数理解析研究所講究録
第598巻 1986年 288-319

Highest Weight Vectors for Generalized Gelfand-Graev Representations of Semisimple Lie Groups

京大理　山下　博　(Hiroshi YAMASHITA)

§0. 要約.　Gを線型かつ単純な連結リー群で，Riemann対称空間G/KがHermite型であるものとする．我々は，Gの正則離散系列表現，もっと一般には$\mathfrak{g}=Lie(G)$のcompact Cartan部分環$\mathfrak{t}$に関してhighest weight $\Lambda\in\mathfrak{t}_{\mathbb{C}}^{*}$をもつ$G$の既約admissible表現の，generalized Gelfand-Graev表現(=GGGR) $\mathrm{Ind}_N^G(\xi_+)$の中への(Gの)表現としてのうめこみについて，[5]の手法をもとにして論ずる．言い換えれば，既約admissible highest weight moduleの(N,ξ_+)型Whittaker modelを論ずる．ここに，NはSiegel領域G/KのŠilov境界と標準的に微分同型なGの巾単部分群であり，ξ_+はNのある既約unitary表現である．このN及びξ_+の正確な定義は§2において述べる．

本報告のうちの本論は，主に次の3つの部分からなる．

第一(§3)．C^∞に誘導されたGGGR $C^\infty\text{-}\mathrm{Ind}_N^G(\xi_+)$に関する$K$-有限な$\Lambda$-highest weight vectorを，全て具体的に求める(定理3.3)．

これは，[5]における計算を少しmodifyすることによりなされる。

第二(§4)．§3で求めたhighest weight vectorが，unitaryに誘導されたGGGR $L^2\text{-}\mathrm{Ind}_N^G(\xi_+)$の表現空間に属するために$\Lambda$の満すべき必要十分条件を与える(定理4.1)．この条件は，ちょうど正則疎系列表現に関するHarish-Chandraのnon-vanishing条件に他ならないことが判る．

第三(§5)．highest weightをもつ既約admissible表現の(N,ξ_+)型Whittaker modelについて，定理3.2および4.1から従う結果を述べる(定理5.3及び5.4)．特に，正則疎系列表現の(N,ξ_+)型WMについては，完全な結果が得られたことになる(定理5.5)．しかし，正則疎系列に属さないhighest weight表現のWhittaker modelについては，未だに研究の余地があると筆者は考える．

また，序論(§1)においては，本論(§2-§5)における議論の意味を明確にするために，半単純リー群の表現のWhittaker modelについて概説する．更には，M. Hashizume([5])及びH. Rossi-M. Vergne([12])の研究と本論説との関連を明らかにしておく．

§1. 序論；半単純リー群の表現のWhittaker model

1.1. Whittaker modelの概念.

Gを中心有限な連結半単純リー群，$\mathfrak{g}$をGのリー環とする．Hilbert空間$\mathcal{H}$上へのGの連

続表現πが<u>admissible</u>であるとは，極大compact部分群K（$\subseteq G$）への制限$\pi|K$がKの表現として重複度有限になるときをいう．admissible表現$(\pi, \mathcal{H})$に対し，πに関してK-有限なvector全体のなす$\mathcal{H}$の部分空間を$\mathcal{H}_K$で表す．この時，$\mathcal{H}_K \subseteq \mathcal{H}^{\omega}$（$=\pi$のanalytic vector全体のなす空間）が成立つ．また，πから自然に定まる$\mathcal{H}^{\omega}$上へのGの表現を微分する事により得られる$\mathfrak{g}$の作用につき，$\mathcal{H}_K$はstableになる．$\mathcal{H}_K$は明らかにK-加群だから，結局，$\mathcal{H}_K$は$(\mathfrak{g}, K)$-加群の構造をもつ．これをπ_Kで表し，$(\pi_K, \mathcal{H}_K)$をπに対応する<u>Harish-Chandra加群</u>と呼ぶ．πがGの表現として既約ならば，π_Kも$(\mathfrak{g}, K)$-加群として既約になる．また，この逆も正しい．

さて，Gの巾単部分群Nの既約unitary表現$(\xi, \mathcal{H}(\xi))$を考える．Gの既約admissible表現πが“誘導表現”$\mathrm{Ind}_N^G(\xi)$の部分表現として“実現”できるとき，πは(N, ξ)型<u>Whittaker model</u>（$=$WM）を持つという．“誘導表現”や“実現”の意味を取り換える事によって，様々な文脈でWMの概念を考え得る．例えば，

<u>(a) unitary表現のWM（$=L^2$-WM）．</u> Gの既約unitary表現を，ξからunitaryに誘導された表現$L^2\text{-}\mathrm{Ind}_N^G(\xi)$の部分表現として実現すること．

<u>(b) smoothな表現のWM（$=C^{\infty}$-WM）．</u> 既約admissible表現πに関するC^{∞}-vectorのなす空間上に自然に定まるGのsmooth

な表現π_∞を，ξからC^∞に誘導された表現$C^\infty\text{-}\mathrm{Ind}_N^G(\xi)$の中へ連続にうめこむこと。

(c) $(\mathfrak{g},K)$-加群のWM$(=(\mathfrak{g},K)$-WM$)$. πのHarish-Chandra加群π_Kを，$(\mathfrak{g},K)$-加群$C^\infty\text{-}\mathrm{Ind}_N^G(\xi)$の部分$(\mathfrak{g},K)$-加群として実現すること。

ここで，C^∞に誘導された表現$C^\infty\text{-}\mathrm{Ind}_N^G(\xi)$の定義は次の通り。$\mathcal{H}(\xi)$に値をもつ$G$上の$C^\infty$-函数$F$で，条件$F(gn)=\xi(n)^{-1}F(g)$ $(n\in N,\ g\in G)$を満すもの全体のなす空間を$C^\infty(G;\xi)$で表し，左移動による$C^\infty(G;\xi)$上へのGの表現をπ_ξで表す。$C^\infty(G;\xi)$上に通常のSchwartz位相を入れる事により，π_ξはGのsmoothな表現を定める。また，$C^\infty(G;\xi)$は，Gの作用を微分することにより，$(\mathfrak{g},K)$-加群の構造をもつ。$C^\infty\text{-}\mathrm{Ind}_N^G(\xi)=(\pi_\xi,C^\infty(G;\xi))$とおく。

3通りのWMの概念L^2-WM, C^∞-WM及び$(\mathfrak{g},K)$-WMの間には，次の様な関係がある: Gの既約unitary表現Uが(N,ξ)型L^2-WMを持てば，U_∞はC^∞-WMをもつ。また，Gの既約admissible表現πに対し，π_∞がC^∞-WMをもてば，Harish-Chandra加群π_Kは$(\mathfrak{g},K)$-WMをもつ。更に，うめこみを与えるintertwining作用素のなす空間のあいだには，

$$\mathrm{Hom}_G(U,\ L^2\text{-}\mathrm{Ind}_N^G(\xi)) \hookrightarrow \mathrm{Hom}_G(U_\infty,\ C^\infty\text{-}\mathrm{Ind}_N^G(\xi)),$$
$$\mathrm{Hom}_G(\pi_\infty,\ C^\infty\text{-}\mathrm{Ind}_N^G(\xi)) \hookrightarrow \mathrm{Hom}_{\mathfrak{g}\text{-}K}(\pi_K,\ C^\infty\text{-}\mathrm{Ind}_N^G(\xi)),$$

なる標準的な包含関係がある。ここで，Gの連続表現T_i

(*resp.* $(\mathfrak{g},K)$-加群 Φ_i) $(i=1,2)$ に対して，T_1 から T_2 への連続な *intertwining* 作用素 (*resp.* Φ_1 から Φ_2 への $(\mathfrak{g},K)$-加群準同型) のなす空間を $\mathrm{Hom}_G(T_1,T_2)$ (*resp.* $\mathrm{Hom}_{\mathfrak{g}\text{-}K}(\Phi_1,\Phi_2)$) で表す．
また，(a), (b) 及び (c) のうち任意の２つの概念の間には，一般には，本当に違いがあることにも注意しておく．

今までに２種類の誘導表現 $L^2\text{-}\mathrm{Ind}(*)$ 及び $C^\infty\text{-}\mathrm{Ind}(*)$ が登場したが，以下単に $\mathrm{Ind}(*)$ と書けば，この２つのうち任意の一方を指すことにする．

<u>1.2. $G=SL_2$ に対する表現の WM.</u> Jacquet-Langlands ([6]) は，$G=GL_2(\mathbb{F})$ ($\mathbb{F}$ は局所体) の場合に，保型形式の理論と関連して，表現の WM の研究に着手した．一方，Gelfand-Graev ([2]) は，G の既約表現がいかなる (N,ξ) に対して WM を持つかを知ることによって既約表現の有用かつ簡便な分類を与える事を目指し，$G=SL_2(\mathbb{F}_q)$ ($\mathbb{F}_q$ は有限体) に対して分類を与えた．上のいずれの場合にも，重要な役割を果したのは，極大巾単部分群 N の自明でない *unitary* 指標からの誘導表現であった．

我々は，$G=SL_2(\mathbb{R})$ の場合にこの事情を説明しよう．極大巾単部分群 $N=\left\{\begin{pmatrix}1&x\\0&1\end{pmatrix};x\in\mathbb{R}\right\}\subseteq G$ をとり，$\xi_+\left(\begin{pmatrix}1&x\\0&1\end{pmatrix}\right)=e^{\sqrt{-1}x}$ $(x\in\mathbb{R})$ なる N の *unitary* 指標 ξ_+ を考える．この時，N の任意の *unitary* 指標 $\xi\neq 1$ からの誘導表現 $\mathrm{Ind}_N^G(\xi)$ は，$\pi(\xi_+)=$

$\mathrm{Ind}_N^G(\xi_+)$, $\pi(\xi_-)=\mathrm{Ind}_N^G(\xi_-)$ ($\xi_-=\overline{\xi_+}$) のいずれか一方に同値な表現になる.

