=\int_1^\infty\Big[a(\tau_1)\Big\{\frac{\partial Mf}{\partial\tau_1}u_1 - Mf\frac{\partial u_1}{\partial\tau_1}\Big\}(\tau_1,\tau_2)+(a'-b)(\tau_1)(Mf\,u_1)(\tau_1,\tau_2)\Big]_{\tau_1=1-\delta_1}d\tau_2$$

$$\frac{1}{2}\int_{J_2(\delta_2)} u_2(\tau_1,\tau_2)\, F_{(\Omega_1-\chi_{\lambda_1,\lambda_2}(\Omega_1))f}(\tau_1,\tau_2)\,\omega\,(1-\tau_1)^{\mu}(1-\tau_2)^{\mu}d\tau_1 d\tau_2$$

$$= -\int_1^{\infty}\Big[a(\tau_1)\Big\{\frac{\partial Mf}{\partial\tau_1}u_2 - Mf\frac{\partial u_2}{\partial\tau_1}\Big\}(\tau_1,\tau_2) + (a'-b)(\tau_1)(Mf\,u_2)(\tau_1,\tau_2)\Big]_{\tau_1=1+\delta_2} d\tau_2$$

(ii) $$\int_{J_1(\delta_1)} u_1(\tau_1,\tau_2)\, F_{(\Omega_2-\chi_{\lambda_1,\lambda_2}(\Omega_2))f}(\tau_1,\tau_2)\,\omega\,(1-\tau_1)^{\mu}(1-\tau_2)^{\mu}d\tau_1 d\tau_2$$

$$= \int_1^{\infty}\Big[a(\tau_1)\Big\{\frac{\partial Mf}{\partial\tau_1}L_2u_1 - Mf\frac{\partial L_2u_1}{\partial\tau_1}\Big\}(\tau_1,\tau_2) + (a'-b)(\tau_1)\{Mf\cdot L_2u_1\}(\tau_1,\tau_2)\Big]_{\tau_1=1-\delta_1} d\tau_2$$

$$\frac{1}{2}\int_{J_2(\delta_2)} u_2(\tau_1,\tau_2)\, F_{(\Omega_2-\chi_{\lambda_1,\lambda_2}(\Omega_2))f}(\tau_1,\tau_2)\,\omega\,(1-\tau_1)^{\mu}(1-\tau_2)^{\mu}d\tau_1 d\tau_2$$

$$= -\int_1^{\infty}\Big[a(\tau_1)\Big\{\frac{\partial Mf}{\partial\tau_1}L_2u_2 - Mf\frac{\partial L_2u_2}{\partial\tau_1}\Big\}(\tau_1,\tau_2) + (a'-b)(\tau_1)\{Mf\cdot L_2u_2\}(\tau_1,\tau_2)\Big]_{\tau_1=1+\delta_2} d\tau_2$$

ここで，$a(\tau_1)=4\tau_1(\tau_1-1)$，　$b(\tau_1)=4\{(\mu+2)\tau_1-1\}=4(4\tau_1-1)$
[cf. (3.2)]，また，$J_1(\delta_1)$，$J_2(\delta_2)$ はそれぞれ次のようにおいた。

$$\begin{cases} J_1(\delta_1)= J_1\cap\{\tau_1\le 1-\delta_1\} \\ J_2(\delta_2)= J_2\cap\{\tau_1\ge 1+\delta_2\}\cap\{\tau_2\ge 1+\delta_2\}\text{。}\end{cases}$$

（証明） (ii)についてもほとんど同様だから(i)を証明する。
$\mathfrak{L}'(\Omega_1)=\omega^{-1}(L_1+L_2)\omega$ に注意すると (cf. (3.5))，

$$\int_{J_1(\delta_1)} u_1(\tau_1,\tau_2)\, F_{(\Omega_1-\chi_{\lambda_1,\lambda_2}(\Omega_1))f}(\tau_1,\tau_2)\,\omega\,(1-\tau_1)^{\mu}(1-\tau_2)^{\mu}d\tau_1 d\tau_2$$

$$= \int_{J_1(\delta_1)} u_1(\tau_1,\tau_2)\,\{\mathfrak{L}'(\Omega_1)-(\lambda_1+\lambda_2)\}\,F_f(\tau_1,\tau_2)\,\omega\,(1-\tau_1)^{\mu}(1-\tau_2)^{\mu}d\tau_1 d\tau_2$$

$$= \int_{J_1(\delta_1)} u_1(\tau_1,\tau_2)\,\{(L_1+L_2)-(\lambda_1+\lambda_2)\}(\omega F_f)(\tau_1,\tau_2)\,(1-\tau_1)^{\mu}(1-\tau_2)^{\mu}d\tau_1 d\tau_2$$

$$= \int_{J_1(\delta_1)} u_1(\tau_1,\tau_2)\,\{(L_1^*+L_2^*)-(\lambda_1+\lambda_2)\}(\omega(1-\tau_1)^{\mu}(1-\tau_2)^{\mu}F_f)(\tau_1,\tau_2)\,d\tau_1 d\tau_2$$

ここで，$L_i^*=(1-\tau_1)^{\mu}L_i(1-\tau_1)^{-\mu}$ [cf. (3.3)]。 容易に分かるように，$L_i^*=\frac{d^2}{d\tau_1^2}a(\tau_1)-\frac{d}{d\tau_1}b(\tau_1)$。 従って f の仮定 (6.6) と部分積分から，

$$\text{与式} = \int_{J_1(\delta_1)} u_1(\tau_1,\tau_2)\{(L_1^*+L_2^*)-(\lambda_1+\lambda_2)\}(Mf)(\tau_1,\tau_2)\,d\tau_1 d\tau_2$$
$$= \int_1^\infty \Big[a(\tau_1)\Big\{\frac{\partial Mf}{\partial \tau_1}u_1 - Mf\frac{\partial u_1}{\partial \tau_1}\Big\}(\tau_1,\tau_2) + (a'-b)(\tau_1)(Mf\,u_1)(\tau_1,\tau_2)\Big]_{\tau_1=1-\delta_1} d\tau_2$$
$$+\int_{J_1(\delta_1)}\{(L_1+L_2)-(\lambda_1+\lambda_2)\}u_1(\tau_1,\tau_2)\,Mf(\tau_1,\tau_2)\,d\tau_1 d\tau_2.$$

$(L_1+L_2)u_1=(\lambda_1+\lambda_2)u_1$ だから，才2項$=0$。$J_2(\delta_2)$上の積分についても同様の考察をして我々は(i)を得る。　　Q.E.D.

以下，$\chi_\lambda=\chi_{\lambda_1,\lambda_2}$ が regular の場合と，singular の場合に分けて議論を進めよう。

<u>6.1.</u>　$\chi_{\lambda_1,\lambda_2}$ が regular の場合 $(\lambda_1 \neq \lambda_2)$。

この場合に u_ℓ $(\ell=0,1,2)$ は次の形に表現できた (cf. 補題3.5，命題5.5)：

$$(6.7)\quad \begin{aligned} &u_\ell(\tau_1,\tau_2)=\sum_{\substack{i,j,k=1\\k\neq k'}}^{2} {}_\ell C_{ij}^{k}\,F_i(\tau_1,\lambda_k)\,F_j(\tau_2,\lambda_{k'}) &&(\ell=0,1,2)\\ &{}_\ell C_{ij}^{k}+{}_\ell C_{ji}^{k'}=0 \quad (i,j,k,k'=1,2\,;\,k\neq k') &&(\ell=0,2). \end{aligned}$$

一方，不変積分 Mf については(5.3)から，$(\tau_1,\tau_2)=(1,\tau_2)$ のまわりで次のような漸近展開を持っていた：

$$(6.8)\quad Mf(\tau_1,\tau_2)\sim\sum_{m=0}^{\infty}A_m(f,\tau_2)(1-\tau_1)^m+Y(1-\tau_1)\sum_{m=0}^{\infty}B_m(f,\tau_2)(1-\tau_1)^{m+\mu}$$

但し，$\tau_2>1$ とする。　同様に，$(\tau_1,\tau_2)=(\tau_1,1)$ のまわりでも，

$$(6.9)\quad Mf(\tau_1,\tau_2)\sim\sum_{m=0}^{\infty}E_m(f,\tau_1)(1-\tau_2)^m+Y(1-\tau_2)\sum_{m=0}^{\infty}F_m(f,\tau_1)(1-\tau_2)^{m+\mu}$$

という漸近展開が成り立つ $(0<\tau_1<1)$。

我々はまずJ_1とJ_2の間の接続公式をみる。そのために $f\in C_c^\infty(X_0)$ としては条件(6.6)を満たすものばかりを考え，その全体を $C_c^\infty(X_1)$ とおこう：

(6.10) $$C_c^\infty(X_1)=\{f\in C_c^\infty(X);\ \mathrm{supp}\,Mf\cap\{(\tau_1,\tau_2);\ \tau_1\leqq\tfrac{1}{2}\ \text{または}\ \tau_1,\tau_2\leqq 1\}=\phi\}$$

