数理解析研究所講究録
第600巻 1986年 52-116

Survey in harmonic mappings

浦川　肇

昭和61年3月25日 ～ 28日

於　京都大学数理解析研究所

(浦川-harmonic map)

目次

Chapter 1 The first and the second variation formulas for the energy

▼この章では、 harmonic map の定義や基本的な事柄に付いて説明した後に、 harmonic map を spectrum で特徴づけることに関し考察する。

§1 Definition of harmonic maps and their examples

▼幾何学の多くの問題は、変分問題として、 formulate される。そこで使われる変分法とは、

(i) ある空間 X 上の functional E を考える
(ii) E の X 上における critical points を調べる
(iii) E の critical points における Hessian を調べる

から成り立っている。

例えば、 Morse theory では、変分法を用いて多様体の大域的性質を調べている。

例 （測地線の場合）

(N,h):Riemannian manifold

p,q $\in$ N として

$$
\begin{aligned}
X &:= \{ p と q を結ぶ smooth な path 全体 \} \\
&= \{ \phi : [0,2\pi] \to M \text{ smooth}, \phi(0) = p,\ \phi(2\pi) = q \}
\end{aligned}
$$

と置く。$\phi \in X$ に対し、E:energy を

$$E(\phi) := \frac{1}{2}\int_0^{2\pi} h\left(\frac{d\phi}{dt}, \frac{d\phi}{dt}\right)dt$$

と置く。 このとき、Eの critical point が p と q を結ぶ constant speed の測地線である。

（以下このノートでは、特に断わらないかぎり、測地線はすべて constant speed とする。）

▼一般に

$(M,g),(N,h)$:Riemannian manifolds

$X := C^\infty(M,N) = \{\phi : M \to N \text{ smooth}\}$

として、$\phi \in X$ に対し、<u>ϕ の energy</u> $E(\phi)$ を以下の式で定義する。

$$E(\phi) := \int_M e(\phi)dv_g$$

但し、

$$e(\phi)(x) := \frac{1}{2}\ (\text{Hilbert-Schmit norm of } d\phi \text{ at } x)$$

$$= \frac{1}{2} \Sigma_{i=1}{}^{m}\ h(d\phi(e_i), d\phi(e_i))$$

$\{e_i\}_{i=1}{}^m$:local orthonormal frame of (M,g)

$m = \dim M$

（以下特に断わらない限り、$m = \dim M$ とする。）

とする。

<u>定義</u>

$\phi \in C^\infty(M,N)$が <u>harmonic map</u> であるとは

$\forall \phi_t : \phi_0 = \phi$ なる variation で compact support を持つもの

に対し

$$\frac{d}{dt}E(\phi_t)\Big|_{t=0} = 0$$

であることと定義する。

▼Energy functional の first variation formula は

$$\frac{d}{dt}E(\phi_t)\Big|_{t=0} = -\int_M h(\tau(\phi),V)dV_g$$

で与えられる。(cf. [E.L2] Proposition (2.4)) 但し、

$$\tau(\phi) := \Sigma_{i=1}^{m}\{\tilde{\nabla}_{e_i}e_i - \phi({}^M\nabla_{e_i}e_i)\}$$

${}^M\nabla$:the Levi-Civita connection on (M,g)

${}^N\nabla$:the Levi-Civita connection on (N,h)

$\tilde{\nabla}$:= the connection on $\Gamma(\phi^{-1}TN)$ induced from ${}^N\nabla$

i.e. the unique connection on $\Gamma(\phi^{-1}TN)$

such that,

for $\forall x \in M$, $\forall X \in T_xM$ $\forall W \in \Gamma(TN)$

$$\tilde{\nabla}_X(W\circ\phi) = {}^N\nabla_{\phi_*X}W$$

$\{e_i\}_{i=1}^m$:local orthonormal frame of (M,g)

$$V(x) := \frac{d}{dt}\phi_t(x)\Big|_{t=0}$$:variation vector field along ϕ

である。よって、次が成り立つ。

"ϕ が harmonic map である $\Leftrightarrow$ $\tau(\phi) = 0$ "