定理 1.1 ($G=SL_2(\mathbb{R})$). (1) Gの任意の既約 unitary 表現 U に対して, smooth な表現 U_∞ の $(N,\xi_\pm)$型 C^∞-WM は 高々一意である. 即ち, $\dim \mathrm{Hom}_G(U_\infty, C^\infty\text{-}\mathrm{Ind}_N^G(\xi_\pm))\leq 1$ が成立つ.

(2) (unitary とは限らない)主系列表現 π_P に対し,

$$\dim \mathrm{Hom}_G((\pi_P)_\infty, C^\infty\text{-}\mathrm{Ind}_N^G(\xi_\pm))=1$$

が成立つ. 従って, π_Pが既約なときには, $(\pi_P)_\infty$ は (N,ξ_+)型 および (N,ξ_-)型 C^∞-WM を それぞれ一意にもつ.

(3) Gの任意の正則 (resp. 反正則) 疎系列表現 D^+ (resp. D^-) は, (N,ξ_+) (resp. (N,ξ_-))型 L^2-WM を一意的にもつ.

(4) D^+ (resp. D^-) は, (N,ξ_-) (resp. (N,ξ_+)) 型 L^2-WM を持たないが, (N,ξ_-) (resp. (N,ξ_+))型 $(\mathfrak{g},K)$-WM を一意にもつ.

注意. (1) 半単純リー群の表現の WM について 現在までに得られている結果(c f. [5], [9], [13]) 及び本稿の定理 5.4 を, $G=SL_2(\mathbb{R})$の場合に翻訳したものが, 上記 定理 1.1 である. [6] において この定理の主張がそのまま述べられている訳ではない.

(2) $(N,\xi_\pm)$型 C^∞-WM の一意性(定理 1.1 (1))は, $(\mathfrak{g},K)$-WM まで考慮に入れると, 主系列表現に対して成立しなくなる.

定理1.1より，$G=SL_2(\mathbb{R})$の場合には WMの概念を用いて，主系列，正則離系列及び反正則離系列の3系列の表現は，各々区別されたことになる．

<u>1.3. Gelfand-Graev表現.</u> SL_2とは限らない一般の半単純群Gに対して表現のWMを研究しようとする際に，まず問題となるのは，“いかなる(N, ξ)に対するWMを考えるとよろしいか”という事である．$G=SL_2$の場合の自然な一般化として，Gの極大巾単部分群N_{max}の“非退化”な unitary 指標ξ_{nd}に関するWMの研究が，Kostant をはじめ様々な人により行われてきた．ここで，N_{max}の1次元表現ξが<u>非退化</u>であるとは，ξが次の条件を満す事である：任意の$w \in W$に対して，$\xi | (N_{max} \cap w^* N_{max} w^{*-1}) \neq 1$．ただし，$G=KA_pN_{max}$をGの岩沢分解としたとき，Wは$(G, A_p)$のWeyl群であり，$w \in W$に対して$w^*$は$w$の$N_K(A_p)$（正規化群）における1つの代表元を表す．

誘導表現$\mathrm{Ind}_{N_{max}}^{G}(\xi_{nd})$は<u>Gelfand-Graev表現</u>(=GGR)と呼ばれ，種々の文献（例えば[3], [9]）では，単に Whittaker model と言えば本稿でいう(N_{max}, ξ_{nd})型WMを指すことが多い．$G=SL_2(\mathbb{R})$に関する定理1.1の主張(1)及び(2)は，GGRに対して次の如く拡張された．

定理1.2([9],[13]). Gは，線型かつ quasi-split な連結半単純リー群とする．このとき，

(1) C^∞に誘導されたGGR $C^\infty\text{-}\mathrm{Ind}_{N_{max}}^{G}(\xi_{nd})$ は smooth な表現として重複度1である．即ち，Gの任意の既約unitary表現Uに対して，$\dim \mathrm{Hom}_G(U_\infty, C^\infty\text{-}\mathrm{Ind}_{N_{max}}^{G}(\xi_{nd})) \leq 1$ が成立つ．

(2)（極小放物型部分群から誘導された，必ずしも unitary とは限らない）任意の主系列表現 π_P に対し，次の事が成立つ．

$$\dim \mathrm{Hom}_G((\pi_P)_\infty, C^\infty\text{-}\mathrm{Ind}_{N_{max}}^{G}(\xi_{nd})) = 1.$$

また，Kostant([9])は，定理1.2の設定を満すGに対し，(N_{max}, ξ_{nd})型WMの存在と，既約表現から決まる原始イデアルの極小性とを関連づけた．更に彼は，主系列表現に対応するHarish-Chandra加群の代数的双対空間のなかの"Whittaker vector"からなる部分空間の構造を解明した．これをきっかけに，主系列表現の(N_{max}, ξ_{nd})型$(\mathfrak{g}, K)$-WMの研究が進展した(cf. [3], [10])．

さて，定理1.1の(3)及び(4)はGGRに対して如何に一般化されるだろうか．正則（または反正則）離散系列表現がGGRに関するWMを持つかという問題に対しては，$G = SL_2(\mathbb{R})$の場合を除いて否定的解答が与えられた([5])．これを説明するために，記号を少し導入する．

いま，Gは線型かつ単純で，Riemann対称空間G/KはHermite対称空間と仮定する．$\mathfrak{g}=\mathfrak{k}\oplus\mathfrak{p}$，$\mathfrak{k}=Lie(K)$，を$\mathfrak{g}$のCartan分解とし，$G/K$上の$G$-不変複素構造から自然に定まる$\mathfrak{p}$上の$Ad(K)$-不変複素構造を$J$で表す．$\mathfrak{p}_{\pm}=\{X\in\mathfrak{p}_{\mathbb{C}}\,;\,JX=\pm\sqrt{-1}X\}$（複号同順）とおく．$\mathfrak{g}$はcompact Cartan部分環$\mathfrak{t}\subseteq\mathfrak{k}$を持つことが知られている．$(\mathfrak{g}_{\mathbb{C}},\mathfrak{t}_{\mathbb{C}})$のroot系$\Sigma$のpositive system Σ^+を，$\mathfrak{p}_+\subseteq\sum^{\oplus}_{\gamma\in\Sigma^+}(\mathfrak{g}_{\mathbb{C}})_\gamma$（$(\mathfrak{g}_{\mathbb{C}})_\gamma$は$\gamma$のroot空間）となる様にえらんでおく．

さて，Λを K-dominant かつ integral (cf. p. 17) な$\mathfrak{t}_{\mathbb{C}}$上の線型形式とする．この時，$\Lambda$を$\Sigma^+$に関する highest weight にもつ$G$の既約admissible表現$\pi_\Lambda$が，対応するHarish-Chandra加群の同型を除いて一意的に存在する．π_Λたちは，正則蹠系列表現と呼ばれるGの自乗可積分表現をすべて含んでいる．

<u>定理 1.3</u>（[5, Cor. 3.2]）. 上述の記号のもとで，$\mathfrak{g}\not\simeq\mathfrak{sl}_2(\mathbb{R})$とする．この時，$I_\Lambda=(\pi_\Lambda)_K$は$(N_{max},\xi_{nd})$型WMをもたない．従って，$\pi_\Lambda$ (resp. $(\pi_\Lambda)_\infty$) は(N_{max},ξ_{nd})型のL^2-WM (resp. C^∞-WM) をもち得ない．

結局，GGRは主系列表現のmodelを与えるのには適するが，正則（又は反正則）蹠系列表現のmodelとしては不適である事が判った．

<u>1.4. Generalized Gelfand-Graev表現（= GGGR）.</u> では，いかなる(N,ξ)に対して表現π_Λ達はWMをもつのか？ 再び$G=$