そのとき，補題6.1を用い，$\langle(\Omega_i-\chi_{\lambda_1,\lambda_2}(\Omega_i))\Theta_{u_l},f\rangle$ を計算すれば次の補題が成り立つ(cf. [1. Lemma 3.6 case 4])。

<u>補題6.2.</u> $\Theta\in\mathcal{D}'_{\chi_{\lambda_1,\lambda_2},H}(X)$，その$J_l'$への制限を $\frac{u_l}{\omega}$ とするとき，ある $\alpha_m^{(i)},\beta_m^{(i)}\in\mathcal{D}'((1,\infty))$ が存在して，

$$\left\{(\Omega_i-\chi_{\lambda_1,\lambda_2}(\Omega_i))(\Theta_{u_0}+\Theta_{u_1})-\left(\sum_{m=0}^{\mu}A_m\otimes\alpha_m^{(i)}+B_0\otimes\beta_0^{(i)}\right)\right\}\Big|_{C_c^\infty(X_1)}=0$$

この補題と補題5.4を組み合わせると，

(6.11) $$\alpha_m=0\quad(m\geqq\mu\equiv 2),\qquad \beta_m=0\quad(m\geqq 0)$$

が成立する。この事実と補題6.1を用いて次のことを証明しよう。

<u>補題6.3.</u> Θ を $\mathcal{D}'_{\chi_{\lambda_1,\lambda_2},H}(X)$ の元，${}_lC_{ij}^k$ を(6.5),(6.7)により定まる数とするとき，

$$ {}_2C_{2j}^k={}_1C_{2j}^k=0 \qquad (j,k=1,2)$$
$$ {}_2C_{i2}^k=0 \qquad (i,k=1,2)。$$

(証明) f を $C_c^\infty(X_1)$ の中の函数とし，補題6.2, (6.11)に注意して，

(6.12) $$\langle(\Omega_i-\chi_{\lambda_1,\lambda_2}(\Omega_i))\Theta,f\rangle\equiv\sum_{m=0}^{\mu}\langle A_m\otimes\alpha_m^{(i)},f\rangle+\langle B_0\otimes\beta_0^{(i)},f\rangle$$
$$=0$$

とおこう。 そのとき補題6.1，(6.8)と$\{A_m, B_m\}_{m\geq 0}$の一次独立性を用いて$\alpha_\mu^{(i)}$を計算することにより，

$$\sum_{j,k=1}^{2} ({}_1C_{2j}^{k} - {}_2C_{2j}^{k}) 4\mu \hat{f}_0(\lambda_k) F_j(\tau_2, \lambda_{k'}) = 0 .$$

ここで$\hat{f}_0(\lambda)$は(3.21)の$F_2(\tau,\lambda)$における$(1-\tau)^{-\mu}$の係数で，$\hat{f}_0(\lambda) \neq 0$である。故に$\{F_j(\tau_2,\lambda_{k'})\}_{j,k'}$の一次独立性から，

$$ {}_1C_{2j}^{k} - {}_2C_{2j}^{k} = 0 \qquad (j,k=1,2).$$

一方，$\beta_0^{(i)}$を計算すれば，

$$4\mu\, {}_1C_{2j}^{k} \hat{f}_0(\lambda_k) F_j(\tau_2,\lambda_{k'}) = 0 \qquad (j,k=1,2).$$

再び$\{F_j(\tau_1,\lambda_{k'})\}_{j,k}$の一次独立性から，

$$ {}_1C_{2j}^{k} = 0$$

が導かれる。 また，${}_2C_{i2}^{k} = 0$は，(6.7)と${}_2C_{2i}^{k'} = 0$から明らかである。 Q.E.D.

(注意) 同様にして，J_0とJ_1の間の接続公式を求める過程から，${}_1C_{i2}^{k} = 0 \quad (i,k=1,2)$，従って，$\ell=1,2$に対して

(6.13) $$ {}_\ell C_{i,j}^{k} = 0 \qquad (i,j,k=1,2\ ;\ (i,j)\neq(1,1))$$

が成り立つ。 即ち，u_1, u_2は超幾何幾数の積と和で表わせる。

補題6.3から補題6.2は次のように精密化される。

<u>補題6.4.</u> Ⓗ$\in \mathcal{D}'_{\gamma_{\lambda_1,\lambda_2,H}}(X)$，${}_\ell C_{ij}^{k}$を(6.5)，(6.7)から定ま

る数とするとき，次の式が成立する。

(i) $\{(\Omega_1-\chi_{\lambda_1,\lambda_2}(\Omega_1))(\Theta u_1+\Theta u_2)$

(6.14) $\quad -A_0\otimes\sum_{\substack{j,k=1\\ k\neq k'}}^{2}({}_2C_{1j}^{k}-{}_1C_{1j}^{k})\,4\mu F_j(\tau_2,\lambda_{k'})\}|C_c^\infty(X_1)=0$

(ii) $\{(\Omega_2-\chi_{\lambda_1,\lambda_2}(\Omega_2))(\Theta u_1+\Theta u_2)$

(6.15) $\quad -A_0\otimes\sum_{\substack{j,k=1\\ k\neq k'}}^{2}({}_2C_{1j}^{k}-{}_1C_{1j}^{k})\,4\mu\lambda_{k'}F_j(\tau_2,\lambda_{k'})\}|C_c^\infty(X_1)=0$。

次に我々は ${}_lC_{1j}^{k}$，α_m $(j,k,l=1,2;\ m=0,1)$ の間の関係を調べよう。 まず α_m については一般に次のことが成立する。

<u>補題 6.5.</u> $\Theta\in\mathcal{D}'_{\chi_{\lambda_1,\lambda_2},H}(X)$ に対し，(6.5) により定まる α_m をとったとき，

(6.16) $$\alpha_m=\sum_{j,k=1}^{2}d_{m,j}^{k}F_j(\tau_2,\lambda_{k'})\qquad(m=0,1)$$

がある $d_{m,j}^{k}\in\mathbb{C}$ に対して成り立つ。 特に α_m は $(1,\infty)$ 上の解析函数として表わされる。

(証明) 補題 6.4 と命題 5.3 を用い，

$$\{(\Omega_i-\chi_{\lambda_1,\lambda_2}(\Omega_i))\Theta-\sum_{m=0}^{\mu-1}A_m\otimes\alpha_m^{(i)}\}|C_1^\infty(X_1)=0$$

と表わしたときの $\alpha_0^{(i)}$ を計算し $\alpha_0^{(i)}=0$ とおくと，

(6.17) $\quad\sum_{\substack{j,k=1\\ k\neq k'}}^{2}({}_2C_{1j}^{k}-{}_1C_{1j}^{k})\,4\mu F_j(\tau_2,\lambda_{k'})-(4\mu+\lambda_1+\lambda_2)\alpha_0+L_2\alpha_0=0$

(6.18) $\quad\sum_{\substack{j,k=1\\ k\neq k'}}^{2}({}_2C_{1j}^{k}-{}_1C_{1j}^{k})\,4\mu\lambda_{k'}F_j(\tau_2,\lambda_{k'})-4\mu L_2\alpha_0-\lambda_1\lambda_2\alpha_0=0$

また，$\alpha_1^{(i)}$ の計算も同様に行なうと，

(6.19) $$4(\mu-1)\alpha_0+\{8(1-\mu)-(\lambda_1+\lambda_2)\}\alpha_1+L_2\alpha_1=0$$

(6.20) $$4(\mu-1)L_2\alpha_0+8(1-\mu)L_2\alpha_1-\lambda_1\lambda_2\alpha_1=0.$$

故に $L_2(6.17)-(6.18)$ から

$$L_2{}^2\alpha_0-(\lambda_1+\lambda_2)L_2\alpha_0+\lambda_1\lambda_2\alpha_0=(L_2-\lambda_1)(L_2-\lambda_2)\alpha_0=0。$$

このことから (6.16) が $m=0$ について成り立つ. $m=1$ については $L_2(6.19)-(6.20)$ を計算すればよい。 Q.E.D.

