数理解析研究所講究録
第598巻 1986年 78-104

表現論とK－理論

阪大基礎工　河上　哲　(Satoshi Kawakami)
岡大教養部　梶原　毅　(Tsuyoshi Kajiwara)

数学における一つの理論の生成・発展が、外的刺激と内的欲求の相克・融和に基づくものであるとすれば、作用素環論における C^*－環のK－理論は、将に、従来の位相的K－理論の自然な拡張・非可換化という流れの中で Grothendieck による代数的K－理論に＊－構造と位相構造を加味するという外的な刺激と、BDF理論や Elliott による次元群の概念の統一化や C^*－環の同型問題とそれに関連する基本的な問題の解決という内的な欲求を背景として誕生し、今日尚、更なる刺激と欲求の渦中で発展を続けているものと思われる。作用素環的K－理論の本格的な定式化は Kasparov により、Hilbert C＊-module の概念を用いてなされたが、この事実とその後の発展は、表現論とK－理論の深い係わりを表明すると同時に、Gelfand や Harish-Chandra等による微分作用素の固有値展開と超関数を用いる対称空間上の調和解析がK－理論と結びつく可能性を暗示しているように思われる。そこで、本稿においては、表現論とK－理論の関連性を念頭に置き、群 C^*－環のK－理論に焦点を絞って現在迄に得られている結果を概説する。

まず、§0でK－群の定義とその基本的な性質を解説し、§1において、一般の局所コンパクト群Gの群C*-環$C^*(G)$及び縮約群環$C^*_r(G)$のK－理論について概観し、§2で連結リー群の Baum-Connes-Kasparov 予想に関連して$G=SL(2,\mathbb{R})$の場合を A.Valette[V2]の素朴な方法に従って概説する。

§0．K－群の定義と性質

ヒルベルト空間H上の有界線形作用素全体のなすC^*－環を$B(H)$と表わし、H上のコンパクト作用素全体のなすC^*－環を$\mathcal{K}(H)$と表わす。特に、Hとして可分な無限次元ヒルベルト空間をとる時、$\mathcal{K}(H)$を単に$\mathcal{K}$と省略する。

［1］K－群の定義

（1）K_0－群

単位元を持つC^*－環Aに対し、Aと$\mathcal{K}$のC^*－環としてのテンソル積$A\otimes\mathcal{K}$の射影元全体 $\mathrm{Proj}(A\otimes\mathcal{K})$ に Murray - von Neumann の同値関係～を入れる。つまり、二つの射影元pとqに対し、$A\otimes\mathcal{K}$の元vが存在して、$p=v^*v$，$q=vv^*$を満たす時、$p\sim q$とする。この時、互いに直交する射影元p'とq'が、$p\sim p'$，$q\sim q'$を満たすようにとれる。ここで、同値類$[p]$と$[q]$の加法を、

$$[p]+[q] = [p'+q']$$

によって定めると、$\mathrm{Proj}(A\otimes\mathcal{K})/\sim$ に半加群の構造が入る。これをG_0とする。この半加群G_0の Grothandieck 加群がC^*－環AのK_0－群と呼ばれているもので、$K_0(A)$と表わされる。

単位元を持つ二つのC^*－環AとBの間の単位元を保存する＊-準同型写像π：A ⟶ Bは、自然にK_0－群の準同型写像π_*：K_0(A) ⟶ K_0(B)を誘導する。この事実を用いて、必ずしも単位元を持たない一般のC^*－環AのK_0－群が次のように定義される。Aに単位元を付加したC^*－環を$\tilde{A}$とすると、$\tilde{A}$から$\mathbb{C}$（$\cong \tilde{A}/A$）への射影（単位元を保存する＊-準同型写像）πが定まるので、ここで、$K_0(A) \equiv \ker \pi_*$と定義する。この定義は、単位元を持つC^*－環に対しては前の定義と一致し矛盾は生じない。

例1－1．　$K_0(\mathbb{C}) \cong \mathbb{Z}$．

A＝$\mathbb{C}$の場合、$\mathrm{Proj}(A \otimes \mathcal{K})/\sim$の代表元としては、$n$次元射影$p_n$（$n$＝0,1,2,･･･）をそれぞれとることで、その半加群G_0は、$G_0 = \{0\} \cup \mathbb{N}$となる。このGrothandieck加群は明らかに$\mathbb{Z}$である。

例1－2．　$K_0(B(H)) = 0$．（Hは無限次元）

A＝B(H)の場合は、$A \otimes \mathcal{K}$の中に無限次元射影も仲間入りするので、その半加群G_0は$G_0 = \{0\} \cup \mathbb{N} \cup \{\infty\}$となる。このように、吸収元$\{\infty\}$を持つ半加群のGrothandieck加群は、0となってしまう。

（2）K_1－群

単位元を持つC^*－環Aに対し、$(A \otimes \mathcal{K})^{\sim}$（単位元付加）のユニタリー元全体$\mathcal{U}((A \otimes \mathcal{K})^{\sim})$は、ノルム位相で位相群になり、この群の単位元を含む連結成分（正規部分群）による商

群 $\mathcal{U}((A\otimes\mathcal{K})^{\sim})/\mathcal{U}_0((A\otimes\mathcal{K})^{\sim})$ が C^*－環Aの K_1－群と呼ばれ、$K_1(A)$ と表わされる。この $K_1(A)$ が可換群になることは容易に確かめられる。また、この場合、$K_1(A^{\sim}) = K_1(A)$ となるので、単位元を持たない C^*－環Aにたいしては、$K_1(A) \equiv K_1(A^{\sim})$ と定義しても前述の K_0－群の場合と同様に定義しても結果は一致する。

例２－１．$K_1(\mathbb{C}) = 0$, $K_1(B(H)) = 0$.