$SL_2(\mathbb{R})$ の場合に戻って考え直そう．巾単部分群 $N=\left\{\begin{pmatrix}1&x\\0&1\end{pmatrix}; x\in\mathbb{R}\right\}$ は Siegel 領域 G/K ($\approx$ $\mathbb{C}$の上半平面) の $\check{S}$ilov 境界 ($\approx$ 実軸) と標準的に微分同型な群である点に着目しよう．すると，G/K が Hermite 対称空間なる任意の単純群 G に対しても，同様に，G/K の $\check{S}$ilov 境界と自然に微分同型な 高々2-step の巾単部分群 N ($\leq N_{max}$) と Nの既約 unitary 表現 ξ_+ が，$SL_2(\mathbb{R})$ の場合の自然な拡張として定義できる(詳細は 2.2 参照)．

本稿では，誘導表現 $\mathrm{Ind}_N^G(\xi_+)$ を GGGR と呼ぶことにする．

注意．(1) 任意の連結半単純リー群 (又は色々な体上の半単純代数群) G に対し，$\mathfrak{g}$ の各巾零 $\mathrm{Ad}(G)$-軌道 $\mathcal{O}\subseteq\mathfrak{g}$ に対応する GGGR $\Gamma_{\mathcal{O}}$ が，巾単部分群の既約 unitary 表現からの誘導表現として定義されている([8])．正則巾零軌道 $\mathcal{O}_r$ に対応する GGGR $\Gamma_{\mathcal{O}_r}$ が 1.3 で述べた GGR である．上の誘導表現 $\mathrm{Ind}_N^G(\xi_+)$ は GGGR $\Gamma_{\mathrm{Ad}(G)A}$ (A は 2.2 で定義される巾零元) に他ならない．

(2) GGR の場合とは異なり，GGGR $\Gamma_{\mathcal{O}}$ は一般には重複度有限ですらない．この事実から引き起こされる困難を回避するため，我々は [15] 及び [16] において 各GGGR $\Gamma_{\mathcal{O}}$ に対し "reduced GGGR(=RGGGR)" と呼ぶ誘導表現たちを定義し，いかなる場合に RGGGR が重複度有限に，更には重複度 1 になるかを論じた．それによれば，GGGR $\Gamma_{\mathrm{Ad}(G)A}=\mathrm{Ind}_N^G(\xi_+)$ から定

まるRGGGRはみな重複度有限であり，特別な場合には重複度1になる．また，GGGR $\mathrm{Ind}_N^G(\xi_+)$に関して本稿でのべる主張をRGGGRに関する主張に言い換えることは容易である．

1.5. Highest weight をもつ表現のWM．本論説の主目的は，highest weight をもつ G の既約表現 π_Λ の GGGR $\mathrm{Ind}_N^G(\xi_+)$ の中への表現としてのうめこみについて論ずる事にある．この方向の研究としては[5]，また直接関係のある研究として[12]がある．我々はこれらの論文の結果と本論説との関係を明らかにしておく．

Rossi-Vergne ([12]) は，π_Λ 達のうち正則離系列表現 D_Λ の岩沢部分群 $S=A_pN_{max}$ への制限を明らかにした．

定理 1.4 ([12]). 誘導表現 $L^2\text{-}\mathrm{Ind}_N^S(\xi_+)$ は S の既約unitary表現であり，正則離系列表現 D_Λ は，S に制限すると $L^2\text{-}\mathrm{Ind}_N^S(\xi_+)$ の $\dim\tau_\Lambda$ 回の multiple に unitary 同値である．ここで，τ_Λ は Λ を highest weight にもつ K の有限次元既約unitary表現である．

更に，彼らは表現 $L^2\text{-}\mathrm{Ind}_N^S(\xi_+)$ は S の左正則表現の部分表現として実現できる事も示した．この事実と定理1.4より，D_Λ の (N,ξ_+) 型 WMについて次の命題が帰結される．

<u>命題1.5.</u> (1) $\dim \mathrm{Hom}_G((D_\Lambda)_\infty, C^\infty\text{-}\mathrm{Ind}_N^G(\xi_+)) \geq \dim \tau_\Lambda$. すなわち，$C^\infty$に誘導されたGGGR $C^\infty\text{-}\mathrm{Ind}_N^G(\xi_+)$ における $(D_\Lambda)_\infty$ の重複度は $\dim \tau_\Lambda$ 以上である。

(2) unitary に誘導されたGGGR $L^2\text{-}\mathrm{Ind}_N^G(\xi_+)$ は Gの左正則表現の部分表現である。従って，$L^2\text{-}\mathrm{Ind}_N^G(\xi_+)$ の部分表現として実現出来る Gの既約unitary表現は 離散系列(=自乗可積分)表現に限る。

一方，M. Hashizume ([5]) は，C^∞に誘導された表現 $C^\infty\text{-}\mathrm{Ind}_{N_{max}}^G(\zeta)$, $\zeta = L^2\text{-}\mathrm{Ind}_N^{N_{max}}(\xi_+)$, を主に考え，$\Lambda$を highest weight にもつ K-有限な vector $F \in C^\infty(G;\zeta)$ を，K-dominant かつ integral な 任意の線型形式$\Lambda \in \mathfrak{t}_{\mathbb{C}}^*$ に対し計算し，それをもとに π_Λ のWMを論じた。ただ，その結果の中には，命題1.5(1)の主張と相反する誤りも含まれているので注意を要する（ただし，$\dim \tau_\Lambda = 1$ なるΛに対しては支障はない）。

そこで，我々は次の3つの問題を設定する。

<u>問題A.</u> C^∞に誘導されたGGGR $C^\infty\text{-}\mathrm{Ind}_N^G(\xi_+)$ に関して K-有限でありかつ Λをhighest weight にもつ vector $F \in C^\infty(G;\xi_+)$ を全て決定せよ。即ち，我々の状況において [5] の結果を修正せよ。

<u>問題B.</u> 問題Aで求めた highest weight vector が unitary に誘

導された GGGR L^2-$\mathrm{Ind}_N^G(\xi_+)$ の表現空間に属するための Λ に関する条件を，命題1.5(2)を用いずに，highest weight vector の L^2-norm を計算することにより求めよ．

問題C. 問題A及びBに対する結果を用いて，highest weight をもつ既約表現 π_Λ の (N, ξ_+)型 WM を決定せよ．

これらの3問題に対する我々の解答の要約は，§0ですでに述べた．問題Bに対する我々の考察は Rossi-Vergne ([12]) の（結果ではなく）議論に立脚しており，この意味では，彼らの仕事を別の角度から見直したものといえよう．この様に，本稿は完全に original な結果の報告というより，寧ろ，[5]及び[12]を土台にした highest weight をもつ表現のWMについての一考究と呼ぶのがふさわしいと思う．しかしながら，Rossi-Vergne の仕事と疎系列表現のWMとを直接結びつけて論じた文献を筆者はまだ見たことがなく，この点を整理しておくことが我々の今後の研究にとって必要と思われるので，この機会に報告することにした．

本論．GGGR $\mathrm{Ind}_N^G(\xi_+)$ に関する highest weight vector

§2. GGGR $\mathrm{Ind}_N^G(\xi_+)$. この節では，本稿で問題にするGGGRの正確な定義を述べる．そのために，まず Hermite対称空間 G/K

を与える単純群 G とそのリー環に関して，記号を用意する．

2.1. 準備． p.9 で定義された記号 $\mathfrak{k}$, $\mathfrak{p}$, $\mathfrak{p}_\pm$, $\mathfrak{t}$, Σ, Σ^+, J, … を，断りなしに用いる．$(\mathfrak{g}_\mathbb{C}, \mathfrak{t}_\mathbb{C})$ の各 root $\alpha \in \Sigma$ に対して，$(\mathfrak{g}_\mathbb{C})_\alpha \subseteq \mathfrak{k}_\mathbb{C}$ 又は $(\mathfrak{g}_\mathbb{C})_\alpha \subseteq \mathfrak{p}_\mathbb{C}$ のいずれか一方のみが成立つ．前者が成立つとき α は compact root と呼ばれ，後者の場合には non-compact root と呼ばれる．compact (resp. non-compact) root 全体を $\Sigma_\mathfrak{k}$ (resp. $\Sigma_\mathfrak{p}$) で表し，$\Sigma_\mathfrak{k}^+ = \Sigma^+ \cap \Sigma_\mathfrak{k}$ (resp. $\Sigma_\mathfrak{p}^+ = \Sigma^+ \cap \Sigma_\mathfrak{p}$) とおく．各 $\alpha \in \Sigma$ に対し，root vector $X_\alpha \in (\mathfrak{g}_\mathbb{C})_\alpha$ を次を満す様にとる．

$$X_\alpha - X_{-\alpha},\ \sqrt{-1}(X_\alpha + X_{-\alpha}) \in \mathfrak{k} + \sqrt{-1}\,\mathfrak{p}, \quad [X_\alpha, X_{-\alpha}] = H'_\alpha .$$

ここで，H'_α は $\mathfrak{g}_\mathbb{C}$ の Killing 形式を通して $\frac{2\alpha}{\langle\alpha,\alpha\rangle}$ に対応する $\sqrt{-1}\,\mathfrak{t}$ の元．