補題 6.5 を用いながら再び (6.17), (6.19) をみると，

$$\sum_{\substack{j,k=1\\k\neq k'}}^{2}\{({}_2C_{1j}^{k}-{}_1C_{1j}^{k})4\mu-(4\mu+\lambda_k)\,d_{0,j}^{k}\}F_j(\tau_2,\lambda_{k'})=0$$

$$\sum_{\substack{j,k=1\\k\neq k'}}^{2}[4(\mu-1)\,d_{0,j}^{k}+\{8(1-\mu)-\lambda_k\}\,d_{1,j}^{k}]F_j(\tau_2,\lambda_{k'})=0.$$

このことから直ちに，

(6.21) $$4\mu({}_2C_{1j}^{k}-{}_1C_{1j}^{k})=(4\mu+\lambda_k)\,d_{0,j}^{k}$$

(6.22) $$4(\mu-1)\,d_{0,j}^{k}=\{8(\mu-1)+\lambda_k\}\,d_{1,j}^{k}.$$

同様に，(6.18)，(6.20) からは，

(6.23) $$4\mu\lambda_{k'}({}_2C_{1j}^{k}-{}_1C_{1j}^{k})=(4\mu+\lambda_k)\lambda_{k'}d_{0,j}^{k}$$

(6.24) $$4(\mu-1)\lambda_{k'}d_{0,j}^{k}=\{8(\mu-1)+\lambda_k\}\lambda_{k'}d_{1,j}^{k}.$$

即ち，条件式 (6.23), (6.24) は (6.21)，(6.22) から自動的に導かれる。 以上をまとめて，J_1 と J_2 との間の接続公式に関する次の命題を得る。

<u>命題6.6.</u> $\chi_{\lambda_1,\lambda_2}$ は regular ($\lambda_1 \neq \lambda_2$) とする。そのとき，Ⓗ $\in \mathcal{D}'_{\chi_{\lambda_1,\lambda_2},H}(X)$ に対して以下の事実が成り立つ。

(i) $$u_\ell(\tau_1,\tau_2) = \sum_{\substack{j,k=1\\ k\neq k'}}^{2} {}_\ell C_{1j}^{k} F_1(\tau_1,\lambda_k) F_j(\tau_2,\lambda_{k'})$$

と表わせる。さらに，

$${}_2C_{12}^{k} = 0 \quad かつ \quad {}_2C_{11}^{k} + {}_2C_{11}^{k'} = 0$$

(ii) $$\alpha_m = \sum_{\substack{j,k=1\\ k\neq k'}}^{2} d_{m,j}^{k} F_j(\tau_2,\lambda_{k'}) \qquad (m=0,1)$$

$$\alpha_m = 0 \quad (m \geq \mu), \qquad \beta_m = 0 \quad (m \geq 0)$$

と表わせる。

(iii) $$4\mu({}_2C_{1j}^{k} - {}_1C_{1j}^{k}) = (4\mu + \lambda_k)\, d_{0,j}^{k}$$

$$4(\mu-1)\, d_{0,j}^{k} = \{8(\mu-1)+\lambda_k\}\, d_{1,j}^{k} \qquad (j=1,2).$$

但し，$\mu = 2$。

<u>系6.7.</u> 命題6.6と同じ仮定の下に，

$$\lambda_k = -8 \Rightarrow {}_2C_{1j}^{k} = {}_1C_{1j}^{k} \quad かつ \quad d_{0,j}^{k} = 0 \qquad (j=1,2)$$

がそれぞれ $k=1,2$ に対して成立する。

全く同様にして J_1 と J_2 との間の接続公式も求めることができる。特に，補題6.3に類似した関係式：

(6.25) $\quad {}_0C_{i2}^{k} = {}_1C_{i2}^{k} = 0 \qquad (i,k=1,2)$

(6.26) $\quad {}_0C_{2j}^{k} = 0 \qquad (j,k=1,2)$

が成立し，このことと補題6.3及び(6.7)をあわせると，

(6.27) $$u_\ell(\tau_1,\tau_2)=\sum_{\substack{k=1\\ k\neq k'}}^{2} {}_\ell C_{11}^{k}\, F_1(\tau_1,\lambda_k)\, F_1(\tau_2,\lambda_{k'}) \qquad (\ell=0,1,2)$$

(6.28) $${}_\ell C_{11}^{k}+{}_\ell C_{11}^{k'}=0 \qquad (k,k'=1,2\,;\ k\neq k') \qquad (\ell=0,2).$$

従って命題5.5より次の事実が云える。

<u>補題6.8.</u> $\Lambda_d=\{4r(r+3)\,;\ r=0,1,2,\cdots\}$ とする。そのとき，$\Theta\in\mathcal{D}'_{\chi_{\lambda_1,\lambda_2},H}(X)$ に対して，$\lambda_k\notin\Lambda_d$ ならば，

$${}_\ell C_{11}^{k}=0 \qquad (\ell=0,1)$$

が，それぞれ $k=1,2$ に対して成立する。

実際，(6.27)及び命題5.5 i)の i)から ${}_\ell C_{11}^{k}\, a_0(\lambda_k,\mu)=0$ が示されるが，$\lambda_k\notin\Lambda_d$ の場合，$a_0(\lambda_k,\mu)\neq 0$ となるからである。

以上をすべてまとめて次の定理が証明できた。

<u>定理6.9.</u> $\chi_{\lambda_1,\lambda_2}$ は regular $(\lambda_1\neq\lambda_2)$ とする。そのとき，任意の $\Theta\in\mathcal{D}'_{\chi_{\lambda_1,\lambda_2},H}(X)$ は表6.1の①の形に表わすことができる。特に序説の定理1.1の i)が成立する。

<u>6.2.</u> $\chi_{\lambda_1,\lambda_2}$ が singular の場合 $(\lambda_1=\lambda_2=\lambda)$。

次に $\chi_{\lambda_1,\lambda_2}$ が singular な場合を考察する。方法は $\chi_{\lambda_1,\lambda_2}$ が regular のときとほぼ同様なので概略を述べるのに留める。また，$\lambda=\lambda_1=\lambda_2$ とおくことにする。さて今の場合，$u_\ell(\tau_1,\tau_2)$ は次の形をしていたことを思い出しておく（補題3.5，命題5.5）：

$$(6.29)\quad \begin{cases} u_\ell(\tau_1,\tau_2)=\sum_{i,j=1}^{2}{}_\ell C_{ij}^{1}\,F_i(\tau_1,\lambda)F_j(\tau_2,\lambda) \\ \qquad +\sum_{i,j=1}^{2}{}_\ell C_{ij}^{2}\{F_i(\tau_1,\lambda)F_{j+2}(\tau_2,\lambda)-F_{i+2}(\tau_2,\lambda)F_j(\tau_2,\lambda)\} \\ \hfill (\ell=0,1,2) \\ {}_\ell C_{11}^{1}={}_\ell C_{22}^{1}=0,\quad {}_\ell C_{12}^{1}+{}_\ell C_{21}^{1}=0,\quad {}_\ell C_{12}^{2}={}_\ell C_{21}^{2} \\ \hfill (\ell=0,2)。\end{cases}$$

$\chi_{\lambda_1,\lambda_2}$ が regular のときと同様，J_1 と J_2 の間の接続公式からはじめよう。今度も補題 6.2，(6.11) 及び次の補題が前と全く同じ論法により成立することが分かる。

<u>補題6.10.</u> $\Theta\in\mathcal{D}'_{\chi_{\lambda,\lambda},H}(X)$ に対し，${}_\ell C_{ij}^{k}$ を (6.5), (6.29) により定まる数とするとき，

$$ {}_2C_{2j}^{k}={}_1C_{2j}^{k}=0 \qquad (j,k=1,2)$$
$$ {}_2C_{i2}^{k}=0 \qquad (i,k=1,2).$$

従って補題 6.4 に相当するものとして次のことが云える。

<u>補題6.11.</u> $\Theta\in\mathcal{D}'_{\chi_{\lambda,\lambda},H}(X)$ に対し，${}_\ell C_{ij}^{k}$ を (6.5) (6.29) により定まる数とするとき，

(i) $$\{(\Omega_1-\chi_{\lambda,\lambda}(\Omega_1))(\Theta_{u_1}+\Theta_{u_2})$$
$$(6.30)\qquad -A_0\otimes\sum_{j,k=1}^{2}({}_2C_{1j}^{k}-{}_1C_{1j}^{k})\,4\mu F_{j+2(k-1)}(\tau_2,\lambda)\}\big|_{C_c^\infty(X_1)}=0$$

(ii) $$\{(\Omega_2-\chi_{\lambda,\lambda}(\Omega_2))(\Theta_{u_1}+\Theta_{u_2})$$
$$(6.31)\qquad -A_0\otimes\sum_{j,k=1}^{2}({}_2C_{1j}^{k}-{}_1C_{1j}^{k})\,4\mu L_2F_{j+2(k-1)}(\tau_2,\lambda)\}\big|_{C_c^\infty(X_1)}=0.$$

ここで，$L_2F_{j+2}(\tau_2,\lambda)=\lambda F_{j+2}(\tau_2,\lambda)+F_j(\tau_2,\lambda)$ であったことに注意。

補題 6.12. $\Theta \in \mathcal{D}'_{\lambda,\lambda,H}(X)$ に対し，(6.5) から定まる α_m をとったとき，

$$\alpha_m = \sum_{j,k=1}^{2} d_{m,j,k} F_{j+2(k-1)}(\tau_2, \lambda) \tag{6.32}$$

がある $d_{m,j,k} \in \mathbb{C}$ に対して成立する。特に α_m は $(1,\infty)$ 上の解析函数として表わせる。

(略証) 補題 6.11 と命題 5.3 を使い，

$$\Big\{ (\Omega_i - \chi_{\lambda_1,\lambda_2}(\Omega_i))\Theta - \sum_{m=0}^{\mu-1} A_m \otimes \alpha_m^{(i)} \Big\} \Big|_{C_1^\infty(X_1)} = 0$$