例２－２．$K_1(C(\mathbb{T})) \cong \mathbb{Z}$.

１次元トーラス $\mathbb{T}$ 上の連続関数全体のなす可換 C^*－環 $C(\mathbb{T})$ に於いては、$\mathbb{T} = \{z \in \mathbb{C}\ ;\ |z| = 1\}$ 上の関数 z^n $(n = 0, \pm1, \pm2, \cdots)$ がその K_1－群の生成元を与える。従って、K_1－群は、$\mathbb{T}$ 上の関数の widing number を数える事に相当する。

［２］K－群の基本的性質

（１）K_* は C^*－環と*-準同型のなす圏から可換群と群準同型のなす圏への共変関手で次の性質を満たす。

１－１（ホモトピー不変性）．　C^*－環A，Bに対して、ϕ を閉区間[0,1] から Hom（A，B）への連続写像とすると、$\phi(0)_* = \phi(1)_*$ となる。

１－２（半完全性）．　C^*－環の完全系列

$$0 \longrightarrow J \longrightarrow A \longrightarrow B \longrightarrow 0$$

に対して、K－群の完全系列

$$K_*(J) \longrightarrow K_*(A) \longrightarrow K_*(B)$$

を得る。

１－３（安定性）．　$K_*(A) \cong K_*(A\otimes\mathcal{K})$

J.Cuntz [Cu2] によれば、一般に、C^*－環のあるクラスと＊-準同型のなす圏から可換群と群準同型のなす圏への共変関手Eが上記の１－１，１－２，１－３を満たす時は自然に、懸垂，錘， connecting map 等が定義され、群の長完全系列を得る。ところが、K－群の場合は、次の Bott の周期性により、六項完全系列が成立している。

（２）２－１（ Bott の周期性）．

$$K_1(A \otimes C_0(\mathbb{R})) \cong K_0(A)$$

２－２（六項完全系列）． C^*－環の完全系列

$$0 \longrightarrow J \xrightarrow{\iota} A \xrightarrow{\pi} B \longrightarrow 0$$

に対して、K－群の完全系列

$$\begin{array}{ccccc} K_0(J) & \xrightarrow{\iota_*} & K_0(A) & \xrightarrow{\pi_*} & K_0(B) \\ \delta \uparrow & & & & \downarrow \delta \\ K_1(B) & \xleftarrow[\pi_*]{} & K_1(A) & \xleftarrow[\iota_*]{} & K_1(J) \end{array}$$

を得る。

（３）その他の性質

３－１．局所コンパクト空間Xに対し、

$$K_*(C_0(X)) = K^*(X).$$

但し、K^* は幾何学的K－群を意味する。

３－２．$K_*(A \oplus B) = K_*(A) \oplus K_*(B)$．

３－３（連続性）．$K_*(\varinjlim A_n) = \varinjlim K_*(A_n)$．

但し、$\varinjlim$は、帰納的極限を表わす。

３－４（ Connes の Thom 同型）．C^*－環Aに$\mathbb{R}$が作用する時、その作用をαとすると

$$K_*(A \rtimes_\alpha \mathbb{R}) \cong K_{*+1}(A).$$

３－５（Pimsner-voiculescu の六項完全系列）．C^*－環Ａに$\mathbb{Z}$が作用する時、その作用をαとすると、Ｋ－群の完全系列

$$\begin{tikzcd}
K_1(A \rtimes_\alpha \mathbb{Z}) \arrow[d] & K_1(A) \arrow[l, "\iota_*"'] & K_1(A) \arrow[l, "id-\alpha_*^{-1}"'] \\
K_0(A) \arrow[r, "id-\alpha_*^{-1}"] & K_0(A) \arrow[r, "\iota_*"] & K_0(A \rtimes_\alpha \mathbb{Z}) \arrow[u]
\end{tikzcd}$$

を得る。

以上は、後の概説に必要とする事項を単に整理しただけで、詳細は中神氏のノート[Sr]，渚氏のノート[Ks]や J.L.Taylor [Ty]，J.Cuntz [Cu2] の解説や近く出版される予定になっている B.Blackadarの本[Bl]等に譲らせて頂ます。

§１　群C^*－環のＫ－理論概観

［１］Amenable群

局所コンパクト群Ｇが invariant mean を持つ時 amenable と言われるが、これは、群Ｇの正則表現λから標準的に定まる群環$C^*(G)$から縮約群環$C^*_\gamma(G)$への$*$-準同型λが単射的である（従って同型を与える）事と同値である。このλが必ずしも単射的でなくともλから誘導される群環のＫ群$K_*(C^*(G))$から縮約群環のＫ群$K_*(C^*_\gamma(G))$への群準同型λ_*が単射的になる場合がある。この時、ＧはＫ-amenable と言われ、Ｋ－理論の中で興味ある対象の一つになっている。 amenable 群としては、可換群、コンパクト群、可解（リー）群等が典型的な

例として挙げられるが、amenable群でないK-amenable 群としては、n元生成の自由群F_n、$SL(2,\mathbb{R})$、$SL(2,\mathbb{Z})$、$SL(2,\mathbb{Q}_p)$等が知られている。

（1）可換群

可換群Gの dual を$\hat{G}$とすると、$C^*(G)$ $(\cong C^*_r(G))\cong C_0(\hat{G})$となるから、位相空間Gの幾何学的K－理論に帰着される。 $K_*(C^*(G))=K^*(\hat{G})$.