▼$\phi:(M,g) \to (N,h)$ smooth が harmonic map になる場合には次のような例がある。

<u>Example 0</u> 任意の定値写像 $\phi:(M,g) \to (N,h)$ は harmonic map である。

<u>Example 1</u> $\dim M = 1$ の場合
このとき M は S^1 または $\mathbb{R}$ の open set に standard metric をいれたものに、 isometric である。定義から容易に次のことが分かる。

ϕ:harmonic map $\Leftrightarrow$ ϕ:geodesic

<u>Example 2</u> $(N,h) = (\mathbb{R}$, standard metric) のとき

ϕ:harmonic map $\Leftrightarrow$ ϕ:harmonic function

<u>Example 3</u> ϕ:isometric minimal immersion $\Rightarrow$ ϕ:harmonic map
(cf. [E.L2] Theorem (2.25))

<u>Example 4</u> ϕ:Riemannian submersion の場合
(Riemannian submersion については、O'Neill の論文 [N] を見よ)
O'Neill の結果を用いれば、次のことは簡単な計算で導かれる。

ϕ:harmonic map $\Leftrightarrow$ $\phi^{-1}(\phi(x))$:minimal submanifold of M for $\forall x \in M$

<u>Example 5</u> ϕ:holomorphic map between compact Kaehler manifolds $\Rightarrow$ ϕ:harmonic
(cf. [E.L2] Corollary (8.17))

▼Examples 0 ～ 2 は、定義からすぐ分かる。

▼物理に出てくる σ-model や chiral fields は、主に dim $M = 2$ の場合の harmonic map のことである。

▼harmonic map の問題を幾つか挙げてみよう。

（１）いつ smooth homotopy class に harmonic map が存在するか。

（２）Riemann 多様体 $(M,g),(N,h)$ に対して、集合

$$\{\phi:(M,g) \to (N,h) \text{ harmonic}\}$$

の構造を決定せよ。

（３）ある map の集合を考えたときに、energy functional を minimize する harmonic map が存在するか、また存在するとき、どの harmonic map が energy functional を minimize するのか。与えられた harmonic map の近傍で energy functional はいかに振舞うか。

（４）energy functional の値分布

$$\{E(\phi) \mid \phi:(M,g) \to (N,h) \text{ harmonic}\} \subset [0,\infty)$$

を調べよ。（cf.[A.S]）

（５）数学の他の分野（Plateau 問題など）や物理への応用（Superstring theory など。このノートで物理に関係があるのは、主に Chapter 4 §2 の部分である。）

▼このノートでは、（２）、（３）の問題を中心に考える。

§ 2 The second variation formula

▼ $\phi:(M,g) \to (N,h)$ harmonic

ϕ_t:variation of ϕ with compact support and with $\phi_0=\phi$

に対し、 Energy の第２変分は次の式で与えられる。

（cf. [E.L2] Proposion (4.3)）

$$\frac{d^2}{dt^2}E(\phi_t)\Big|_{t=0} = \int_M h(J_\phi V,V)\, dv_g$$

但し、

$V \in \Gamma(\phi^{-1}TN)$:variation vector field

$$V(x) = \frac{d}{dt}\phi_t(x)\Big|_{t=0}$$

$J_\phi:\Gamma(\phi^{-1}TN)\to\Gamma(\phi^{-1}TN)$ Jacobi operator

$$J_\phi V := \bar{\Delta}_\phi - RV$$

$$\bar{\Delta}_\phi V := -\sum_{i=1}^m(\bar{\nabla}_{e_i}\bar{\nabla}_{e_i} - \bar{\nabla}_{\nabla_{e_i}e_i})V$$