と表わしたときの $\alpha_0^{(i)}$, $\alpha_1^{(i)}$ を計算することにより，

$$\begin{cases} \displaystyle\sum_{j,k=1}^{2} ({}_2C_{1j}^{k} - {}_1C_{1j}^{k}) 4\mu F_{j+2(k-1)}(\tau_2,\lambda) - (4\mu+2\lambda)\alpha_0 + L_2\alpha_0 = 0 & (6.33) \\ \displaystyle\sum_{j,k=1}^{2} ({}_2C_{1j}^{k} - {}_1C_{1j}^{k}) 4\mu L_2 F_{j+2(k-1)}(\tau_2,\lambda) - 4\mu L_2\alpha_0 - \lambda^2\alpha_0 = 0 & (6.34) \end{cases}$$

$$\begin{cases} 4(\mu-1)\alpha_0 + \{8(1-\mu) - 2\lambda\}\alpha_1 + L_2\alpha_1 = 0 & (6.35) \\ 4(\mu-1)L_2\alpha_0 + 8(1-\mu)L_2\alpha_1 - \lambda^2\alpha_1 = 0\text{。} & (6.36) \end{cases}$$

従って，$L_2(6.33) - (6.34)$ より $(L_2-\lambda)^2\alpha_0 = 0$，また $L_2(6.35) - (6.36)$ から $(L_2-\lambda)^2\alpha_1 = 0$ が得られ，(6.32) が導かれる。

Q.E.D.

(6.33)，(6.35) を補題 6.12 を用いて整理すると，

$$\begin{aligned} &\sum_{j,k=1}^{2} \{ ({}_2C_{1j}^{k} - {}_1C_{1j}^{k}) 4\mu - (4\mu+\lambda) d_{0,j,k} \} F_{j+2(k-1)}(\tau_2,\lambda) \\ &\qquad + \sum_{j=1}^{2} d_{0,j,2} F_j(\tau_2,\lambda) = 0 \end{aligned} \tag{6.37}$$

$$\sum_{j,k=1}^{2}\left[4(\mu-1)d_{0,j,k}+\{8(1-\mu)-\lambda\}d_{1,j,k}\right]F_{j+2(k-1)}(\tau_2,\lambda) \tag{6.38}$$
$$+\sum_{j=1}^{2}d_{1,j,2}F_j(\tau_2,\lambda)=0\ .$$

故に，

$$\begin{cases}4\mu({}_2C_{1j}^{1}-{}_1C_{1j}^{1})=(4\mu+\lambda)d_{0,j,1}-d_{0,j,2}\\ 4\mu({}_2C_{1j}^{2}-{}_1C_{1j}^{2})=(4\mu+\lambda)d_{0,j,2}\end{cases} \tag{6.39}$$

$$\begin{cases}4(\mu-1)d_{0,j,1}=\{8(\mu-1)+\lambda\}d_{1,j,1}-d_{1,j,2}\\ 4(\mu-1)d_{0,j,2}=\{8(\mu-1)+\lambda\}d_{1,j,2}\end{cases} \tag{6.40}$$

が得られる。 同様に (6.34), (6.36) からは.

$$\begin{cases}4\mu\lambda({}_2C_{1j}^{1}-{}_1C_{1j}^{1})=(4\mu+\lambda)\lambda d_{0,j,1}-4\mu({}_2C_{1j}^{2}-{}_1C_{1j}^{2})+4\mu d_{0,j,2}\\ 4\mu\lambda({}_2C_{1j}^{2}-{}_1C_{1j}^{2})=(4\mu+\lambda)\lambda d_{0,j,2}\end{cases} \tag{6.41}$$

$$\begin{cases}4(\mu-1)\lambda d_{0,j,1}=\{8(\mu-1)+\lambda\}\lambda d_{1,j,1}-4(\mu-1)d_{0,j,2}+8(\mu-1)d_{1,j,2}\\ 4(\mu-1)\lambda d_{0,j,2}=\{8(\mu-1)+\lambda\}\lambda d_{1,j,2}\end{cases} \tag{6.42}$$

が従うが，これは明らかに (6.39),(6.40) から自動的に導かれる。以上をまとめて，J_1 と J_2 の間の接続公式が次のような形で得られる。

命題 6.13. $\chi_{\lambda,\lambda}$ は singular とする。 そのとき，Ⓗ $\in \mathcal{D}'_{\chi_{\lambda,\lambda,H}}(X)$ に対して以下の事実が成立する。

(i) $$U_\ell(\tau_1,\tau_2)=\sum_{j=1}^{2}{}_\ell C_{1j}^{1}F_1(\tau_1,\lambda)F_j(\tau_2,\lambda)$$
$$+\sum_{j=1}^{2}{}_\ell C_{1j}^{2}\{F_1(\tau_1,\lambda)F_{j+2}(\tau_2,\lambda)-F_3(\tau_1,\lambda)F_j(\tau_2,\lambda)\}$$

と表わせる。 さらに，

$${}_2C_{1j}^{1}=0 \qquad かつ \qquad {}_2C_{12}^{2}=0 \qquad (j=1,2)。$$

(ii) $\alpha_m = \sum_{j,k=1}^{2} d_{m,j,k} F_{j+2(k-1)}(\tau_2, \lambda)$ $\qquad (m=0,1)$

$\alpha_m = 0 \quad (m \geqq \mu), \qquad \beta_m = 0 \quad (m \geqq 0)$

と表わせる。

(iii)
$$4\mu({}_2C_{1j}^1 - {}_1C_{1j}^1) = (4\mu+\lambda)d_{0,j,1} - d_{0,j,2}$$
$$4\mu({}_2C_{1j}^2 - {}_1C_{1j}^2) = (4\mu+\lambda)d_{0,j,2}$$
$$4(\mu-1)d_{0,j,1} = \{8(\mu-1)+\lambda\}d_{1,j,1} - d_{1,j,2}$$
$$4(\mu-1)d_{0,j,2} = \{8(\mu-1)+\lambda\}d_{1,j,2}$$
$(j=1,2)$。

ここで $\mu=2$。

系 6.14. 命題 6.13 と同じ仮定の下で，

$$\lambda = -8 \Rightarrow {}_2C_{1j}^k = {}_1C_{1j}^k \text{ かつ } d_{0,j,2} = 0$$

が $j,k=1,2$ に対して成立する。

J_0 と J_1 の間の接続公式も同様に導かれ，結局 u_ℓ は，

(6.43) $u_\ell(\tau_1,\tau_2) = {}_\ell C_{11}^2\{F_1(\tau_1,\lambda)F_3(\tau_2,\lambda) - F_3(\tau_1,\lambda)F_1(\tau_2,\lambda)\}$ $\quad (\ell=0,2)$

(6.44) $u_1(\tau_1,\tau_2) = {}_1C_{11}^1 F_1(\tau_1,\lambda)F_1(\tau_2,\lambda) + {}_1C_{11}^2\{F_1(\tau_1,\lambda)F_3(\tau_2,\lambda) - F_3(\tau_1,\lambda)F_1(\tau_2,\lambda)\}$

という形で書けることが分かる。また，補題 6.8 と同様

(6.45) $\lambda \notin \Lambda_d \Rightarrow {}_\ell C_{11}^k = 0 \qquad (\ell=0,1)$

が，$k=1,2$ に対して従う。これらをすべてまとめて次の定理の成立することが分かった。

<u>定理 6.15.</u> $\chi_{\lambda_1,\lambda_2}$ はsingularとする（$\lambda_1=\lambda_2=\lambda$）。そのとき，任意の$\Theta\in\mathfrak{D}'_{\chi_{\lambda,\lambda},H}(X)$は表6.1の②の形に表わすことができる。特に序説の定理1.1のii）が成立する。