例1－1. $G=\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$（p次巡回群）

$$K_i(C^*(G))=K_i(\mathbb{C}^p)=\begin{cases} i=0 & \mathbb{Z}^p \\ i=1 & 0 \end{cases}$$

例1－2. $G=\mathbb{Z}^n$

$$K_i(C^*(\mathbb{Z}^n))\cong K^i(\mathbb{T}^n)=\begin{cases} i=0 & \Lambda^0(\mathbb{Z}^n) \\ i=1 & \Lambda^1(\mathbb{Z}^n) \end{cases}$$

ここで、$\Lambda^i(\mathbb{Z}^n)$は$\mathbb{Z}^n$の外積代数の偶数部分（i=0）と奇数部分（i=1）を表わす。

例1－3. $G=\mathbb{R}^n$

$$K_i(C^*(\mathbb{R}^n))\cong K^i(\mathbb{R}^n)=\begin{cases} i\equiv n & \mathbb{Z} \\ i\equiv n+1 & 0 \end{cases}$$

（２）コンパクト群

群Ｇがコンパクトの時は、その正則表現の既約分解に関する Peter-Weylの定理により、Ｃ＊（Ｇ）の構造は、

$$C^*(G) = \bigoplus_{\pi \in \hat{G}} M_{d_\pi}$$

となっている。ここで、$\hat{G}$はＧの dual 、$d_\pi = \dim \pi$は既約表現πの次元、M_d は d次行列環を表わす。従って、そのＫ－群は、

$$K_i(C^*(G)) = \bigoplus_{\pi \in \hat{G}} K_i(M_{d_\pi}) = \begin{cases} i=0 & \bigoplus_{\pi \in \hat{G}} Z \cdot \pi \fallingdotseq R(G) \\ i=1 & 0 \end{cases}$$

で与えられる。ここで、Ｒ（Ｇ）はＧの表現環を表わす。

（３）半直積群

群Ｋが群Ｎに自己同型群として作用している時、半直積群Ｇ＝$N \rtimes K$が定義される。この時、$C^*(G) = C^*(N) \rtimes K$、$C^*_r(G) = C^*_r(N) \rtimes_r K$となり、Ｃ＊-接合積のＫ－理論に帰着される。Ｋ、Ｎがamenableの時、Ｇも amenable となり、$C^*(G) = C^*_r(G)$である。

<u>３－１</u>　Ｋ＝$\mathbb{Z}$の場合

この時は、Ｃ＊（Ｇ）のＫ－群の具体的な計算においては、Pimsner-Voiculescuの 6-term exact sequence[PV1] が有力な武器となっている（小高氏のノート[Ks]）。離散 Heisenberg群等が典型的な例として挙げられる。

3－2　K＝$\mathbb{R}$の場合

この時は、Connes の Thom 同型[Co]により、C＊（G）のK－群はC＊（N）のK－群に帰納される。

$$K_*(C^*(G)) \cong K_{*+1}(C^*(N)).$$

K＝$\mathbb{Z}$、$\mathbb{R}$以外の場合は、未だ有力な一般的方法が開発されていない。

（4）単連結な可解リー群

n次元単連結可解リー群Gは常にn-1次元単連結可解リー群Nの$\mathbb{R}$による半直積群と同型であるという構造定理により、上記3－2のConnesの Thom 同型を用いる方法で、容易に$C^*(G)$のK－群が次のように与えられる事がわかる。

$$K_i(C^*(G)) = \begin{cases} i \equiv \dim G & \mathbb{Z} \\ i \equiv \dim G+1 & 0 \end{cases} \quad \text{（例1-3参照）}.$$

注4－1　同様の方法により、C＊-環Aのn次元単連結可解リー群GによるC＊-接合積$A \rtimes G$のK－群は、

$$K_*(A \rtimes G) \cong K_{*+n}(A)$$

となっている。

注4－2　amenableリー群Gについても、上と同様の結果がkasparov[Ka4]により知られているが、この場合は、Gの極大コンパクト部分群によって記述される。（後述［3］の Baum-Connes-kasparov 予想を参照）

［２］離散群

離散群Gが$\mathbb{Z}$との半直積$N \rtimes \mathbb{Z}$（主として、Nは可換離散群）になっている場合には、Pimsner-Voiculescuの 6-term exact sequences によってそのK－群を計算する事ができる（上記3－1を参照）。

そうでないケースとしてまず対象になったのが、n元生成の自由群F_n であり、この場合も Choi[Ch] と Pimsner-Voiculescu[PV2] によってそのK－群が計算された。

$$K_i(C^*(F_n)) = \left\{ \begin{array}{ll} i=0 & \mathbb{Z} \\ & \\ i=1 & \mathbb{Z}^n \end{array} \right\} = K_i(C^*_\gamma(F_n))$$

この計算が可能となった本質的な点は、自由群F_n が tree にうまく作用していることを見抜き、これを一般化したのがJulg-Valette[JV]である。ここでは更に、（離散）群Gが（Cuntzの意味で）K－amenable[Cu1] である十分条件として、「Gがある tree Xに作用し、各頂点における stabilizer が amenable である」事を与えた。この状況のもとでK－群が計算されたのは、F_n 以外には、$SL(2,\mathbb{Z})$ [N]、$SL(2,\mathbb{Q}_p)$[JV] 等がある。これらの群はまた、Kazhdan の性質Tを持たないことも知られている。$SL(3,\mathbb{Z})$ のように、Kazhdan の性質Tを持つ離散群は、逆にK-amenable ではないが、そのK－群については、今の所、何も知られていないようである。