:the rough Laplacian

$\{e_i\}_{i=1}^m$:local orthonormal frame of (M,g)

$$RV := \sum_{i=1}^m {}^N R(\phi_* e_i,V)\phi_* e_i$$

とする。

注意

ここで曲率テンソルは

$$R(X,Y)Z = -[\nabla_X,\nabla_Y]Z + \nabla_{[X,Y]}Z$$

で定義する。この定義は、[E.L2] (1.10) にあわせてある。小林－野水の本の定義（cf. [K.N] p133）とは符号が逆である。

§ 3 Definition of the index, nullity and stability

▼この§では、harmonic map に対して、２つの場合に分けて、上の題にある index, nullity, stability を定義する。

定義

Case(i) M:closed manifold のとき

以下の固有値問題を考える。

$$J_\phi V = \lambda V \qquad V \in \Gamma(\phi^{-1}TN)$$

J_ϕが ellipic operator であることと、M が compact であることより、この固有値問題は discrete spectrum を持ち、各固有値は、有限の重複度を持つ。

よって、固有値を小さいものから、重複度を込めて並べたものを

$$\mathrm{Spec}(J_\phi) = \{\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_i, \cdots\}$$
$$(\lambda_1 \leqq \lambda_2 \leqq \cdots \leqq \lambda_i \cdots)$$

として、

$\mathrm{Ind}(\phi)$:= 負の固有値達の重複度の和

$\mathrm{Null}(\phi) := \dim \ker(J_\phi)$

とおく。

このとき

ϕが stable ⇔ $\mathrm{Ind}_\Omega(\phi) = \mathrm{Null}_\Omega(\phi) = 0$

ϕが weakly stable ⇔ $\mathrm{Ind}(\phi) = 0$

ϕが unstable ⇔ ϕが weakly stable でない

と定義する。（このノートでは、主に weakly stable, unstable の場合を考察していく）

Case(ii) $\Omega \subset M$: bounded set

この場合は、次の固有値問題を考える。

$$J_\phi V = \lambda V \quad \text{in } \Omega$$
$$V = 0 \quad \text{on } \partial\Omega$$

これも、 discrete spectrum を持つ。よって Case(i) と同様にして

$$\mathrm{Ind}_\Omega(\phi) := \text{負の固有値の重複度の和}$$
$$\mathrm{Null}_\Omega(\phi) := \dim\ker(J_\phi)$$

とおく。更に

ϕ が stable on Ω $\Leftrightarrow$ $\mathrm{Ind}_\Omega(\phi) = \mathrm{Null}_\Omega(\phi) = 0$

ϕ が weakly stable on Ω $\Leftrightarrow$ $\mathrm{Ind}_\Omega(\phi) = 0$

ϕ が unstable on Ω $\Leftrightarrow$ ϕ が weakly stable on Ω でない

と定義する。

例

(N,h) が nonpositive sectional curvature を持てば

$\forall \phi : (M,g) \to (N,h)$:harmonic

は、 weakly stable である。

それは、J_ϕの形から、J_ϕの固有値は全て非負になることから分かる。

また、このとき他にϕと homotopic な harmonic map があれば、それとϕは energy が一定の geodesic homotopy で結べてしまうことが知られている。

(negative sectional curvature のときには、もうすこし強いことがいえる。 cf. [Ht])

§4 The eigenvalue problem of harmonic maps

▼この§では次の2つの問題を考える。その問題は、 harmonic map は、Spec(J_ϕ) でどの程度特徴づけられるかというものである。

問題A

2つの harmonic maps

$$\phi_1:(M_1,g_1)\to(N_1,h_1)$$
$$\phi_2:(M_2,g_2)\to(N_2,h_2)$$
$$M_i:\text{compact } (i=1,2)$$

を考える。今

$$\mathrm{Spec}(J_1) = \mathrm{Spec}(J_2)$$
$$J_i:\text{Jacobi operator of } \phi_i$$

とする。このとき、

$$\Phi_1 : (M_1,g_1) \to (M_2,g_2) \quad \text{isometry}$$
$$\Phi_2 : (N_1,g_1) \to (N_2,g_2) \quad \text{isometry}$$

が存在して、次の図式を可換にするか?