① (λ_1,λ_2) が regular の場合 $(\lambda_1 \neq \lambda_2)$

一般的に云えること	◎ Ⓗ$\,|C_c^\infty(X_0) = \sum_{l=0}^{2} Ⓗ\, u_l + \sum_{m=0}^{1} A_m \otimes \alpha_m + \sum_{m=0}^{1} E_m \otimes \gamma_m$ (cf. (6,5)) ◎ $u_0(\tau_1,\tau_2) = C_1 \{F(\tau_1,\lambda_1)F(\tau_2,\lambda_2) - F(\tau_1,\lambda_2)F(\tau_2,\lambda_1)\}$ $u_1(\tau_1,\tau_2) = C_2 F(\tau_1,\lambda_1)F(\tau_2,\lambda_2) + C_3 F(\tau_1,\lambda_2)F(\tau_2,\lambda_1)$ $u_2(\tau_1,\tau_2) = C_4 \{F(\tau_1,\lambda_1)F(\tau_2,\lambda_2) - F(\tau_1,\lambda_2)F(\tau_2,\lambda_1)\}$ ○ $\left.\begin{array}{l}\alpha_m = \sum_{i,k=1}^{2} d^k_{m,i} F_i(\tau_2,\lambda_{k'}) \\ \gamma_m = \sum_{i,k=1}^{2} e^k_{m,i} F_i(\tau_1,\lambda_{k'})\end{array}\right\}$ と表わせる $\begin{pmatrix} m=0,1 \\ k'=1,2\ \&\ k\neq k' \end{pmatrix}$
$\lambda_1 \notin \Lambda_d \cup \Lambda_s$ $\lambda_2 \notin \Lambda_d \cup \Lambda_s$ の場合	◎ $C_1 = C_2 = C_3 = 0$ ○ $\left.\begin{array}{l}\alpha_m = \sum_{k=1}^{2} d^k_{m,1} F(\tau_2,\lambda_{k'}) \\ \gamma_m = 0\end{array}\right\}$ と表わせる $\begin{pmatrix} m=0,1 \\ k'=1,2\ \&\ k\neq k' \end{pmatrix}$ ○ $d^1_{0,1} = 8C_4/(8+\lambda_1)$ $\quad d^1_{1,1} = 4d^1_{0,1}/(8+\lambda_1)$ $d^2_{0,1} = -8C_4/(8+\lambda_2)$ $\quad d^2_{1,1} = 4d^2_{0,1}/(8+\lambda_2)$
$\lambda_1 \notin \Lambda_d \cup \Lambda_s$ $\lambda_2 \in \Lambda_d$ の場合	◎ $C_1 = C_2 = 0$ ○ $\left.\begin{array}{l}\alpha_m = \sum_{k=1}^{2} d^k_{m,1} F(\tau_2,\lambda_{k'}) \\ \gamma_m = e^1_{m,1} F(\tau_1,\lambda_2)\end{array}\right\}$ と表わせる $\begin{pmatrix} m=0,1 \\ k'=1,2\ \&\ k\neq k' \end{pmatrix}$ ○ $d^1_{0,1} = 8C_4/(8+\lambda_1)$ $\quad d^1_{1,1} = 4d^1_{0,1}/(8+\lambda_1)$ $d^2_{0,1} = 8(-C_4-C_3)/(8+\lambda_2)$ $\quad d^2_{1,1} = 4d^2_{0,1}/(8+\lambda_2)$ ○ $e^1_{0,1} = 8C_3/(8+\lambda_1)$ $\quad e^1_{1,1} = 4e^1_{0,1}/(8+\lambda_1)$
$\lambda_1 \in \Lambda_d$ $\lambda_2 \in \Lambda_d$ の場合	○ $\left.\begin{array}{l}\alpha_m = \sum_{k=1}^{2} d^k_{m,1} F(\tau_2,\lambda_{k'}) \\ \gamma_m = \sum_{k=1}^{2} e^k_{m,1} F(\tau_1,\lambda_{k'})\end{array}\right\}$ と表わせる $\begin{pmatrix} m=0,1 \\ k'=1,2\ \&\ k\neq k' \end{pmatrix}$ ○ $d^1_{0,1} = 8(C_4-C_2)/(8+\lambda_1)$ $\quad d^1_{1,1} = 4d^1_{0,1}/(8+\lambda_1)$ $d^2_{0,1} = 8(-C_4-C_3)/(8+\lambda_2)$ $\quad d^2_{1,1} = 4d^2_{0,1}/(8+\lambda_2)$ ○ $e^1_{0,1} = 8(C_3+C_1)/(8+\lambda_1)$ $\quad e^1_{1,1} = 4e^1_{0,1}/(8+\lambda_1)$ $e^2_{0,1} = 8(C_2-C_1)/(8+\lambda_2)$ $\quad e^2_{1,1} = 4e^2_{0,1}/(8+\lambda_2)$
$\lambda_1 \notin \Lambda_s$ $\lambda_2 \in \Lambda_s$ の場合	◎ $C_1 = C_2 = C_3 = C_4 = 0$ ○ $\left.\begin{array}{ll}\alpha_0 = 0 & \alpha_1 = \sum_{i=1}^{2} d^2_{1,i} F_i(\tau_2,\lambda_1) \\ \gamma_0 = 0 & \gamma_1 = \sum_{i=1}^{2} e^2_{1,i} F_i(\tau_1,\lambda_1)\end{array}\right\}$ と表わせる

表 6.1 ①

② (λ_1, λ_2) が singular の場合　$(\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda)$

一般的に云えること	◎ $\Theta \vert C_c^\infty(X_0) = \sum_{\ell=0}^{2} \Theta u_\ell + \sum_{m=0}^{1} A_m \otimes \alpha_m + \sum_{m=0}^{1} E_m \otimes \gamma_m$ (cf. (6.5)) ◎ $u_0(\tau_1, \tau_2) = C_1 \{ F(\tau_1, \lambda) \tilde{F}(\tau_2, \lambda) - \tilde{F}(\tau_1, \lambda) F(\tau_2, \lambda) \}$ $u_1(\tau_1, \tau_2) = C_2 F(\tau_1, \lambda) F(\tau_2, \lambda) + C_3 \{ F(\tau_1, \lambda) \tilde{F}(\tau_2, \lambda) - \tilde{F}(\tau_1, \lambda) F(\tau_2, \lambda) \}$ $u_2(\tau_1, \tau_2) = C_4 \{ F(\tau_1, \lambda) \tilde{F}(\tau_2, \lambda) - \tilde{F}(\tau_1, \lambda) F(\tau_2, \lambda) \}$ ○ $\left. \begin{array}{l} \alpha_m = \sum_{i,k=1}^{2} d_{m,i,k} F_{i+2(k-1)}(\tau_2, \lambda) \\ \gamma_m = \sum_{i,k=1}^{2} e_{m,i,k} F_{i+2(k-1)}(\tau_2, \lambda) \end{array} \right\}$ と表わせる $(m=0,1)$
$\lambda \notin \Lambda_d \cup \Lambda_s$ の場合	◎ $C_1 = C_2 = C_3 = 0$ ○ $\left. \begin{array}{l} \alpha_m = d_{m,1,1} F(\tau_2, \lambda) + d_{m,1,2} \tilde{F}(\tau_2, \lambda) \\ \gamma_m = 0 \end{array} \right\}$ と表わせる $(m=0,1)$ ○ $d_{0,1,2} = 8C_4/(8+\lambda)$　　$d_{1,1,2} = 4d_{0,1,2}/(8+\lambda)$ $d_{0,1,1} = 8d_{0,1,2}/(8+\lambda)$　　$d_{1,1,1} = \{4d_{0,1,1} + d_{1,1,2}\}/(8+\lambda)$
$\lambda \in \Lambda_d$ の場合	○ $\left. \begin{array}{l} \alpha_m = d_{m,1,1} F(\tau_2, \lambda) + d_{m,1,2} \tilde{F}(\tau_2, \lambda) \\ \gamma_m = e_{m,1,1} F(\tau_2, \lambda) + e_{m,1,2} \tilde{F}(\tau_2, \lambda) \end{array} \right\}$ と表わせる $(m=0,1)$ ○ $d_{0,1,2} = 8(C_4 - C_3)/(8+\lambda)$　　$d_{1,1,2} = 4d_{0,1,2}/(8+\lambda)$ $d_{0,1,1} = \{-8C_2 + d_{0,1,2}\}/(8+\lambda)$　　$d_{1,1,1} = \{4d_{0,1,1} + d_{1,1,2}\}/(8+\lambda)$ ○ $e_{0,1,2} = 8(-C_3 + C_1)/(8+\lambda)$　　$e_{1,1,2} = 4e_{0,1,2}/(8+\lambda)$ $e_{0,1,1} = \{8C_2 + e_{0,1,2}\}/(8+\lambda)$　　$e_{1,1,1} = \{4e_{0,1,1} + e_{1,1,2}\}/(8+\lambda)$
$\lambda \in \Lambda_s$ の場合	◎ $C_1 = C_2 = C_3 = C_4 = 0$ ○ $\left. \begin{array}{ll} \alpha_0 = \sum_{i=1}^{2} d_{0,i,1} F_i(\tau_2, \lambda) & \alpha_1 = \sum_{i,k=1}^{2} d_{1,i,k} F_{i+2(k-1)}(\tau_2, \lambda) \\ \gamma_0 = \sum_{i=1}^{2} e_{0,i,1} F_i(\tau_2, \lambda) & \gamma_1 = \sum_{i,k=1}^{2} e_{1,i,k} F_{i+2(k-1)}(\tau_2, \lambda) \end{array} \right\}$ と表わせる ○ $d_{1,1,2} = -4d_{0,1,1}$　　$d_{1,2,2} = -4d_{0,2,1}$ $e_{1,1,2} = -4e_{0,1,1}$　　$e_{1,2,2} = -4e_{0,2,1}$