離散群Dが連結リー群の閉部分群である場合は、

$$C_0(G/D) \rtimes_\gamma G = C^*_\gamma(D) \otimes \mathcal{K}(H)$$

となる（P.Green[G1],[G2]）から、Dの縮約群環$C^*_\gamma(D)$のK－理論は、

$$K_*(C^*_\gamma(D)) \cong K_*(C_0(G/D) \rtimes_\gamma G)$$

であたえられる。ここで、Gが n次元単連結可解リー群の時は、注4－1を適用することで、

$$K_*(C^*_\gamma(D)) \cong K_{*+n}(C_0(G/D)) \cong K^{*+n}(G/D)$$

となり、等質空間G／Dの幾何学的K－理論と関係する。また、連結リー群Gが Connes-Kasparov-Rosenberg 予想を満たす時（後述［３］参照）、つまり、KをGの極大コンパクト部分群として、dimG／Kが偶数で、

$$K_*(C_0(G/D) \rtimes_\gamma G) \cong K_*(C_0(G/D) \rtimes K)$$

が成立している時は、

$$\begin{aligned} K_*(C^*_\gamma(D)) &\cong K_*(C_0(G/D) \rtimes_\gamma G) \\ &\cong K_*(C_0(G/D) \rtimes K) \\ &\cong K^K_*(C_0(G/D)) \quad (\mathrm{Green[G2]}) \\ &\cong K^*(K \backslash G/D) \end{aligned}$$

となり、空間K＼G／Dの幾何学的K－理論に一致する。ここで、$K^K_*(\cdot)$は、K－equivariant K－理論を意味する。逆に、重要な研究対象である空間G／DやK＼G／Dの幾何学的K－理論が、離散群Dの作用素環的K－理論と同等である事を注意しておこう。

［３］連結リー群

連結リー群GのK－群については、Baum-Connes-Kasparov による有名な予想があり、これはK－理論のかなり深い所に係

わっていると思われる。

Baum-Connes-Kasparov予想（の概略）[BCo]

連結リー群Gの極大コンパクトを部分群K、 d= dimG／K とする。この時、

$$K_i(C^*_\gamma(G)) \cong \begin{cases} i+d\equiv 0 & R(K) \\ i+d\equiv 1 & 0 \end{cases} \cong K_{i+d}(C^*(K))$$

実際には、Gに acceptable という仮定が必要であり、そうでない時は、Gの double covering を取る必要がある。また、上の予想においては、G／KのG－不変 Spin 構造を用いて、Kの表現環R（K）から$K_*(C^*_\gamma(G))$への対応（ Dirac induction といわれる）を厳密に指定している。

Gがコンパクトリー群、単連結可解リー群の場合は、上の予想は当然成立している（上記［1］の（2）、（4）参照）。

Gが、連結amenable群の場合は、Kasparov[Ka3][Ka4] によって、この予想が正しい事が証明されている。そこで当面問題とされたのは、Gが reductiveな場合である。Gが複素半単純の場合は Penington-Plymen[PP] によって、Gが実階数１の実半単純の場合は Kasparov[Ka4], Valette[V3] によって、実半単純リー群Gの Cartan 部分群の共約類が一意的な場合は Valette[V4] によって、それぞれ、部分的な解答がなされたが、ついに、A.Wasserman[W]によって、線形 reductive リー群一般について証明された（らしい）。「線形」という仮定もすでに除去されたらしい（Valette 氏からの直接の情報）。Gが半

単純（ reductive ）でも amenable でもない一般の場合については、今の所、表現論の方も完備していないという事情もあって、一般的結果は知られていない。Poincare群等の例についてだけKaspsrov[Ka4] が計算しているようである。

また、上の予想は、接合積の場合に自然に拡張されている。

Connes-Kasparov-Rosenberg 予想（の概略）[Ro],[W]

連結リー群ＧがＣ*-環Ａに連続的に作用している時（この作用をαとする）Ｇの極大コンパクト部分群をＫ、 d=dimＧ／Ｋとすると、

$$K_*(A \rtimes_{\alpha,\gamma} G) \cong K_{*+d}(A \rtimes_{\alpha|K} K)$$

ここでも、厳密には、Ｇ／ＫがＧ－不変 Spin^c構造を持つという仮定のもとで、KK－理論[Bl]の枠組の中で、上の同型対応を指定している。また、この予想は、連結リー群Ｇの離散部分群Ｄの作用素環的Ｋ－理論と多様体Ｋ＼Ｇ／Ｄの幾何学的Ｋ－理論を媒介する役割を果たし（［２］を参照）、ひいては、Novikov 予想[Ro]と関連している。

［４］Ｋ－理論と表現論についての独白

大きく成長しつつあるＫ－理論という怪物と接した時に抱いた感想を、表現論との接点を求めつつ以下に述べさて頂きますが、著者の無知と独断・偏見に立脚している点も多々あるものと思われます。

Kasparov[Ka1],[Ka2] によるＫ－理論及びKK－理論の定式化は、Hilbert C*-module を用いるものであるから、当然誘導表現[Ri1] と深い係わりを持つことになる。実際、Ｇ＝SL(2,ℝ)