$$\begin{array}{ccc} \phi_1:(M_1,g_1) & \to & (N_1,h_1) \\ \Phi_1 \downarrow & & \Phi_2 \downarrow \\ \phi_2:(M_2,g_2) & \to & (N_2,h_2) \end{array}$$

問題B

§1 の Examples 0 ～ 5 の typical な harmonic map を $\mathrm{Spec}(J_\phi)$ で特徴づけよ。

▼しかし、一般的には問題Aに述べたこと は成立しない。それは次の例より分かる。

例

$$\phi:(M,g) \to (N,h):\mathrm{harmonic}$$
$$(N,h):\mathrm{flat\ torus}$$

とする。各点で1次独立なn(= dim N)個の平行な N 上のベクトル場 $\{X_i\}_{i=1}{}^n$ をとる。

$\forall V \in \Gamma(\phi^{-1}TN)$ は $f_i \in C^\infty(M)$ によって

$$V = \Sigma_{i=1}{}^n f_i \cdot \bar{X}_i$$

と表せる。但し $\bar{X}_i \in \Gamma(\phi^{-1}TN)$ を、

$$\bar{X}_i(x) = X_i(\phi(x))$$

と置いた。すると、

$$J_\phi V = \Sigma_{i=1}{}^n (\Delta_M f_i)\bar{X}_i$$
$$\Delta_M : \text{Laplace-Beltrami operator on } (M,g)$$

であるから、 M:compact とすると

$$\mathrm{Spec}(J_\phi) = n \times \mathrm{Spec}(\Delta_M)$$

即ち

$$\mathrm{Spec}(\Delta_M) = \{\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_i, \cdots\}$$
$$(\lambda_1 \leqq \lambda_2 \leqq \cdots \leqq \lambda_i \cdots)$$

とすると

$$\mathrm{Spec}(J_\phi) = \{\lambda_1, \lambda_1, \cdots, \lambda_1, \lambda_2, \lambda_2, \cdots, \lambda_2, \cdots\}$$
各 λ_i はn個づつ並ぶ

となる。よって、(N,h):flat torus の場合 Spec(J_ϕ) は $n = \dim N$ だけで決まってしまう。flat torus は、次元が同じでも、 isometric とは限らないので、これが問題Aに述べてあることが成立しない例を与える。

▼§1の Example 0 の場合には、問題Bに関し、次のような事が分かっている。

<u>命題</u> ([U3])

$\phi_1, \phi_2 : (M,g) \to (N,h)$:harmonic

$\mathrm{Spec}(J_1) = \mathrm{Spec}(J_2)$

J_i:Jacobi operator of ϕ_i

とせよ。このとき、以下の式が成り立つ。

$$\int_M \mathrm{Tr}_g(\phi_1{}^*({}^N\rho))dv_g = \int_M \mathrm{Tr}_g(\phi_2{}^*({}^N\rho))dv_g$$

${}^N\rho$:Ricci curvature tensor of N

▼この命題より

$$(N,h)\text{:Einstein with non-zero Einstein constant} \Rightarrow E(\phi_1) = E(\phi_2)$$

が分かる。特に、ϕ_1 が定値写像であれば、ϕ_2 も定値写像である。
すなわち、(N,h):Einstein with non-zero Einstein constant の場合には、ϕ が定値写像であることは、 $\mathrm{Spec}(J_\phi)$ で特徴づけられる。
ϕ が定値写像であるときには、

$$\mathrm{Spec}(J_\phi) = n \times \mathrm{Spec}(\Delta_M)$$

となっている。（これは、J_ϕ が $\Gamma(M,R^n) \cong \Gamma(\phi^{-1}TN)$ 上の普通の Laplacian になっているからである。）

▼ 他にも、問題Bに関して、次のような事が知られている。

<u>命題</u>（[U3]）

$\phi_1, \phi_2 : (M,g) \to (S^n(1), \text{standard metric})$ harmonic
Scalar curvature of $M \equiv$ constant
$\mathrm{Spec}(J_1) = \mathrm{Spec}(J_2)$
J_i:Jacobi operator of ϕ_i