表 6.1 ②

注1° • (λ_1, λ_2) が regular のとき，表中の C_i と本文中の ${}_\ell C_{ij}^k$ との関係：

$C_1 = {}_0C_{11}^1 = -{}_0C_{11}^2$，　$C_2 = {}_1C_{11}^1$，　$C_3 = {}_1C_{11}^2$，　$C_4 = {}_2C_{11}^1 = -{}_2C_{11}^2$。

• (λ_1, λ_2) が singular のとき，表中の C_i と本文中の ${}_\ell C_{ij}^k$ との関係：

$C_1 = {}_0C_{11}^2$，　$C_2 = {}_1C_{11}^1$，　$C_3 = {}_1C_{11}^2$，　$C_4 = {}_2C_{11}^2$。

注2° $F(\tau, \lambda) = F_1(\tau, \lambda)$，　$\tilde{F}(\tau, \lambda) = F_3(\tau, \lambda)$，　$F_i(\tau, \lambda) = (L - \lambda) F_{i+2}(\tau, \lambda)$　$[i = 1, 2]$。

注3° $\Lambda_d = \{4k(k+3)\ ;\ k = 0, 1, 2, \cdots\}$，　$\Lambda_s = \{-8\}$。

付録

この付録で我々は序説で述べた予想：

$$\mathcal{H}=\{Mf(\tau_1,\tau_2)\ ;\ f\in C_c^\infty(X)\}$$

(A.1)
$$=\{\omega[\varphi_0(\tau_1,\tau_2)+\eta(1-\tau_1)\varphi_1(\tau_1,\tau_2)+\eta(1-\tau_2)\varphi_1(\tau_2,\tau_1)+\eta(1-\tau_1)\eta(1-\tau_2)\varphi_2(\tau_1,\tau_2)]$$
$$\varphi_k(\tau_1,\tau_2)=\varphi_k(\tau_2,\tau_1)\ \ (k=0,2)\ ,\ \varphi_0,\varphi_1,\varphi_2\in C_c^\infty([0,\infty)\times[0,\infty))\}$$

の下で後述の予想定理A.6が示せることにつき，その概略を述べる。その際，§6まで述べてきた結果は自由に用いることにする。また，予想(A.1)とともに我々は $\mathcal{D}'_H(X)\cong\mathcal{H}'$ であることを仮定して話を進めることにする。($X\setminus X_0$ 上での $\mathcal{D}'_H(X)$ の構造を我々はまだ良く理解していない。)

A.1. I.E.D. Θ の $\mathcal{D}'_H(X)$ における分解について。

Θ を $\mathcal{D}'_{\chi_{\lambda_1,\lambda_2};H}(X)$ の元としよう。§6では Mf の $(\tau_1,\tau_2)=(1,1),(0,1),(0,0)$ での挙動が分からない為，$C_c^\infty(X_0)$ の元 f に対して議論をしなければならなかったが，条件(A.1)の下では一般の $f\in C_c^\infty(X)$ を自由に取り扱うことができる。まず最初に我々は $f\in C_c^\infty(X)$ に対して

(A.2)
$$\int_{J_\ell}u_\ell(\tau_1,\tau_2)\,Mf(\tau_1,\tau_2)\,d\tau_1\,d\tau_2$$

の finite part を $\ell=2$ に対して以下のように定義する。$\delta_1,\delta_2>0$ に対し，

$$\int_{1+\delta_1}^{\infty} d\tau_1 \int_{1+\delta_2}^{\infty} d\tau_2\ u_2(\tau_1,\tau_2)\, Mf(\tau_1,\tau_2)$$

$$(A.3)\quad = \nu_{11}\frac{1}{\delta_1\delta_2} + \nu_{12}\frac{1}{\delta_1}\log\delta_2 + \frac{1}{\delta_1}\zeta_1(\delta_2) + \nu_{21}\log\delta_1\frac{1}{\delta_2} + \nu_{22}\log\delta_1\log\delta_2$$
$$+ \log\delta_1\,\zeta_2(\delta_2) + \xi_1(\delta_1)\frac{1}{\delta_2} + \xi_2(\delta_1)\log\delta_2 + G'(\delta_1,\delta_2)$$

が成り立つことに注意して

$$\mathrm{P.f.}\int_{J_2} u_2(\tau_1,\tau_2)\, Mf(\tau_1,\tau_2)\, d\tau_1 d\tau_2 = G'(0,0).$$

但し，(A3)で $\nu_{ij}\in\mathbb{C}$，ζ_i は $\lim_{\delta_2\to+0}\zeta_i(\delta_2)$ が存在するような δ_2 の函数，ξ_i は $\lim_{\delta_1\to+0}\xi_i(\delta_1)$ が存在するような δ_1 の函数，また G' は $G'(0,0)\equiv\lim_{\substack{\delta_1\to+0\\ \delta_2\to+0}} G'(0,0)$ が存在するような δ_1,δ_2 の二変数函数である。 明らかに $f\in C_c^\infty(X_0)$ に対しては，ここで定義された finite part の定義は，§6 (6.3) における finite part の定義と一致する。 こうして，任意の $f\in C_c^\infty(X)$ に対して (6.4) により $\langle \Theta_{u_2}, f\rangle$ を定義すると，この Θ_{u_2} は §6 で定義された Θ_{u_2} の $C_c^\infty(X)$ 上への拡張となり $\Theta_{u_2}\in\mathcal{D}'_H(X)$ が得られる。 $\ell=0,1$ に対しても同様の手続をすることにより，Θ_{u_0}，Θ_{u_1} が定義できる。

次に，我々は各 $\Theta\in\mathcal{D}'_{\chi_{\lambda_1,\lambda_2},H}(X)$ に対し (6.5) で定められた $A_m\otimes\alpha_m$，$E_m\otimes\gamma_m$ をそれぞれ $\mathcal{D}'_H(X)$ の元に拡張しよう。 すでに我々は α_m,γ_m が満たすべき条件をいくつか求めてきた (cf. 表 6.1) ことに注意する。 まず $A_m\otimes\alpha_m$ をみる為，我々は予想 (A.1) から従う $\tau_1=1$ のまわりの漸近展開：

(A.4) $$Mf(\tau_1,\tau_2) \sim \sum_{m=0}^{\infty} A_m(f,\tau_2)(1-\tau_1)^m + 7(1-\tau_1)\sum_{m=0}^{\infty} B_m(f,\tau_2)(1-\tau_1)^m \qquad (\tau_2>1),$$

及び，$A_m(f,\tau_2)$ の $\tau_2=1$ のまわりの漸近展開：

(A.5) $$A_m(f,\tau_2) \sim \sum_{n=0}^{\infty} \xi_{m,n}(f)(1-\tau_2)^n \qquad (\tau_2>1)$$

を $f\in C_c^\infty(X)$ に対して行なう。一方 $\alpha_m(\tau_2)$ は表6.1の中の形で表わされていたから，$\delta>0$ に対して

(A.6) $$\int_\delta^\infty \alpha_m(\tau_2)A_m(f,\tau_2)\,d\tau_2 = \nu_1\frac{1}{\delta} + \nu_2\log\delta + G''(\delta)$$

が成立する。但し $\nu_i\in\mathbb{C}$，$G''(\delta)$ は $G''(0)=\lim_{\delta\to+0}G''(\delta)$ が存在するような δ の函数。そこで我々は，

(A.7) $$\mathrm{P.f.}\int_0^\infty \alpha_m(\tau_2)A_m(f,\tau_2)\,d\tau_2 = G''(0)$$

とおき，

(A.8) $$\langle A_m\otimes\alpha_m, f\rangle = \mathrm{P.f.}\int_0^\infty \alpha_m(\tau_2)\,\alpha_m(\tau_2)\,d\tau_2 \qquad (f\in C_c^\infty(X))$$

により $A_m\otimes\alpha_m$ を定義すると，$A_m\otimes\alpha_m\in\mathcal{D}'_H(X)$ であり，しかも明らかにこの $A_m\otimes\alpha_m$ は §5 で定義されたものの拡張になっている。同様な議論を $E_m\otimes\gamma_m$ にも適用すれば，$E_m\otimes\gamma_m$ の $\mathcal{D}'_H(X)$ の元への拡張も得られる。

こうして我々は $\Theta\in\mathcal{D}'_{\chi_{\lambda_1,\lambda_2},H}(X)$ に対し，(6.5)よりも精密に，

(A.9) $$\Theta = \sum_{\ell=0}^{\infty}\Theta_{u_\ell} + \sum_{m=0}^{1}A_m\otimes\alpha_m + \sum_{m=0}^{1}E_m\otimes\gamma_m + \Theta_{\mathcal{U}} + \Theta_{\mathcal{N}}$$

という $\mathcal{D}'_H(X)$ の中での分解が得られる。($\alpha_m=0$ $(m\geqq\mu)$，$\beta_m=0$ $(\forall m\geqq 0)$ などを用いていることに注意。) なお，ここで $\Theta_{\mathcal{U}}$ は $\mathcal{U}=X\setminus(X_0\cup\mathcal{N})$ 上に台を持つ $\mathcal{D}'_H(X)$ の元，$\Theta_{\mathcal{N}}$

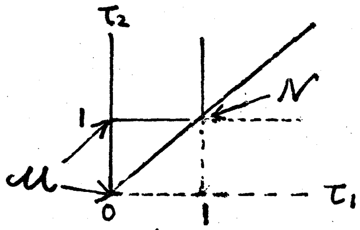


表 A.1

は巾零軌道 $\mathcal{N}$ に台を持つ $\mathcal{D}'_H$ の元である。　この γ_m, $\Theta_{\mathcal{U}}$ については，予想 (A.1) 及び仮定 $\mathcal{D}'_H(X)\cong\mathcal{M}'$ を用いて [1, Appendix] と同様の議論をすることにより次の補題が成立する。

<u>補題 A.1.</u>　(i) $(0,1)$ 上の解析函数 $\gamma_m(\tau_2)$ は $\tau_2=0$ に解析的に接続される。

(ii) $\Theta_{\mathcal{U}}=0$。

<u>A.2.</u>　$\mathcal{N}$ 上の I.D. について.