の場合はそのK一群の生成元は、Gのある種の誘導表現達の同値類のホモトピー類と解釈できる（§２参照）。また、Baum-Connes-Kasparov 予想における同型対応（ Dirac induction）は、連結半単純リー群の場合には、Narasimhan-Okamoto[NO], Parthasarathy[Pa], Atiyah-Schmid[AS]等によって Dirac作用素の解空間として定式化された離散系列の holomorphic induction による構成を含む。連結半単純リー群の場合のBaum-Connes-Kasparov予想の正当性は、今の所その表現論によって保証されているが、幾何学的手法だけによる直接証明が期待される。もしそれが成功すれば、例えば離散系列表現の存在に関するHarish-Chandraの定理[HS]の別証明等を与えることにもなる。単連結可解リー群の場合は、非Ｉ型群等も含みその表現論は一般に繁雑であるにもかかわらず、そのK一群は幾何学的手法（ Connes の Thom 同型）によってあっさりと計算されてしまう点を、若干の失望をもって注目しておこう。 n元生成の自由群 F_n の場合は、Choi[Ch]や Pimsner-Voiculescu[PV2]によってそのK一群が計算されているが、他方、 Pytlic[Py]やFiga-Talamanca, Picardello[FP]を中心に半単純リー群の場合の analogyという方向でその表現論及び調和解析が盛んに行なわれている。両者伴に、自由積で表わされる離散群にまでその理論は拡張されている。しかしながら、これらの群のK一理論の表現論的解釈は今のところ不明であり、両者の関連性が今後の課題として興味ある対象の一つである。

次に、群Gの表現に付随して定まるC＊-環のK一理論に視点

を向けてみよう。Gの表現πは自然に$C^*(G)$の表現πを誘導する。その rangeを$C^*(G,\pi)$と表わし、その kernel（idealになる）を$I(\pi)$とする。更に、この$*$-準同型π：$C^*(G)\longrightarrow C^*(G,\pi)$は、そのK－群の上への準同型$\pi_*: K_*(C^*(G))\longrightarrow K_*(C^*(G,\pi))$を誘導する。$\pi$として、Gの正則表現をとる時、いつ$\pi_*$が単射的になるか（即ちGがK－amenableか）という事が問題であった。この問題を、一般の表現に対して考察してみるのも面白そうである。更に、二つの表現π_1とπ_2が$I(\pi_1)\subset I(\pi_2)$を満たす時、$K_*(C^*(G,\pi_1))\longrightarrow K_*(C^*(G,\pi_2))$の準同型が定まるが、この準同型がいつ単射的かという問題にも拡張される。また、Gの表現πがあるG/－測度空間(X,μ)から定まる表現である時、その$C^*(G,\pi)$のK－理論も興味深い。特に、Xを Riemann 対称空間やもっと一般に Affine 対称空間をとれば、幾何学だけでなく微分方程式や超函数及び擬微分作用素の理論とも関連した実り豊かなK－理論が出現する可能性を秘めている。次に、局所コンパクト群Hに値を持つ(G,X,μ)の1－コサイクルρによる skew product としてG－測度空間$(X\rtimes_\rho H,\mu\times\nu)$が定義されるが、この空間へのG－作用により定まる表現$U=U(\pi,\rho)$の$C*$-環$C^*(G,U)$のK－理論を展開してみるのも面白そうである[Z]。特に、$G=SL(2,\mathbb{R})$やF_nの場合、Xとして Poisson境界、μとして Poisson 測度をとってみよう。$G=F_n$の時、$H\cong\mathbb{Z}$、ρとしてμの Radon-Nikodym微分により定まる1－コサイクルをとる

と Poisson変換を介して$C^*_\sigma(G)$と$C^*(G, U)$が同型となっている事実に注意しておく[FP]。最後は、multiplier表現に付随したK－理論の話。M.Rieffel[Ri3]による無理数回転環の精密なK－群の計算を G.Elliott [El] は離散可換群の multipler 正則表現に付随したC*-環のK－理論にまで拡張している。そこで、 L.Baggett や A.Kleppner の局所コンパクト可換群の multiplier 表現論の成果[Kl1],[Kl2],[BK]を踏まえてもう少し一般化してみるのは、連結とは限らないamenable群のK－理論とも関連して面白いのではなかろうか。また、局所コンパクト群Gに対して、Gの multiplier σ による group extension G^σ [M] のC*-群環のK－理論ともとのGのC*-群環のK－理論の関係も興味深い。

§2 G = SL(2,ℝ) のK－理論

最も簡単な non-compact reductive Lie 群は SL(2,ℝ)である。この§ではG = SL(2,ℝ) のK－群の計算を Valette[V2] の素朴な手法に従って概説するので、この中から一般論の雰囲気を味わって頂きたい。

［1］基本的な武器

二つのC＊環AとBが strong Morita 同値の時、

$$K_*(A) \cong K_*(B).$$

ここで strong Morita 同値というのは Rieffel[Ri2] により導入された HilbertC＊加群を用いて定義される概念であるが、C＊環A，Bが separable の時は、 stable 同型、つまり、

$$A \otimes \mathcal{K} \cong B \otimes \mathcal{K}$$

と同値になることが知られている。後者の場合、AとBのK－群が同型になる事はK－群の安定性に因る。

他方、C＊環Aに対し、Aを ideal にする最大のC＊環は、Aの multiplierC＊環と呼ばれ、M（A）と表わされる。M（A）の射影pが $\overline{ApA}=A$を満たす時 full と呼ばれ、full射影pに対し、Aと pAp は strong Morita同値となる。従って次の補題が成立する。