とせよ。このとき、ϕ_1 が isometric minimal immersion であれば、ϕ_2 も isometric minimal immersion である。

<u>命題</u> ([U3])

$\phi_1, \phi_2 : (M, g) \to (P^n(\mathbb{C}), \text{Fubini-Study metric})$

Scalar curvature of $M \equiv$ constant

$\mathrm{Spec}(J_1) = \mathrm{Spec}(J_2)$

J_i : Jacobi operator of ϕ_i

とせよ。このときϕ_1 が holomorphic isometric minimal immersion であれば、ϕ_2 も holomorphic isometric minimal immersion である。

▼最後に問題を１つ出しておく。

<u>問題Ｃ</u>

Hopf fibration

$\phi : (S^{2n+1}(1), \text{standard metric}) \to (P^n(\mathbb{C}), \text{Fubini-Study metric})$

を $\mathrm{Spec}(J_\phi)$ で特徴づけよ。

Chapter 2 Generic properties of the index and nullity

▼この章でやりたい事は測地線に対する Morse 理論が一般の調和写像でどこまで成立するかを検討する事である。そこで、先ず§1 で簡単に測地線の場合の復習をし、§2 で一般の調和写像に対し問題設定をして、§3 でその問題を考察する。

§1 Morse theory for a geodesic and Morse-Schoenberg's comparison theorem

▼Morse index theorem を述べるために次の定義をする。
（Morse index theorem については、[Mi] を見よ）

定義

$$\phi : I = [0, 2\pi] \to (N, h) \quad \text{geodesic}$$
$$t \in (0, 2\pi)$$

に対し、

$\phi(t)$ が conjugate point for $p = \phi(0)$ である

$$\Leftrightarrow \ {}^{\exists} V \neq 0 : \text{a vector field along } \phi \text{ such that } J_\phi V = 0 \text{ on } (0, 2\pi), \quad V(0) = 0 \quad V(t) = 0$$

と定義する。更に $\phi(t)$:conjugate point for $p = \phi(0)$ に対し

$\phi(t)$の重複度(multiplicity)

$$:= \dim \{ V \mid \text{vector field along } \phi \text{ such that } J_\phi V = 0 \text{ on } (0, 2\pi), \quad V(0) = 0 \quad V(t) = 0 \}$$

とおく。

▼上の定義のもと Morse index theorem は次のようになる。

Morse index theorem

$\phi : I = [0, 2\pi] \to (N, h)$ geodesic

に対し

$\mathrm{Ind}_I(\phi)$ = 開区間 $(0, 2\pi)$ の conjugate point の数の重複度を込めた和

となる。ここで $\mathrm{Ind}_I(\phi)$ は ϕ : harmonic map としてのものである。
(see Chapter 1 § 3 Case(ii))

▼上の定理を用いると次の定理が出る。

Comparison theorem of Morse-Schoenberg ([G.K.M])

(N, h):Riemannian manifold

${}^N K \leqq a$

$\phi : I = [0, 2\pi] \to (N, h)$ geodesic

とせよ。このとき

$$\mathrm{Ind}_I(\phi) + \mathrm{Null}_I(\phi) \leqq (n-1)[L(\phi)\sqrt{a}/\pi]$$

となる。但し

^{N}K:(N,h) の断面曲率
[ ]:Gauss 記号
$L(\phi) := \phi$ の長さ

とした。

▼この定理は、ここでは証明しないが、次の２つの事から導かれる。

Comparison theorem

$S^n(1/\sqrt{a})$:半径 $1/\sqrt{a}$ の球 $\subset \mathbb{R}^{n+1}$
（これは 断面曲率 $\equiv$ a をもつ。）
(N,h):Riemannian manifold
$\phi : I = [0,2\pi] \to (N,h)$ geodesic
$\phi^- : I = [0,2\pi] \to S^n(1/\sqrt{a})$ geodesic