次に我々は $\Theta_{\mathcal{N}}$ の考察に移ろう。　予想 (A.1) からすぐに分かるように Mf の $(\tau_1,\tau_2)=(1,1)$ における漸近挙動は,

$$
(\mathrm{A.10})\qquad
\begin{aligned}
Mf(\tau_1,\tau_2) \sim & \sum_{m,n=0}^{\infty} \Lambda_{m,n}(f)\,(1-\tau_1)^m(1-\tau_2)^n \\
& + 7(1-\tau_1)\sum_{m,n=0}^{\infty} \Lambda'_{m,n}(f)\,(1-\tau_1)^m(1-\tau_2)^n \\
& - 7(1-\tau_2)\sum_{m,n=0}^{\infty} \Lambda'_{n,m}(f)\,(1-\tau_1)^m(1-\tau_2)^n \\
& + 7(1-\tau_1)7(1-\tau_2)\sum_{m,n=0}^{\infty} \Lambda''_{m,n}(f)\,(1-\tau_1)^m(1-\tau_2)^n \\
& (\Lambda_{m,n}(f),\ \Lambda'_{m,n}(f),\ \Lambda''_{m,n}(f)\in\mathbb{C})。
\end{aligned}
$$

但し，$w\varphi_k(\tau_1,\tau_2)$ の条件などから $\Lambda_{m,n}(f)$, $\Lambda'_{m,n}(f)$, $\Lambda''_{m,n}(f)$ はそれぞれ,

$$
(\mathrm{A.11})\qquad
\begin{cases}
\Lambda_{m,n}(f)=-\Lambda_{n,m}(f),\quad \Lambda''_{m,n}(f)=-\Lambda''_{n,m}(f) & (\forall m,n) \\
\displaystyle\sum_{m+n=\ell} \Lambda'_{m,n}(f)=0 & (\ell=0,1,2,\cdots)
\end{cases}
$$

を満たす。　特に $\Lambda_{m,m}(f)=\Lambda''_{m,m}(f)=0$ $(m=0,1,2,\cdots)$ である。

今，各 m,n に対し，$\Lambda_{m,n}$, $\Lambda'_{m,n}$, $\Lambda''_{m,n}$ を,

$\Lambda_{m,n}$ [resp. $\Lambda'_{m,n}, \Lambda''_{m,n}$] $: C_c^\infty(X) \longrightarrow \mathbb{C} : f \longmapsto \Lambda_{m,n}(f)$ [resp. $\Lambda'_{m,n}(f), \Lambda''_{m,n}(f)$]

で定義すると，$\Lambda_{m,n}, \Lambda'_{m,n}, \Lambda''_{m,n} \in \mathfrak{D}'_H(X)$，かつ上の事実と仮定 $\mathfrak{D}'_H(X) \cong \mathcal{M}'$ から N に台を持つ $\mathfrak{D}'_H(X)$ の元 Θ' は $\{\Lambda_{m,n}, \Lambda''_{m,n}\}_{\substack{m,n=1,2,\cdots \\ m>n}}$ 及び $\{\Lambda'_{m,n}\}_{\substack{m=1,2,\cdots \\ n=0,1,2,\cdots}}$ の一次結合しかも有限和として一意的に表わすことができる：

(A.12) $$\Theta' = \sum\sum_{1 \leq n < m < \infty} (\nu_{m,n}\Lambda_{m,n} + \nu''_{m,n}\Lambda''_{m,n}) + \sum_{m=1}^{\infty}\sum_{n=0}^{\infty} \nu'_{m,n}\Lambda'_{m,n}$$
$(\nu_{m,n}, \nu'_{m,n}, \nu''_{m,n} \in \mathbb{C})$。

次の命題は $(\Omega_i - \chi_{\lambda_1,\lambda_2}(\Omega_i))\Theta' = 0$ を (A.12) などを用いて計算することから得られる。

命題 A.2. N に台を持つ $\mathfrak{D}'_{\chi_{\lambda_1,\lambda_2},H}(X)$ の元が存在する為の必要充分条件は $(\lambda_1, \lambda_2) = (4(i-\mu)(i+1), 4(j-\mu)(j+1))$ $[0 \leq i, j \leq \mu-1]$ 即ち $(\lambda_1, \lambda_2) = (-8, -8)$ となることである。またこのとき Θ' は $\Theta' = \nu\Lambda_{1,0}$ と表わせる。

A.3. 予想定理とその証明の outline。

我々は，§A.2 で Θu_ℓ, $A_m \otimes \alpha_m$, $E_m \otimes \gamma_m$ などの定義を，為直したが，それらに $\Omega_i - \chi_{\chi_{\lambda_1,\lambda_2}}(\Omega_i)$ を作用させてみよう。そのとき，Θu_ℓ に関しては部分積分，$A_m \otimes \alpha_m$, $E_m \otimes \gamma_m$ に関しては容易に分かる関係式：

$$\langle \Omega_1(A_m \otimes \alpha_m), f \rangle = \text{p.f.} \int_1^\infty \{\alpha_m(\tau_2)(L_1 A_m)(f, \tau_2) + \alpha_m(\tau_2)(L_2^* A_m)(f, \tau_2)\} d\tau_2$$

$$\langle \Omega_2(A_m \otimes \alpha_m), f \rangle = \text{p.f.} \int_1^\infty \alpha_m(\tau_2)(L_2^* L_1 A_m)(f, \tau_2) d\tau_2$$

など，それに表6.1の結果を用いると，次の主張が成り立つことが分かる。

<u>補題 A.3.</u>　$\Theta \in \mathcal{D}'_{\chi_{\lambda_1,\lambda_2},H}(X)$，$\Theta_0 = \sum_{\ell=0}^{2} \Theta u_\ell + \sum_{m=0}^{1} A_m \otimes \alpha_m + \sum_{m=0}^{1} E_m \otimes \gamma_m$［$u_\ell, \alpha_m; \gamma_m$ は (A.9) で現われるもの］とするとき，

(A.13)　$< (\Omega_1 - \chi_{\lambda_1,\lambda_2}(\Omega_1))\Theta_0, f >$

$$= \sum_{m=0}^{1} \mathrm{P.f.} \int_1^\infty \{\alpha_m(\tau_2)(L_2^* A_m)(f,\tau_2) - (L_2\alpha_m)(\tau_2) A_m(f,\tau_2)\} d\tau_2$$

$$+ \sum_{m=0}^{1} \mathrm{P.f.} \int_0^1 \{\gamma_m(\tau_1)(L_1^* E_m)(f,\tau_1) - (L_1\gamma_m)(\tau_1) E_m(f,\tau_1)\} d\tau_1$$

(A.14)　$< (\Omega_2 - \chi_{\lambda_1,\lambda_2}(\Omega_2))\Theta_0, f >$

$$= \sum_{m=0}^{1} \mathrm{P.f.} \int_1^\infty \{\alpha_m(\tau_2) L_2^*(L_1 A_m)(f,\tau_2) - (L_2\alpha_m)(\tau_2)(L_1 A_m)(f,\tau_2)\} d\tau_2$$

$$+ \sum_{m=0}^{1} \mathrm{P.f.} \int_0^1 \{\gamma_m(\tau_1) L_1^*(L_2 E_m)(f,\tau_1) - (L_1\gamma_m)(\tau_1)(L_2 E_m)(f,\tau_1)\} d\tau_1$$

が各 $f \in C_c^\infty(X)$ について成り立つ。但し，$A_m(f,\tau_2)$ は (A.4)，$E_m \otimes \gamma_m$ は $\tau_2 = 1$ のまわりの漸近展開：

(A.15)　$$Mf(\tau_1,\tau_2) \sim \sum_{m=0}^{\infty} E_m(f,\tau_1)(1-\tau_2)^m + \eta(1-\tau_2)\sum_{m=0}^{\infty} F_m(f,\tau_1)(1-\tau_2)^m \quad (\tau_1 < 1)$$

により定められたもの。

さて，上の $E_m(f,\tau_1)$ の $\tau_1 = 1$ のまわりの漸近挙動を，

(A.16)　$$E_m(f,\tau_1) \sim \sum_{n=0}^{\infty} \xi'_{m,n}(f)(1-\tau_1)^n \quad (\tau_1 < 1 ; f \in C_c^\infty(X))$$