正の non-compact root のなす列 $(\gamma_1, \gamma_2, \cdots, \gamma_\ell)$ を次の如く定義する．Σ^+ を positive system として与える様な $\sqrt{-1}\,\mathfrak{t}^*$ 上の線型順序を1つ固定しておく．まず，この順序に関する最大の non-compact root $\tilde{\gamma}_1$ をとる．次に，$\tilde{\gamma}_m$ $(m<k)$ が定義されているとして，各 $\tilde{\gamma}_m$ $(m<k)$ と強直交する正の non-compact root のうち最大のものを $\tilde{\gamma}_k$ とする．ここで，2つの root α, β が強直交するとは，$\alpha \neq \pm\beta$ かつ $\alpha \pm \beta \notin \Sigma$ なることである．上の手続きを可能な限り繰り返して得られる root の列を $(\tilde{\gamma}_1, \tilde{\gamma}_2, \cdots, \tilde{\gamma}_\ell)$ とする．このとき，$\gamma_k = \tilde{\gamma}_{\ell+1-k}$ $(1 \leq k \leq \ell)$ とおく．

さて，$\mathfrak{a}_\mathfrak{p} = \sum_{k=1}^{\ell}{}^{\oplus} \mathbb{R} H_k$，$H_k = X_{\gamma_k} + X_{-\gamma_k}$，とおくと，$\mathfrak{a}_\mathfrak{p}$ は $\mathfrak{p}$ の極大可換部分空間になる．また，$\mu = \mathrm{Ad}\left(\exp\left\{\frac{\pi}{4}\sum_{k=1}^{\ell}(X_{\gamma_k} - X_{-\gamma_k})\right\}\right)$

(Cayley 変換) は，$H_k \in \mathfrak{a}_p$ を $H'_{\gamma_k} \in \sqrt{-1}\mathfrak{t}$ にうつす．いま，$\lambda_k = \gamma_k \circ \mu \mid \mathfrak{a}_p$ $(1 \leq k \leq \ell)$ とおくと，$(\lambda_k)_{k=1}^{\ell}$ は $\mathfrak{a}_p$ の双対空間 $\mathfrak{a}_p^*$ の基底であり，$(\mathfrak{g}, \mathfrak{a}_p)$ の root 系 R は次のいずれかになる (restricted root theorem, [11])．

(Case I) $R = \{\pm\frac{1}{2}(\lambda_k - \lambda_m)\,;\, k > m\} \sqcup \{\pm\frac{1}{2}(\lambda_k + \lambda_m)\,;\, k \geq m\}$,

(Case II) $R = \{\pm\frac{1}{2}(\lambda_k - \lambda_m)\,;\, k > m\} \sqcup \{\pm\frac{1}{2}\lambda_k\,;\, k\} \sqcup \{\pm\frac{1}{2}(\lambda_k + \lambda_m)\,;\, k \geq m\}$.

(Case I) は，ちょうど，G/K が管領域と解析同型となる場合である．いま，$R^+ = \{\frac{1}{2}(\lambda_k - \lambda_m)\,;\, k > m\} \sqcup \{\frac{1}{2}(\lambda_k + \lambda_m)\,;\, k \geq m\} \left(\sqcup \{\frac{1}{2}\lambda_k\,;\, k\}\right)$ とおくと，R^+ は R の positive system を定め，また Cayley 変換 μ により Σ^+ に対応する．即ち，$R^+ \cup \{0\} = \Sigma^+ \circ \mu \mid \mathfrak{a}_p$ が成立つ．

$A_p = \exp \mathfrak{a}_p$ とおく．また，$\mathfrak{n}_{max} = \sum_{\lambda \in R^+} \mathfrak{g}_\lambda$ ($\mathfrak{g}_\lambda$ は λ の root 空間) に対応する G の解析的部分群を N_{max} で表す．N_{max} は G の極大巾単部分群であり，$G = KA_pN_{max}$ (岩沢分解) が成立つ．半単純元 $H_0 = \sum_{k=1}^{\ell} H_k \in \mathfrak{a}_p$ に対して，$\mathfrak{g}$ 上の作用素 $\mathrm{ad}\, H_0$ に関する固有値 i $(i \in \mathbb{Z})$ の固有空間を $\mathfrak{g}(i)$ で表すと，$\mathfrak{g}$ は

$$\mathfrak{g} = \bigoplus_{|i| \leq 2,\, i \in \mathbb{Z}} \mathfrak{g}(i), \quad \theta\mathfrak{g}(i) = \mathfrak{g}(-i), \quad \mathfrak{g}(2) = \sum_{k \geq m} \mathfrak{g}_{\frac{1}{2}(\lambda_k + \lambda_m)},$$

$$\mathfrak{g}(1) = \sum_{k} \mathfrak{g}_{\frac{1}{2}\lambda_k}, \quad \mathfrak{g}(0) = \mathfrak{z}_{\mathfrak{g}}(\mathfrak{a}_p) \oplus \sum_{k \neq m} \mathfrak{g}_{\frac{1}{2}(\lambda_k + \lambda_m)},$$

と固有空間分解される．ここで，θ は Cartan 分解 $\mathfrak{g} = \mathfrak{k} \oplus \mathfrak{p}$ に対応する Cartan 対合である．いま，$\mathfrak{n} = \mathfrak{g}(1) \oplus \mathfrak{g}(2)$, $\mathfrak{n}_0 = \mathfrak{g}(0) \cap \mathfrak{n}_{max}$ に対応する G の解析的部分群を各々 N, N_0 で表すと，$N_{max} = N_0 \ltimes N$ (半直積) が成立つ．また，N は Siegel 領域 G/K の

$\check{S}$ilov 境界と標準的に微分同型な高々2 step の巾零リー群であり，N が可換になるのはちょうど (Case I) のときである．

2.2. 既約 unitary 表現 ξ_+ とその実現． $1 \leq k \leq \ell$ に対して，$E_k = \frac{\sqrt{-1}}{2}(H'_{\gamma_k} - (X_{\gamma_k} - X_{-\gamma_k}))$ とおくと，$E_k \in \mathfrak{g}_{\lambda_k}$ である．いま，巾零元 $A = \sum_{k=1}^{\ell} E_k \in \mathfrak{g}(2) \subseteq \mathfrak{n}$ に対し，$\mathfrak{n}$ 上の線型形式 η' を $\eta'(X) = B(X, \theta A)$ $(X \in \mathfrak{n})$ により定める．ここに B は $\mathfrak{g}$ の Killing 形式．$\mathfrak{n}^* \ni \eta'$ を通る N の余随伴軌道 $(\subseteq \mathfrak{n}^*)$ に Kirillov の方法により対応する N の既約 unitary 表現（の同値類）を ξ_+ で表す．(Case I) においては，N は可換だから ξ_+ は unitary 指標 $e^{\sqrt{-1}\eta'}$ に他ならない．(Case II) においては，ξ_+ は無限次元表現になる．

§3 以降で行う計算のために ξ_+ の具体的な実現を与えておく (cf. [12])．線型空間の同型 $\mathfrak{s} = \mathfrak{a}_\mathfrak{p} \oplus \mathfrak{n}_{max} \overset{\pi}{\cong} \mathfrak{p}$, $\pi(X) = \frac{1}{2}(X - \theta X)$, を用いて $\mathfrak{p}$ 上の複素構造 J を $\mathfrak{s}$ 上に移したものを $J' = \pi^{-1} \circ J \circ \pi$ で表す．この時，$J'\mathfrak{g}(1) = \mathfrak{g}(1)$ が成立つ．従って，$j' = J'|\mathfrak{g}(1)$ は $\mathfrak{g}(1)$ に複素線型空間の構造を与える．また，$\mathfrak{g}^{\pm}(1) = \{U \mp \sqrt{-1} j'U ; U \in \mathfrak{g}(1)\}$ （複号同順）は，j' を $\mathfrak{g}(1)_\mathbb{C}$ 上の $\mathbb{C}$-線型写像に拡張したときの固有値 $\pm\sqrt{-1}$ の固有空間である．いま，

$$\langle U, U' \rangle = -\frac{1}{4}\{\eta'([j'U, U']) + \sqrt{-1}\,\eta'([U, U'])\} \qquad (U, U' \in \mathfrak{g}(1))$$

とおくと，$\langle\ ,\ \rangle$ は複素線型空間 $(\mathfrak{g}(1), j')$ 上の正定値 Hermite 内積を定める．このことから，$\mathfrak{n}_\mathbb{C}$ の部分環 $\mathfrak{g}^-(1) \oplus \mathfrak{g}(2)_\mathbb{C}$ は η' における正の polarization（[12, Def. 3.17] 参照）である事が判