補題1．　C＊環Aとその full 射影pに対し、

$$K_*(A) \cong K_*(pAp).$$

C＊環A自身よりも pAp の構造が簡単な場合が多いので、この補題はしばしば有用である。また、M（A）の射影pがfullである事を検証するためには、Aのすべての既約表現πに対し（M（A）への自然な拡張を$\tilde{\pi}$とすると）$\tilde{\pi}(p) \neq 0$である事を示せば十分である。ただ、その為には、Aの既約表現の同値類をすべて求めておかなければならないので、そこで、表現論が必要になる。

［2］G＝ SL(2,ℝ) の dual

ここで、良く知られているG＝ SL(2,ℝ) の既約表現の同値類$\hat{G}$について復習しておく。

① odd principal series ; $\pi_{s,1}$ ($s \in i\mathbb{R}^+ \setminus \{0\}$)

② even principal series ; $\pi_{s,0}$ ($s \in i\mathbb{R}^+$)

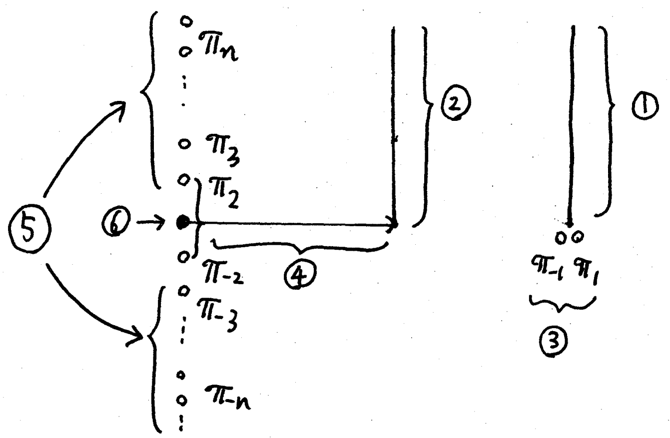
③ limit of discrete series ; π_{-1}, π_1

④ complementary series ; $\pi_{s,0}$ ($s \in (-1,0)$)

⑤ discrete series ; π_n ($n \in \mathbb{Z}$, $|n| \geq 2$)

⑥ trivial representation ; 1

これらを図示すると次の様になっている。



ここで、holomorphic induction として得られる discrete series π_n の次の性質が以下の議論の一つの鍵になる。

$|n| \geq 2$ の時 π_n は２乗可積分でありかつ $|n| \geq 3$ の時は（１乗）可積分であるが、π_2 ，π_{-2} は可積分ではない。

補題２． π_n （ $|n| \geq 3$ ）に対し、次の条件を満たす $C^*(G)$ の射影 p_n が存在する。

(i) $p_n C^*(G) p_n = \mathbb{C} \cdot p_n$

(ii) $\sigma \in \hat{G}$, $\tilde{\sigma}(p_n) \neq 0 \Rightarrow \sigma = \pi_n$

(iii) $\sum_{|n| \geq 3} p_n$ は $M(C^*(G))$ の中で収束し射影 p_d を定める。

一般論としては、可積分表現 π に対し、上の条件(i)(ii) を満たす射影 p_π が、π の formal dimension d_π とある unit vector ξ_π in $L^2(G)$ を用いて

$$p_\pi(g) = d_\pi \langle \xi_\pi, \pi(g)\xi_\pi \rangle$$

として、自然に定まる事を注意しておく[V1]。

［３］主結果

G ＝ $SL(2,\mathbb{R})$ の極大コンパクト群をＫとすると、$K \cong \mathbb{T}$ であり、$\hat{K} = \{\chi_n \,;\, n \in \mathbb{Z}\}$。ここで、ＧのＭ（$C^*$（Ｇ））への universal表現を u_g とする。この表現 u_g は、

$$(u_g f)(h) = f(g^{-1}h), \quad (fu_g) = f(hg^{-1}) \qquad (f \in L^1(G))$$

を満たしている。今、Ｋの character χ_n （$n \in \mathbb{Z}$）に対し、

$$e_n = \int_K \chi_n^{-1}(k) u_k \, dk$$

とおく。この時、

補題３．e_n はＭ（C^*（Ｇ））の射影であり、次の性質を持つ。

（ｉ） $m \neq n$ ならば $e_m e_n = 0$．

（ｉｉ） $\mathrm{Rep}G \ni \pi$ に対し、

$$\tilde{\pi}(e_n) = \mathrm{Proj}\{\xi \in H_\pi \,;\, \pi(k)\xi = \chi_n(k)\xi\}.$$

（ｉｉｉ）任意の $a \in C^*(G)$ に対し $e_m a e_n = 0$ （m;even, n;odd）．

（ｉｖ） 任意の $a \in C^*(G)$ に対し $e_m a p_n = 0$ （$|m| \leq 2$, $|n| \geq 3$）．

以上の事を考慮して、次の射影を定義する。

$$e_{ev} \equiv e_{-2} + e_0 + e_2, \quad e_{odd} \equiv e_{-1} + e_1$$

$$e \equiv p_d + e_{ev} + e_{odd}$$

この時、e はM（$C^*(G)$）の射影であり、$A = e\,C^*(G)\,e$ とおく。

定理４．（i）射影eは full である。

（ii）$A = p_d A p_d \oplus e_{ev} A e_{ev} \oplus e_{odd} A e_{odd}$．更に、

$$p_d A p_d = \sum_{|n|\geq 3}^{\oplus} \mathbb{C}\cdot p_n \cong \sum_{|n|\geq 3}^{\oplus} \mathbb{C}\,.$$

（π_n, $|n|\geq 3$に対応）

$$e_{ev} A e_{ev} \cong B \equiv \{\, f \in C_0(X, M_3)\ ;\ f(1) : \text{diagonal}\}$$