としよう。$\xi_{m,n}(f)$ を (A.5) で定義したものとすれば，これらと $\Lambda_{m,n}(f)$，$\Lambda'_{m,n}(f)$ との間の関係は，

(A.17)　$$\xi_{m,n}(f) = \Lambda_{m,n}(f)$$

(A.18)　$$\xi'_{m,n}(f) = \begin{cases} \Lambda_{n,m}(f) & (0 \leqq n < \mu) \\ \Lambda_{n,m}(f) + \Lambda'_{n-\mu,m}(f) & (\mu \leqq n < \infty) \end{cases}$$

であることが容易に分かる。　この事実と，(A.13)，(A.14)の右辺の部分積分の計算，及び(A.11)などから，

(A.19)　　$(\Omega_i - \chi_{\lambda_1,\lambda_2}(\Omega_i))\,\Theta_0 = \sum_{0 \le n < m \le \mu} \nu^{(i)}_{mn} \Lambda_{mn} + \nu'^{(i)}_{10} \Lambda'_{10}$

がある $\nu^{(i)}_{m,n}$，$\nu'^{(i)}_{m,n} \in \mathbb{C}$ について成立することが確かめられる。従って，$(\Omega_i - \chi_{\lambda_1,\lambda_2}(\Omega_i))\,\Theta_N$ の計算を行ない，$(\Omega_i - \chi_{\lambda_1,\lambda_2}(\Omega_i))\,\Theta = 0$　〔$\Theta = \Theta_0 + \Theta_N$ に注意〕　とおけば，(補題5.4と同様な論法により) 次の補題が従う。

<u>補題A.4.</u>　$\Theta \in \mathcal{D}'_{\chi_{\lambda_1,\lambda_2},H}(X)$ に対し，Θ_N を(A.9)により定まるものとするとき，ある $\nu \in \mathbb{C}$ に対して

(A.2)　　$\Theta_N = \nu \Lambda_{10}$

が成り立つ。

以上から，§6の議論と同様に，$(\Omega_i - \chi_{\lambda_1,\lambda_2}(\Omega_i))\,\Theta = 0$ の左辺を $\Lambda_{m,n}$，$\Lambda'_{m,n}$ で展開し，かつそれらの係数を0とおくことにより次の命題が得られる。

<u>命題A.5.</u>　Θ を $\mathcal{D}'_{\chi_{\lambda_1,\lambda_2},H}(X)$ の元，その(A.9)における分解を

(A.21)　　$\Theta = \sum_{\ell=0}^{2} \Theta_{u_\ell} + \sum_{m=0}^{1} (A_m \otimes \alpha_m + E_m \otimes \gamma_m) + \Theta_{\mathcal{U}} + \Theta_N$

とする。　また，Λ_d，Λ_s 及び $d^k_{m,i}$，$e^k_{m,i}$，$d_{m,i,k}$，$e_{m,i,k}$ は表6.1であげたもの，そして $\Theta_N = \nu \Lambda_{10}$ とする。(cf. 補題A.4)。　そのとき，$\Theta_{\mathcal{U}} = 0$ となり，かつ $d^k_{m,i}$，$e^k_{m,i}$，$d_{m,i,k}$，$e_{m,i,k}$ については表6.1における条件に加えて，次の各条

件式が成立する。

(i) (λ_1, λ_2) が regular $(\lambda_1 \neq \lambda_2)$，かつ $\lambda_1, \lambda_2 \notin \Lambda_S$ のとき，

$$4\mu(d_{1,1}^1 + d_{1,1}^2 + e_{1,1}^1 + e_{1,1}^2) = \nu\{4(3\mu-2)+\lambda_1+\lambda_2\}.$$

(ii) (λ_1, λ_2) が regular，かつ $\lambda_k \notin \Lambda_S$，$\Lambda_{k'} \in \Lambda_S$ $\left(\begin{smallmatrix} k, k'=1,2 \\ k \neq k' \end{smallmatrix}\right)$ のとき，

$$d_{1,2}^{k'} = 0, \qquad e_{1,2}^{k'} = 0$$

$$4\mu(d_{1,1}^{k'} + e_{1,1}^{k'}) = \nu\{4(3\mu-2)+\lambda_1+\lambda_2\}$$

$\left\{\begin{array}{l} \lambda_k \notin \Lambda_d \text{ の場合はさらに次式も成立：} \\ \qquad e_{1,1}^{k'} = 0。\end{array}\right.$

(iii) (λ_1, λ_2) が singular $(\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda)$，かつ $\lambda \notin \Lambda_S$ のとき，

$$4\mu(d_{1,1,1} + e_{1,1,1}) = \nu\{4(3\mu-2)+2\lambda\}.$$

(iv) (λ_1, λ_2) が singular $(\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda)$，かつ $\lambda \in \Lambda_S$ 即ち $\lambda = -8$ のとき，

$d_{m,i,k} = 0$，　$e_{m,i,k} = 0$　（すべての m, i, k に対して）

〔ν の条件式はなし〕。

逆に，u_ℓ, α_m, γ_m 及び $\Theta_N = \nu\Lambda_{10}$ を表 6.1 及び上の (i) 〜 (iv) の条件を満たすように選び，

$$\Theta = \sum_{\ell=0}^{2} \Theta_{u_\ell} + \sum_{m=0}^{1} A_m \otimes \alpha_m + \sum_{m=0}^{1} E_m \otimes \gamma_m + \Theta_N$$

とおくとき，$\Theta \in \mathcal{D}'_{\chi_{\lambda_1,\lambda_2,H}}(X)$ である。

命題 A.5 からすぐに定理 1.1 の逆が云えることが分かり，従って次の定理が予想 (A.1) の下で示せたことになる。

<u>予想定理 A.6.</u>　Θ' を X' 上の I.E.D.〔i.e. $\Theta \in \mathcal{D}'_{\chi_{\lambda_1,\lambda_2,H}}(X')$〕

とし，その J_l' 上への各制限を $\frac{u_l}{\omega}$ とする $(l=0,1,2)$。そのとき，Ⓗ$'$ が X 上の I.E.D. Ⓗ $\{$i.e. Ⓗ $\in \mathcal{D}'_{\chi_{\lambda_1,\lambda_2},H}(X)\}$ に拡張される為の必要充分条件は，u_l が定理1.1の条件 i) あるいは ii) のすべての条件を満たすことである。

λ_1, λ_2 のうちの少なくとも一方が Λ_s に入ってるとき〔即ち -8 のとき〕，$\mathcal{D}'_{\chi_{\lambda_1,\lambda_2},H}(X)$ の元はすべて $X \setminus X'$ 上に台を持っていることに注意しておく。次の命題は命題A.5からすぐに得られる。

<u>命題A.7.</u> $m = \#\{k \in \{1,2\} ; \lambda_k \in \Lambda_d\}$ とおくとき，$\mathcal{D}'_{\chi_{\lambda_1,\lambda_2},H}(X)$ の次元は

$$\dim \mathcal{D}'_{\chi_{\lambda_1,\lambda_2},H}(X) = 2^m$$

によって与えられる。但し，$\#\{\cdot\}$ は集合 $\{\cdot\}$ の元の個数，$\Lambda_d = \{4k(k+3) ; k=0,1,2,\cdots\}$ とする。

References

[1] Aoki, S. and Kato, S.: Connection formulas for invariant eigendistributions on certain semisimple symmetric spaces, 数理研講究録 570 (1985), 111-132.

[2] Faraut, J.: Distributions sphérique sur les espaces hyperboliques, J. Math. Pures Appl., 58 (1979), 369-444.

[3] Hirai, T: Invariant eigendistributions of Lapace operators on real simple Lie groups, I. Case of SU(p,q), Japan. J. Math., 39 (1970), 1-68.

[4] Hirai, T.: Invariant eigendistributions of Lapace operators on real simple Lie groups, II , Japan. J. Math. New series, 2 (1976), 27-89.

[5] Hoogenboom, B.: Spherical functions and differential operators on complex Grassmann manifolds, Ark. Math. 20 (1982), 69-85.

[6] 犬井鉄郎：特殊函数，岩波全書 252，岩波書店.

[7] Kengmana, T.: Characters of discrete series for pseudo-riemannian symmetric spaces, Proc. of the Univ. of Utah Conference 1982, Birkhäuser (1983), 177-183.

[8] 松島与三：多様体入門，裳華房 (1966).

[9] Osima, T. and Matsuki, T.: Orbits on affine symmetric spaces under the action of the isotropy subgroups, J. Math, Soc. Japan, 32, No. 2 (1980), 399-414.

[10] Sano, S.: Invariant spherical distributions and the Fourier inversion formula on $GL(n,\mathbb{C})/GL(n,\mathbb{R})$, J. Math. Soc. Japan, 36, No. 2 (1984), 191-219.

[11] Schwartz, L.: Théorie des distributions, Hermann, Paris (1973).

[12] Warner, G.: Harmonic Analysis on semi-simple Lie groups I, II, Springer-Verlag, Berlin, Heidelberg, New York (1972).

R