る．従って，ξ_+ は 可換部分群 $\exp \mathfrak{g}(2) \subseteq N$ の unitary指標 $\exp(\sqrt{-1}\,\eta'|\mathfrak{g}(2))$ からの N への "holomorphic induction" により実現できる．この実現は，さらに次の形に書き換えられる：

$$\mathcal{H}(\xi_+) = \left\{ \psi \,;\ (\mathfrak{g}(1), j') \text{上の整函数},\ \|\psi\|^2 = \int_{\mathfrak{g}(1)} |\psi(U)|^2 e^{-2<U,U>} dU < +\infty \right\}$$

とおく．ここに dU は $\mathfrak{g}(1)$ 上の Euclid 測度．群 N は，

$$(\xi_+(n)\psi)(U) = \exp\{2<U,U_0> - <U_0,U_0> + \sqrt{-1}\,\eta'(V_0)\}\ \psi(U-U_0),$$

$$n = \exp(U_0+V_0) \in N,\quad U_0, U \in \mathfrak{g}(1),\quad V_0 \in \mathfrak{g}(2),\quad \psi \in \mathcal{H}(\xi_+),$$

により Hilbert 空間 $\mathcal{H}(\xi_+)$ 上に unitary に作用する．

2.3. GGGR $\mathrm{Ind}_N^G(\xi_+)$． 本稿では，誘導表現 $\mathrm{Ind}_N^G(\xi_+)$ を Generalized Gelfand-Graev表現(= GGGR) と呼ぶ．これは，$G=SL_2(\mathbb{R})$ の場合に 1.2 で定義された表現 $\pi(\xi_+)$ の自然な一般化である．

§3. GGGR C^∞-$\mathrm{Ind}_N^G(\xi_+)$に関する highest weight vector の決定

この節では，1.5 で設定した問題Aに対する解答を述べる．

3.1 Highest weight vector の空間 $C^\infty(G;\xi_+\|\Sigma^+;\Lambda)$． いま，K-dominant かつ integral な $\mathfrak{t}_\mathbb{C}$上の線型形式のなす集合を Ξ_k^+ で表す．即ち，$\Lambda \in \Xi_k^+$ とは $\Lambda \in \mathfrak{t}_\mathbb{C}^*$ が次の２条件を満すことである．

(3.1) $\qquad \Lambda(H'_\gamma) \geq 0, \qquad \forall\gamma \in \Sigma_k^+,$

(3.2) $\exp H \longmapsto \exp\Lambda(H)$ $(H \in \mathfrak{t})$ は Kの極大輪環部分群 $T = \exp\mathfrak{t}$ の unitary 指標を定める．

さて，$\Lambda \in \Xi_k^+$ をとる．次の２条件 (3.3) 及び (3.4) を満す

K-有限な vector $F \in C^\infty(G;\xi_+)$ のなす空間を $C^\infty(G;\xi_+\|\Sigma^+;\Lambda)$ で表す. ここで, $(\pi_{\xi_+}, C^\infty(G;\xi_+)) = C^\infty\text{-}\mathrm{Ind}_N^G(\xi_+)$ (cf. 1.1).

(3.3) $\quad \pi_{\xi_+}(H)F = \Lambda(H)F, \qquad {}^\forall H \in \mathfrak{t}_{\mathbb{C}},$

(3.4) $\quad \pi_{\xi_+}(X_\gamma)F = 0, \qquad {}^\forall \gamma \in \Sigma^+.$

我々は highest weight vector $F \in C^\infty(G;\xi_+\|\Sigma^+;\Lambda)$ を具体的に求める.

Λ を (Σ_k^+ に関する) highest weight にもつ K の有限次元既約表現を $(\tau_\Lambda, V_\Lambda)$, その反傾表現を $(\tau_\Lambda^*, V_\Lambda^*)$ で表す. $V_\Lambda^* \otimes \mathcal{H}(\xi_+)$ に値をとる G 上の C^∞-函数 $\tilde{F}$ で, 次の2条件

(3.5) $\quad \tilde{F}(kgn^{-1}) = [\tau_\Lambda^*(k) \otimes \xi_+(n)]\tilde{F}(g) \qquad (g\in G,\ k\in K,\ n\in N),$

(3.6) $\quad X_\gamma \tilde{F} = 0, \qquad {}^\forall \gamma \in \Sigma_p^+,$

を満すもの全体のなす空間を $C^\infty(G;\tau_\Lambda^*,\xi_+\|\Sigma_p^+;\Lambda)$ で表す. ここで, $\mathfrak{g}_{\mathbb{C}}$ の展開環 $U(\mathfrak{g}_{\mathbb{C}})$ の各元は G 上の右不変微分作用素として G 上の C^∞-函数に作用するものとする.

表現 τ_Λ の Λ-highest weight vector $v_\Lambda \in V_\Lambda \setminus \{0\}$ をとる. $\tilde{F} \in C^\infty(G;\tau_\Lambda^*,\xi_+\|\Sigma_p^+;\Lambda)$ に対して,

(3.7) $\quad F(g) = \langle v_\Lambda, \tilde{F}(g)\rangle \qquad (g\in G)$

とおく. ここで, $\langle\ ,\ \rangle$ は V_Λ と V_Λ^* の間の双対性を表す内積から自然に定まる $V_\Lambda \times (V_\Lambda^* \otimes \mathcal{H}(\xi_+))$ から $\mathcal{H}(\xi_+)$ への双線型写像を表す. この時, 明らかに $F \in C^\infty(G;\xi_+\|\Sigma^+;\Lambda)$. 更に,

<u>補題 3.1.</u> 対応 $\tilde{F} \mapsto F$ は $C^\infty(G;\tau_\Lambda^*,\xi_+\|\Sigma_p^+;\Lambda)$ から

$C^\infty(G;\xi_+\|\Sigma^+;\Lambda)$ の上への線型空間としての同型写像を与える.

この補題により, 問題Aは"$\tilde{F}\in C^\infty(G;\tau_\Lambda^*,\xi_+\|\Sigma_p^+;\Lambda)$ を全て求めよ"という問題と同値になった.

$\tilde{F}$ は G 上の $V_\Lambda^*\otimes\mathcal{H}(\xi_+)$ に値をもつ C^∞-函数であり, $\mathcal{H}(\xi_+)$ は $(\mathfrak{g}(1),j')$ 上の整函数からなる訳だから, $\tilde{F}$ を $G\times\mathfrak{g}(1)$ 上の V_Λ^* に値をもつ C^∞-函数 $G\times\mathfrak{g}(1)\ni(g,U)\xmapsto{\tilde{F}}\tilde{F}(g:U)\in V_\Lambda^*$ と自然に見なすことが出来る. このとき, $\tilde{F}\in C^\infty(G;\tau_\Lambda^*,\xi_+\|\Sigma_p^+;\Lambda)$ の満すべき条件は次の3条件 (3.8), (3.9) 及び (3.10) になる.

(3.8) 任意の $g\in G$ に対し, $\tilde{F}(g:\cdot)\in V_\Lambda^*\otimes\mathcal{H}(\xi_+)$. さらに, G 上の函数 $G\ni g\longmapsto\tilde{F}(g:\cdot)\in V_\Lambda^*\otimes\mathcal{H}(\xi_+)$ は C^∞-函数.

(3.9) $\tilde{F}(kgn^{-1}:U)=\exp\{2\langle U,U_0\rangle-\langle U_0,U_0\rangle+\sqrt{-1}\,\eta'(V_0)\}\,\tau_\Lambda^*(k)\,\tilde{F}(g:U-U_0)$,

$$\forall g\in G,\ \forall k\in K,\ \forall n=\exp(U_0+V_0),\ \forall U,\forall U_0\in\mathfrak{g}(1),\ \forall V_0\in\mathfrak{g}(2).$$

(3.10) $X_\gamma\tilde{F}_U=0,\quad \forall\gamma\in\Sigma_p^+,\ \forall U\in\mathfrak{g}(1).$

ここで, $\tilde{F}_U(g)=\tilde{F}(g:U)$.

さて, 次の手順で $\tilde{F}$ を決定しよう. まず, 条件(3.9)により $\tilde{F}$ はその $A_pN_0\times\mathfrak{g}(1)$ 上への制限 $\tilde{F}_0$ により一意的に定まることに注意する. 次に, 微分方程式系 (3.10) を $\tilde{F}_0$ に関するものに書き換えて解く. 最後に, 求めた解 $\tilde{F}_0$ から条件(3.9)を通して定まる $\tilde{F}$ が条件(3.8)を満す事を検証する.