$X = i\mathbb{R}^+ \cup [0,1]$，（②+④+⑥+$\{\pi_2, \pi_{-2}\}$に対応）．

$$e_{odd} A e_{odd} \cong C \equiv \{\, f \in C_0(Y, M_2)\ ;\ f(0) : \text{diagonal}\}$$

$Y = i\mathbb{R}^+$,（①+③ に対応）．

この定理の証明には、表現のK－typeを用いる所がポイントである。

さて、ここで、上記（i）に補題１を適用すると、

$$K_*(C^*(G)) \cong K_*(A)\,.$$

従って、上記（ii）より、

$$K_*(C^*(G)) \cong K_*(p_d A p_d \oplus e_{ev} A e_{ev} \oplus e_{odd} A e_{odd})$$
$$= K_*(p_d A p_d) \oplus K_*(e_{ev} A e_{ev}) \oplus K_*(e_{odd} A e_{odd})\,.$$

最後の式の第１項は、定理より、

$$K_*(p_d A p_d) = \begin{cases} * = 0 & \sum_{|n|\geq 3}^{\oplus} \mathbb{Z} \\ * = 1 & 0 \end{cases}$$

第２項と第３項は、次の補題により計算できる。

補題５．　自然数 n, p に対して、

$$D_{n,p} = \{ f \in C_0([0,\infty), M_n) \; ; \; f(0) = \begin{bmatrix} \overbrace{* \; \ddots \; *}^{p} & 0 \\ 0 & 0 \ddots 0 \end{bmatrix} \}$$

とすると、

$$K_0(D_{n,p}) = \mathbb{Z}^{p-1}, \quad K_1(D_{n,p}) = 0.$$

証明の概略．　C*環の exact sequence

$$0 \longrightarrow C_0((0,\infty), M_n) \longrightarrow D_{n,p} \longrightarrow \mathbb{C}^p \longrightarrow 0$$

により、そのK－群の 6-term exact sequence を作り、

$K_0(\mathbb{C}^p) = \mathbb{Z}^p$, $K_1(\mathbb{C}^p) = 0$ 及び、

$K_*(C_0((0,\infty), M_n)) \cong K_*(C_0(\mathbb{R})) = {}_{*=0}\ 0, {}_{*=1}\ \mathbb{Z}$

を代入する事で、K－群の exact sequence

$$0 \longrightarrow K_0(D_{n,p}) \longrightarrow \mathbb{Z}^p \xrightarrow[\delta]{} \mathbb{Z} \longrightarrow K_1(D_{n,p}) \longrightarrow 0$$

を得る。ここで、connecting map δ について調べ、これが全射であることを確認すると証明は、完了する。この方法は、K－群の計算における一つの常套手段である。

この補題により、$B \cong D_{3,3}$, $C \cong D_{2,2}$ だから、

$$K_0(B) \cong \mathbb{Z}^2, \quad K_1(B) = 0,$$
$$K_0(C) \cong \mathbb{Z}, \quad K_1(C) = 0.$$

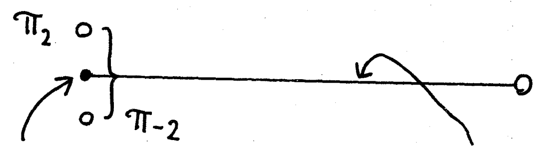
従って、次の事が確認された。

結論６．　$K_0(C^*(G)) = \mathbb{Z}^{\mathbb{Z}}$,　$K_1(C^*(G)) = 0$.

最後に、群GのK－ amenabilityを確認する。Gの正則表現をλとすると、このλは$C^*(G)$から$C^*_r(G)$の上への*-準同型を誘導し、これもλと表わすと、

$$0 \longrightarrow \mathrm{Ker}\lambda \longrightarrow C^*(G) \xrightarrow{\lambda} C^*_\gamma(G) \longrightarrow 0$$

なる exact sequence を得る。ここで、正則表現 λ に weak contain されない既約表現が trivial representation と complementary seriesである事に注意し、下図を参照にして、



trivial representation　　complementary series

$\mathrm{Ker}\lambda \cong D_{3,1}$ （ stable 同型），

つまり、$K_*(\mathrm{Ker}\lambda) \cong K_*(D_{3,1})$ となる。故に補題5より、

(*)　$K_*(\mathrm{Ker}\lambda) = 0$。

そこで、上の exact sequence から定まる 6-term exact sequence

$$\begin{tikzcd}
0 = K_1(\mathrm{Ker}\lambda) \arrow[r] & K_1(C^*(G)) \arrow[r] & K_1(C^*_\gamma(G)) \arrow[d] \\
K_0(C^*_\gamma(G)) \arrow[u] & K_0(C^*(G)) \arrow[l] & K_0(\mathrm{Ker}\lambda) = 0 \arrow[l]
\end{tikzcd}$$

に、(*) を代入して（常套手段！）

$$\lambda_* \ ; \quad K_*(C^*(G)) \longrightarrow K_*(C^*_\gamma(G))$$

が同型である事[Ka4] が判明する。従って、

系７． $G = SL(2,\mathbb{R})$ は、K－amenable であり、

$$K_i(C^*_r(G)) = \left\{\begin{array}{lll} i=0 & \mathbb{Z}^{\mathbb{Z}} & \cong R(K) \\ & & \\ i=1 & 0 & \end{array}\right\} = K_i(C^*(K))$$

となる。つまり、$G = SL(2,\mathbb{R})$に対しては、Baum-Connes-Kasparov 予想（の概略）が成立している。

References

[AS] Atiyah M. and Schmidt W. ;A geometric construction of the discrete series for semisimple Lie groups, Inv.Math.,42(1977),1-62.