<u>注意.</u> [5, p.65] においては，（$\tilde{F}$ ではなく）$F \in C^\infty(G; \xi_+ \| \Sigma^+; \Lambda)$ に対して，その $A_pN_0 \times \mathfrak{g}(1)$ への制限 F_0 により F は一意的に決定される，と主張してある．しかし，この主張は $\dim \tau_\Lambda > 1$ の時には正しくない．この部分を修正した我々の計算は，[5]の計算よりもかなり煩雑になる．

<u>3.2. 問題 A に対する解答.</u> 結果を述べるために記号を導入する．G は線型リー群であるから 複素化 $G_{\mathbb{C}} \supseteq G$ をもつ．$\mathfrak{k}_{\mathbb{C}}$ に対応する $G_{\mathbb{C}}$ の解析的部分群を $K_{\mathbb{C}}$ で表し，τ_Λ^* を $K_{\mathbb{C}}$ の複素解析的表現に拡張しておく．いま，$\alpha = \mu \circ \theta$ (c.f. 2.1) とおく．すると，α を，$G_{\mathbb{C}}$ の可解部分群 $A_pN_0 \exp \mathfrak{g}^+(1)$ から $K_{\mathbb{C}}$ の中への群同型に持ち上げることができる（$\mathfrak{g}^+(1)$ については 2.2 参照）．これもまた同じ α で表す．$U \in \mathfrak{g}(1)$ に対し，$p(U) = \frac{1}{2\sqrt{2}}(U - \sqrt{-1}\, j' U) \in \mathfrak{g}^+(1)$ とおく．この時，$\mathfrak{g}(1) \ni U \longmapsto (\tau_\Lambda^* \circ \alpha)(\exp p(U)) \in GL(V_\Lambda^*)$ は 複素線型空間 $(\mathfrak{g}(1), j')$ (c.f. 2.2) 上の正則多項式写像になる．さて，$G \times \mathfrak{g}(1)$ 上の $GL(V_\Lambda^*)$ に値をもつ函数 F_Λ を 次の如く定める： まず，$A_pN_0 \times \mathfrak{g}(1)$ 上では，$(an_0, U) \in A_pN_0 \times \mathfrak{g}(1)$ に対し，

$$(3.11) \quad F_\Lambda(an_0 : U) = \{\exp \eta'(\mathrm{Ad}(an_0)^{-1} A)\}(\tau_\Lambda^* \circ \alpha)(an_0 \exp p(U))$$

と定める．η' 及び A については 2.2 参照．次に，F_Λ に対し条件 (3.9) が成立つ様に，上で定めた函数を $G \times \mathfrak{g}(1)$ 上に拡張する．

$v^* \in V_\Lambda^*$ に対して，$G \times \mathfrak{g}(1)$ 上の V_Λ^*-値 (resp. $\mathbb{C}$-値) 函数 $F_\Lambda^{v^*}$

(resp. $F_\Lambda^{v^*}$) を,

$$
(3.12)\qquad
\begin{aligned}
\tilde{F}_\Lambda^{v^*}(g:U) &= F_\Lambda(g:U)v^* \\
F_\Lambda^{v^*}(g:U) &= \langle v_\Lambda,\ \tilde{F}_\Lambda^{v^*}(g:U)\rangle
\end{aligned}
\qquad (g,U)\in G\times\mathfrak{g}(1),
$$

により定める. 3.1 の最後の部分で述べた手順に従って $\tilde{F}\in C^\infty(G;\tau_\Lambda^*,\xi_+\|\Sigma_p^+;\Lambda)$ を求めた結果, 次の命題を得る.

<u>命題3.2.</u> $C^\infty(G;\tau_\Lambda^*,\xi_+\|\Sigma_p^+;\Lambda)=\{\tilde{F}_\Lambda^{v^*};\ v^*\in V_\Lambda^*\}$.

補題3.1 と命題3.2 より, 問題A (c f. 1.5) に対する解答が次の如く述べられる.

<u>定理3.3.</u> 任意の $\Lambda\in\Xi_k^+$ に対し, 対応 $v^*\mapsto F_\Lambda^{v^*}$ は V_Λ^* から highest weight vector のなす空間 $C^\infty(G;\xi_+\|\Sigma^+;\Lambda)$ の上への(線型空間の)同型写像を与える. 即ち, $C^\infty(G;\xi_+\|\Sigma^+;\Lambda)\simeq V_\Lambda^*$.

§4. GGGR $L^2\text{-}\mathrm{Ind}_N^G(\xi_+)$ に関する highest weight vector の決定

この節では 1.5 で提起した問題 B を解く.

<u>4.1. GGGR $L^2\text{-}\mathrm{Ind}_N^G(\xi_+)$.</u> ξ_+ の表現空間 $\mathcal{H}(\xi_+)$ (c f. 2.2) に値をもつ G上の (可測) 函数F で, 次の 2 条件

$$(4.1)\qquad R_nF=\xi_+(n)^{-1}F,\qquad \forall n\in N,$$

$$(4.2)\qquad \|F\|^2_{L^2(G;\xi_+)}=\int_{G/N}\|F(g)\|^2_{\mathcal{H}(\xi_+)}\,d\mu(gN)<+\infty,$$

を満すもの全体から定まるHilbert空間を$L^2(G;\xi_+)$で表す。ここで，$R_nF(g)=F(gn)$ $(g\in G)$，$d\mu$は商空間G/N上のG-不変測度である。Gは左移動によって$L^2(G;\xi_+)$上にunitary表現U_{ξ_+}を定める。この表現$(U_{\xi_+}, L^2(G;\xi_+))$がunitaryに誘導されたGGGR $L^2\text{-}\mathrm{Ind}_N^G(\xi_+)$である。

4.2. 問題Bに対する解答。 §3で求めたhighest weight vector $F_\Lambda^{v^*}\in C^\infty(G;\xi_+\|\Sigma^+;\Lambda)$が$L^2(G;\xi_+)$に属するための（$\Lambda$に関する）条件が次の如く与えられる。

定理4.1. K-dominantかつintegralな線型形式$\Lambda\in\Xi_k^+$に対して，次の4条件(a)〜(d)は互いに同値である。

(a) ある$v^*\in V_\Lambda^*\setminus\{0\}$に対して，$F_\Lambda^{v^*}$が$L^2(G;\xi_+)$に属する。

(b) 任意の$v^*\in V_\Lambda^*$に対して，$F_\Lambda^{v^*}$が$L^2(G;\xi_+)$に属する。

(c) Λは条件$(\Lambda+\rho)(H'_{\gamma_\ell})<0$を満す。ここに，$\gamma_\ell$は最大のnon-compact root (cf. 2.1)であり，$\rho=\frac{1}{2}\sum_{\gamma\in\Sigma^+}\gamma$とおいた。

(d) 任意の$\gamma\in\Sigma_p^+$に対して$(\Lambda+\rho)(H'_\gamma)<0$が成立つ。

注意. (1) 結局，$F_\Lambda^{v^*}\in L^2(G;\xi_+)$か否かは$v^*(\neq 0)$の取り方にはよらず，$\Lambda$が条件(c)（$\Leftrightarrow$(d)）を満すか否かによって決まる。

(2) Λに関する条件(d)は，Gの正則離散系列表現のnon-vanishing条件（[4]）に他ならない（命題5.2も参照）。また，条件(c)と

(d)の同値性は [12, Appendix] において証明されている。

<u>4.3. 定理4.1の証明のあらすじ.</u> ノルム $\|F_\Lambda^{v^*}\|_{L^2(G;\xi_+)}$ がいつ有限になるかを調べる。$G=KA_pN_0N$ ゆえ，G/N 上の G-不変測度 $d\mu$ は，自然に定まる微分同型 $G/N \approx KA_pN_0$ により G/N と KA_pN_0 とを同一視したとき，$d\mu = a^{2\rho'}\,dk\,da\,dn_0$ で与えられる。ここで，dk, da 及び dn_0 は各々 K, A_p 及び N_0 の Haar 測度であり，$\rho' = \rho\circ\mu|\mathfrak{a}_p$ とおいた。この事実と compact 群 K の既約表現の行列要素に関する直交関係から，まずノルム $\|F_\Lambda^{v^*}\|^2_{L^2(G;\xi_+)}$ は，

$$(4.3)\quad \|F_\Lambda^{v^*}\|^2 = d(\Lambda)^{-1}\int_{A_pN_0\times\mathfrak{g}(1)} \{\exp 2\eta'(\mathrm{Ad}(an_0)^{-1}A)\}\,\|(\tau_\Lambda^*\circ\alpha)(an_0\exp p(U))v^*\|^2\, a^{2\rho'} e^{-2\|U\|^2}\,da\,dn_0\,dU$$

と計算される。ここで，$d(\Lambda)=\dim\tau_\Lambda$. 特に v^* が，τ_Λ^* の Σ_k^+ に関して lowest な weight $-\Lambda$ を weight にもつ vector $v_\Lambda^*\,(\neq 0)$ の場合には，(4.3)の右辺は次の様な簡単な形になる。

$$(4.4)\quad \|F_\Lambda^{v_\Lambda^*}\|^2 = d(\Lambda)^{-1}\int_{\mathfrak{g}(1)} e^{-2\|U\|^2}\,dU \int_{A_pN_0} \{\exp 2\eta'(\mathrm{Ad}(an_0)^{-1}A)\}\, a^{2(\Lambda+\rho)\circ\mu}\,da\,dn_0.$$

(4.4)の右辺を具体的に計算して，次の補題を得る。

<u>補題4.2.</u> 定理4.1における条件(c) ($\Leftrightarrow$ (d)) は $F_\Lambda^{v_\Lambda^*}\in L^2(G;\xi_+)$ なるために Λ の満すべき必要十分条件である。

この補題より，$\dim\tau_\Lambda = 1$ なる $\Lambda\in\Xi_k^+$ に限れば 定理4.1は

証明されたことになる。更に次の2つの補題を示す事によって，定理4.1の証明は完結する。

<u>補題4.3.</u> ある $v^* \in V_\Lambda^* \setminus \{0\}$ に対して $F_\Lambda^{v^*} \in L^2(G;\xi_+)$ ならば，必ず $F_\Lambda^{v_\Lambda^*} \in L^2(G;\xi_+)$ となる。

<u>補題4.4.</u> Λ が条件 $(\Lambda+\rho)(H'_\gamma)<0$, $\forall\gamma\in\Sigma_p^+$, を満せば，積分

$$\int_{A_pN_0}\{\exp 2\eta(\mathrm{Ad}(an_0)^{-1}A)\}\ \|(\tau_\Lambda^*\circ\alpha)(an_0)\|^2_{GL(V_\Lambda^*)}\ a^{2\rho'}\,da\,dn_0$$

は絶対収束する。従って，このとき任意の $v^*\in V_\Lambda^*$ に対して $F_\Lambda^{v^*} \in L^2(G;\xi_+)$ が成立つ。

上の3つの補題は [12] における議論を用いて証明できる。

<u>§5. Highest weight をもつ admissible 表現の WM.</u> §3及び§4で得た結果をもとに，1.5で提起した問題Cに対する我々の解答を述べよう。その前に，5.1では highest weight をもつ admissible 表現についての Harish-Chandra ([4]) の結果を，Varadarajan による解説([14]) を参考にしてまとめておく。

<u>5.1.</u> $\Lambda\in\mathfrak{t}_c^*$ とする。$U(\mathfrak{g}_c)$-加群 M が Λ を (Σ^+-extreme) highest weight にもつ <u>highest weight module</u> であるとは，次の条件 (5.1)-(5.3) を満す vector $v\neq 0, \in M$ が存在するときをいう。

(5.1) $U(\mathfrak{g}_{\mathbf{C}})\,v = M$,

(5.2) $H v = \Lambda(H) v, \quad \forall H \in \mathfrak{t}_{\mathbf{C}}$,

(5.3) $X_\gamma v = 0, \quad \forall \gamma \in \Sigma^+$.

次に，$(\mathfrak{g}, K)$-加群 V が admissible であるとは，任意の $v \in V$ は K-有限 (i.e. $\dim U(\mathfrak{k}_{\mathbf{C}})v < +\infty$) であり，かつ K-加群として V が重複度有限になることである．

まず，$U(\mathfrak{g}_{\mathbf{C}})$ の表現論における Verma module と同様に基本的役割を果す "universal" な，admissible highest weight module J_Λ を定義する．$\Lambda \in \mathfrak{t}_{\mathbf{C}}^*$ を highest weight にもつ $U(\mathfrak{g}_{\mathbf{C}})$-加群が同時に admissible $(\mathfrak{g}, K)$-加群の構造を持ち得るためには，$\Lambda \in \Xi_k^+$ (cf. p. 17) でなければならない．従って，以下 $\Lambda \in \Xi_k^+$ と仮定する．

いま，Λ を highest weight にもつ K の(従って $\mathfrak{k}_{\mathbf{C}}$ の) 既約表現 $(\tau_\Lambda, V_\Lambda)$ を，$\mathfrak{g}_{\mathbf{C}}$ の極大放物型部分環 $\mathfrak{q}_+ = \mathfrak{k}_{\mathbf{C}} \oplus \mathfrak{p}_+$ ($\mathfrak{p}_+$ については p. 9 参照) の表現 $(\tilde{\tau}_\Lambda, V_\Lambda)$ に $\tilde{\tau}_\Lambda(X+Y) = \tau_\Lambda(X)$ $(X \in \mathfrak{k}_{\mathbf{C}}, Y \in \mathfrak{p}_+)$ により拡張しておく．$\tilde{\tau}_\Lambda$ により，V_Λ は $U(\mathfrak{q}_+)$-加群になる．このとき，$J_\Lambda = U(\mathfrak{g}_{\mathbf{C}}) \otimes_{U(\mathfrak{q}_+)} V_\Lambda$ とおく．τ_Λ はもともと K の表現なので，J_Λ は $(\mathfrak{g}, K)$-加群の構造をもつ．また，$U(\mathfrak{p}^-)$-加群として，J_Λ は階数 $\dim V_\Lambda$ の自由加群になる．さらに，J_Λ は Λ を highest weight にもつ admissible な highest weight module になることがわかる．

J_Λ は次の意味で "universal" である：Λ を highest weight にもつ任意の admissible highest weight module M は，J_Λ の部分

$(\mathfrak{g}, K)$-加群による商と同型になる．即ち，J_Λ から M の上への $(\mathfrak{g}, K)$-加群準同型写像が存在する．逆に，J_Λ の任意の部分 $(\mathfrak{g}, K)$-加群 $V \subsetneqq J_\Lambda$ による商 J_Λ/V は，admissible な highest weight module になる．

上に述べた事より，Λ を highest weight にもつ既約 admissible $(\mathfrak{g}, K)$-加群とは，極大部分 $(\mathfrak{g}, K)$-加群 $V \subsetneqq J_\Lambda$ による J_Λ の商 J_Λ/V に他ならない．一方，J_Λ は最大の部分 $(\mathfrak{g}, K)$-加群 $V_0 \subsetneqq J_\Lambda$ を持つ事が知られている．従って，Λ を highest weight にもつ admissible highest weight module のうちで既約なものは $I_\Lambda = J_\Lambda/V_0$ と $(\mathfrak{g}, K)$-加群として同型になる．

既約表現 I_Λ が有限次元になるのは，$\Lambda \in \Xi_k^+$ がさらに Σ^+ に関して dominant になる場合である．この場合には，$I_\Lambda \neq J_\Lambda$ (i.e. $V_0 \neq (0)$)．なぜなら，いかなる $\Lambda \in \Xi_k^+$ に対しても J_Λ は常に無限次元になるからである．しかし，その対極にあたる次の場合には，J_Λ 自身が既約になる．

命題 5.1 ([14, Prop. 2.3.3])．$\Lambda \in \Xi_k^+$ が条件 $(\Lambda+\rho)(H'_\gamma) \notin \{1, 2, \cdots\}$ $\forall \gamma \in \Sigma_p^+$，を満せば，$J_\Lambda$ は既約になる．特に，Λ が定理 4.1 における条件 (c) ($\Leftrightarrow$ (d)) を満すときには $I_\Lambda = J_\Lambda$ となる．

任意の既約 admissible $(\mathfrak{g}, K)$-加群 I に対し，I を Harish-Chandra

加群としてもつ G の既約 admissible 表現 π が存在する．π として unitary 表現をとることができるとき，I を unitarizable と呼ぶ．

命題 5.2（[4, VI]）．Λ が条件 $(\Lambda+\rho)(H'_\gamma)<0$，$\forall\gamma\in\Sigma_p^+$，を満すと仮定する．このとき，$I_\Lambda\ (=J_\Lambda)$ は unitarizable であり，G の自乗可積分な既約 unitary 表現 $(D_\Lambda, \mathcal{H}_\Lambda)$ の Harish-Chandra 加群になる．

D_Λ は K の既約 unitary 表現 τ_Λ から G への holomorphic induction により実現できる．このため，D_Λ は正則離散系列表現と呼ばれている．

注意．命題 5.2 の条件を満さないいくつかの $\Lambda\in\Xi_k^+$ に対しても，I_Λ が unitarizable になる場合がある．I_Λ が unitarizable になる Λ を決定する問題は，数年前に Enright-Howe-Wallach（[1]）及び Jakobsen（[7]）により各々独立に解決された．詳しくは原論文を参照されたい．

5.2. I_Λ の (N,ξ_+) 型 $(\mathfrak{g},K)$-WM．まず，universal な admissible highest weight module J_Λ から GGGR $\pi_{\xi_+}=C^\infty\text{-}\mathrm{Ind}_N^G(\xi_+)$ の中への $(\mathfrak{g},K)$-加群準同型写像のなす空間 $\mathrm{Hom}_{\mathfrak{g}\text{-}K}(J_\Lambda, \pi_{\xi_+})$ を解明する．

$\Lambda \in \Xi_k^+$ に対して，J_Λ の highest weight vector $v_0 \neq 0$ をとる．この時，任意の $T \in \mathrm{Hom}_{\mathfrak{g}\text{-}K}(J_\Lambda, \pi_{\xi_+})$ に対して Tv_0 は $C^\infty(G;\xi_+)$ の K-有限な highest weight vector である．即ち，$Tv_0 \in C^\infty(G;\xi_+\|\Sigma^+;\Lambda)$ (cf. §3)．更に J_Λ の universality (cf. 5.1) を用いて，対応 $T \mapsto Tv_0$ は線型空間の同型