[BCo] Baum P. and Connes A. ; Geometric K-theory for Lie groups and foliation, Preprint.

[BKl] Baggett L. and Kleppner A. ; Multilinear representations of abelian groups, JFA,14(1973),299-324.

[Bl] Blackadar B. ; K-theory for operator algebras, to appear.

[Ch] Choi M.D. ; The full C*-algebra of the full group on two generators, Pacific Math.,87(1980),41-48.

[Co] Connes A. ; An analogue of the Thom isomorphism for crossed products of a C*-algebra by an action of ℝ, Adv.Math.,39(1981),31-55.

[Cu1] Cuntz J. ; K-theoretic amenability for discrete groups, J.Reine Angew.,344(1983),180-195.

[Cu2] Cuntz J. ; K-theory and C*-algebras, Springer Lecture Notes in Math.

[El] Elliott G.A. ; On the K-theory of the C*-algebra generated by a projective representation of a torsion free discrete abelian group, Preprint.

[FP] Figa-Talamanca A. and Picardello M.A. ; Harmonic analysis on free groups, Lec.Notes 87,Dekker.

[JV] Julg P. and Valette A. ; K-theoretic amenability for SL(2,$\mathbb{Q}_p$) and the action on the associated tree, JFA,58(1984),194-215.

[G1] Green P. ; The local structure of twisted covariance algebras, Acta Math.,140(1978),191-250.

[G2] Green P. ; Equivariant K-theory and crossed product C*-algebras, Proc.Sym.Pure Math.,38(1982), 337-338.

[HC] Harish-Chandra ; Discrete series for semisimple Lie groups I, II, Acta Math.,113(1965),241-318; ibid.,116(1966),1-111.

[Ka1] Kasparov G. ; Hilbert C*-modules : theorem of Stinespring and Voiculescu, J.Operator Theory,4 (1980),133-150.

[Ka2] Kasparov G. ; The operator K-functor and extensions of C*-algebras, Izv.Akad.Nauk.SSSR.Ser. Math.,44(1980),571-636.

[Ka3] Kasparov G. ; K-theory, group C*-algebras, and higher signatures, Preprint.

[Ka4] Kasparov G. ; Lorentz groups : K-theory of unitary representations and crossed products, Preprint.

[Kl1] Kleppner A. ; Multipliers on abelian groups, Math. Ann.,158(1965),11-34.

[Kl2] Kleppner A. ; Non type I multiplier representations of abelian groups, unpublished (1975).

[Ks] 第20回函数解析研究会報告集（K－理論特集），1985.

[M] Mackey G.W. ; Unitary representations of group extensions I, Acta Math.,99(1958),265-311.

[N] Natume T. ; On $K_*(C^*(SL_2(\mathbb{Z}))$, J.Operator Theory, 13(1985), 103-118.

[NO] Narasimhan M.S. and Okamoto K. ; An analogue of the Borel-Weil-Bott theorem for hermitian symmetric pairs of non-compact type, Ann. Math.,91(1970), 486-511.

[Pa] Parthasarathy R. ; Dirac operator and the discrete series, Ann.Math.,96(1972),1-30.

[PP] Penington M.G. and Plymen R.J. ; The Dirac Operator and the principal series for complex semi-simple Lie groups, JFA,53(1983),269-286.

[PV1] Pimsner M. and Voiculescu D. ; Exact sequences for K-groups and Ext-groups of certain crossed-products of C*-algebras, J.Operator Theory, 4(1980),93-118.

[PV2] Pimsner M. and Voiculescu D. ; K-groups of reduced crossed products by free groups, J.Operator Theory,8 (1982), 131-156.

[Py] Pytlic T. ; Radial functions on free groups and a decomposition of the regular representation into irreducible components, J.Reine Angew.Math.,326 (1981),124-135.

[Ri1] Rieffel M. ; Induced representations of C*-algebras, Bull.AMS,78(1972),605-609,Adv.Math.,13 (1974),176-257.

[Ri2] Rieffel M. ; Strong Morita equivalence of certain transformation group C*-algebras, Math.Ann.,222 (1976),7-22.

[Ri3] Rieffel M. ;C*-algebras associated with irrational rotation, Pacific J.Math.,93(1981),415-429.

[Ro] Rosenberg J. ; C*-algebras, positive scalar curvature, and the Novikov conjecture, Preprint.

[Sr] 数理研講究録488「 C^*ー環とKー理論 」, 1983.

[Ty] Taylor J.L. ; Banach algebras and topology, in "Algebras in Analysis", Academic Press.

[V1] Valette A. ; Minimal projections, integrable representations and property (T), Preprint.

[V2] Valette A. ; Notes on the structure and the K-theory of the C*-algebras associated with SL(2,$\mathbb{R}$), to appear in Bull.Soc.Math.Belgique.

[V3] Valette A. ; K-theory for the reduced C*-algebra of a semi-simple Lie group with real rank 1 and finite centre, to appear in Quarterly J.Math..

[V4] Valette A. ; Dirac induction for semi-simple Lie groups having one conjugacy class of Cartan subgroups, Preprint.

[W] Wasserman A. ; A proof of Connes-Kasparov conjecture for linear reductive Lie group, Preprint (未入手).

[Z] Zimmer R.J. ; Ergodic theory and semisimple group, Mono.Math. 81, Birkhauser.