(5.4) $$\mathrm{Hom}_{\mathfrak{g}\text{-}K}(J_\Lambda, \pi_{\xi_+}) \simeq C^\infty(G;\xi_+\|\Sigma^+;\Lambda)$$

を与えることが判る．これと §3 での主結果 (定理3.3) を併せて，

(5.5) $$\mathrm{Hom}_{\mathfrak{g}\text{-}K}(J_\Lambda, \pi_{\xi_+}) \simeq V_\Lambda^*$$

を得る．

一方，I_Λ は J_Λ の quotient なわけだから，

(5.6) $$\mathrm{Hom}_{\mathfrak{g}\text{-}K}(I_\Lambda, \pi_{\xi_+}) \hookrightarrow \mathrm{Hom}_{\mathfrak{g}\text{-}K}(J_\Lambda, \pi_{\xi_+})$$

なる線型空間の自然なうめ込みがある．以上まとめて，

<u>定理5.3.</u> 任意の $\Lambda \in \Xi_k^+$ に対して，

(5.7) $$\mathrm{Hom}_{\mathfrak{g}\text{-}K}(I_\Lambda, \pi_{\xi_+}) \hookrightarrow \mathrm{Hom}_{\mathfrak{g}\text{-}K}(J_\Lambda, \pi_{\xi_+}) \simeq V_\Lambda^*$$

が成立つ．従って，既約かつ admissible な highest weight module I_Λ の $C^\infty(G;\xi_+)$ における重複度は $\dim V_\Lambda^*$ 以下である．J_Λ が既約 ($\Leftrightarrow I_\Lambda = J_\Lambda$) なときには その重複度は $\dim V_\Lambda^*$ に一致する．

<u>注意.</u> $\dim I_\Lambda < +\infty$ なる場合には，$\mathrm{Hom}_{\mathfrak{g}\text{-}K}(I_\Lambda, \pi_{\xi_+}) = (0)$ なる事が証明できる．従って，有限次元既約表現 I_Λ は，$(\mathfrak{g}, K)$-加

群 $C^\infty(G;\xi_+)$ の subquotient としては実現可能だが，部分 $(\mathfrak{g},K)$-加群としては実現できない．この事実は，もっと一般に $I_\Lambda \neq J_\Lambda$ なる任意の I_Λ に対して正しい，と筆者は予想している（[3, Cor. 3.4] と比較されたい）．しかし，いまだその予想に対する証明もしくは反例を与えるには至っていない．

5.3. Highest weight をもつ既約 unitary 表現の (N,ξ_+) 型 L^2-WM.

$\Lambda \in \Xi_k^+$ に対し，I_Λ を Harish-Chandra 加群にもつ G の既約 admissible 表現 π_Λ をとる．π_Λ を unitary に誘導された GGGR $U_{\xi_+} = L^2\text{-}\mathrm{Ind}_N^G(\xi_+)$ の部分表現として実現することを考える．実現可能なためには π_Λ は当然 unitary 表現であること，即ち，I_Λ が unitarizable であることが必要である．

いま，$L^2(G;\xi_+\|\Sigma^+;\Lambda) = L^2(G;\xi_+) \cap C^\infty(G;\xi_+\|\Sigma^+;\Lambda)$ とおく．このとき，任意の $F \in L^2(G;\xi_+\|\Sigma^+;\Lambda)$ は U_{ξ_+} に関して解析的かつ K-有限な vector になる．

unitary 表現 π_Λ の U_{ξ_+} の部分表現としての実現があれば，その highest weight vector として $F \in L^2(G;\xi_+\|\Sigma^+;\Lambda)\setminus\{0\}$ が定数倍を除き一意に定まる．逆に，$F \in L^2(G;\xi_+\|\Sigma^+;\Lambda)\setminus\{0\}$ が与えられたとき，F から生成される $U_{\xi_+}(G)$-不変な閉部分空間 $H(F) \subseteq L^2(G;\xi_+)$ 上への G の unitary 表現は π_Λ と unitary 同値になる．かくして，π_Λ の U_{ξ_+} の部分表現としての実現を調べる問題は，空間 $L^2(G;\xi_+\|\Sigma^+;\Lambda)$ の研究に帰着された．

上で行った考察と定理4.1より，π_Λ の (N, ξ_+) 型 L^2-WM について次の定理を得る。

<u>定理5.4.</u> *highest weight* Λ をもつ G の既約 *unitary* 表現 π_Λ が *unitary* に誘導された GGGR $U_{\xi_+} = L^2\text{-}\mathrm{Ind}_N^G(\xi_+)$ の部分表現として実現できるのは，Λ が正則離散系列表現に関する *non-vanishing* 条件 $(\Lambda+\rho)(H'_\gamma) < 0$, $\forall \gamma \in \Sigma_p^+$ を満すとき，かつそのときに限る。この場合，$\pi_\Lambda \simeq D_\Lambda$（＝正則離散系列表現）の U_{ξ_+} における重複度は $\dim \tau_\Lambda$ に等しい。ここで，τ_Λ は Λ を *highest weight* にもつ K の既約表現である。

<u>5.4. 正則離散系列表現の (N, ξ_+) 型 WM.</u> 定理5.3 及び 5.4 より，D_Λ の (N, ξ_+) 型 L^2-WM，C^∞-WM 及び $(\mathfrak{g}, K)$-WM は次の如く完全に判ったことになる。

<u>定理5.5.</u> 正則離散系列表現 D_Λ に対して，

$$\begin{aligned}\mathrm{Hom}_G(D_\Lambda, L^2\text{-}\mathrm{Ind}_N^G(\xi_+)) &\simeq \mathrm{Hom}_G((D_\Lambda)_\infty, C^\infty\text{-}\mathrm{Ind}_N^G(\xi_+)) \\ &\simeq \mathrm{Hom}_{\mathfrak{g}\text{-}K}(I_\Lambda, C^\infty\text{-}\mathrm{Ind}_N^G(\xi_+)) \\ &\simeq V_\Lambda^* \qquad (\text{線型空間の同型})\end{aligned}$$

が成立つ。ここに，I_Λ は D_Λ の *Harish-Chandra* 加群であり，$(D_\Lambda)_\infty$ は D_Λ に対応する G の smooth な表現である。

定理5.3-5.5が序論(1.5)で設定した問題Cに対する我々の(現時点における)解答である.

References

[1] T.J.Enright, R.Howe and N.R.Wallach, A classification of unitary highest weight modules, in " Representation Theory of Reductive Groups", edited by P.C.Trombi, Birkhäuser, 1983, 97-143.

[2] I.M.Gelfand and M.I.Graev, Categories of group representations and the problem of classifying irreducible representations, Soviet Math. Dokl., 3 (1962), 1378-1381.

[3] R.Goodman and N.R.Wallach, Whittaker vectors and conical vectors, J. Funct. Anal., 39 (1980), 199-279.

[4] Harish-Chandra, Representations of semisimple Lie groups, IV, Amer. J. Math., 77 (1955), 743-777; V, Ibid., 78 (1956), 1-41; VI, Ibid., 78 (1956), 564-628.

[5] M.Hashizume, Whittaker models for representations with highest weights, Lec. in Math., Kyoto Univ., No. 14 (1982), 51-73.

[6] H.Jacquet and R.P.Langlands, Automorphic forms on GL(2), Lec. Notes in Math., Vol. 114, Springer-Verlag, 1970.

[7] H.P.Jakobsen, Hermitian symmetric spaces and their unitary highest weight modules, J. Funct. Anal., 52 (1983), 385-412.

[8] N.Kawanaka, Generalized Gelfand-Graev representations and Ennola duality, Advanced Studies in Pure Math., 6 (1985), 175-206.

[9] B.Kostant, On Whittaker vectors and representation theory, Invent. Math., 48 (1978), 101-184.

[10] H.Matsumoto, Boundary value problems for Whittaker functions on real split semisimple Lie groups, preprint (1985).

[11] C.C.Moore, Compactifications of symmetric spaces II: The Cartan domains, Amer. J. Math., 86 (1964), 358-378.

[12] H.Rossi and M.Vergne, Representations of certain solvable Lie groups on Hilbert spaces of holomorphic functions and the application to the holomorphic discrete series of a semisimple Lie group, J. Funct. Anal., 13 (1973), 324-389.

[13] J.A.Shalika, The multiplicity one theorem for GL_n, Annals of Math., 100 (1974), 171-193.

[14] V.S.Varadarajan, Infinitesimal theory of representations of semisimple Lie groups, in " Harmonic Analysis and Representations of Semisimple Lie Groups", edited by J.A.Wolf et al., Reidel, 1980.

[15] H.Yamashita, A finite multiplicity theorem for induced representations of semisimple Lie groups and its application to generalized Gelfand-Graev representations, in preparation.

[16] ___________, Multiplicity free property for generalized Gelfand-Graev representations of semisimple Lie groups, to appear in RIMS Kôkyûroku, "群の表現の幾何学的実現", in Japanese.