とする。このとき

$$\mathrm{Ind}_I(\phi) + \mathrm{Null}_I(\phi) \leqq \mathrm{Ind}_I(\phi^-) + \mathrm{Null}_I(\phi^-)$$

$S^n(1/\sqrt{a})$の場合

$\forall \phi^- : I \to S^n(1/\sqrt{a})$ geodesic

に対し、

$$\mathrm{Ind}_I(\phi^-) + \mathrm{Null}_I(\phi^-) = (n-1)[L(\phi)\sqrt{a}/\pi]$$

と評価される。

▼$S^n(1/\sqrt{a})$の場合をより詳しく述べると、

$$L(\phi) < \pi/\sqrt{a} \Rightarrow \mathrm{Ind}_I(\phi^-) = \mathrm{Null}_I(\phi^-) = 0$$

$$L(\phi) = \pi/\sqrt{a} \Rightarrow \mathrm{Ind}_I(\phi^-) = 0,\ \mathrm{Null}_I(\phi^-) = n-1$$

$$\pi/\sqrt{a} < L(\phi) < 2\pi/\sqrt{a}$$
$$\Rightarrow \mathrm{Ind}_I(\phi^-) = n-1,\ \mathrm{Null}_I(\phi^-) = n-1$$

………

となっている。

§2 Morse theory for a harmonic map

▼§1 に述べたことをまとめると、測地線に関し、次のことが分かる。

(i) もし ϕ:geodesic の長さが $\pi/\sqrt{a}$ より小さければ、

$$\mathrm{Ind}_I(\phi) = \mathrm{Null}_I(\phi) = 0$$

即ち、 ϕ は I 上 stable である。

(ii)もし ϕ:geodesic の長さが十分大きければ、$\mathrm{Ind}_I(\phi)$、$\mathrm{Null}_I(\phi)$ は、(N,h) の断面曲率の上限と ϕ の長さで評価される。

▼これらと同様のことが、一般の harmonic map に対しても成立するか? という問題を考えてみる。

(i) (M,g):Riemannian manifold
$\Omega \subset M$:十分小さな領域

ならば、$\phi:\Omega \to (N,h)$:harmonic に対し

$$\mathrm{Ind}_\Omega(\phi) = \mathrm{Null}_\Omega(\phi) = 0$$

であるか?

(ii) $\phi:\Omega \to (N,h)$:harmonic に対し、$\mathrm{Ind}_\Omega(\phi)$、$\mathrm{Null}_\Omega(\phi)$ は (N,h) の断面曲率と energy

$$E_\Omega(\phi) = \int_\Omega e(\phi)dv_g$$

で評価できるか。

▼ ϕ :isometric minimal immersion の場合に対応する（i）の問題に対しては、[B.D],[H],[Mo],[Tan],[Ko] の結果が知られている。

▼更に、上の comparison theorem が調和写像の場合に拡張できないか? という問題も考えられる。

▼もし、粗い評価で良ければ、（i),(ii）は次の§3 のようにして遂行できる。

§3 The heat equation method due to Berard and Gallot and its application

▼この§では、

(M,g):compact Riemanniann manifold

E:vector bundle over (M,g) with fiber metric $\langle\ ,\ \rangle$

∇:compatible connection for E

i.e. $X\langle s_1, s_2\rangle = \langle \nabla_X s_1, s_2\rangle + \langle s_1, \nabla_X s_2\rangle$ for $\forall s_1, s_2 \in \Gamma(E)$

として、§2の問題をより一般的に、以下のように表される $\Gamma(E)$ 上の operator J にまで拡張して考察していく。

$$J = \bar{\Delta} - R$$

但し

$$\bar{\Delta} := -\sum_{i=1}^{m}(\nabla_{e_i}\nabla_{e_i} - \nabla_{\nabla_{e_i} e_i}) \quad \text{rough Laplacian}$$

$\{e_i\}_{i=1}^{m}$:local orthonormal frame of (M,g)

$R \in \Gamma(Hom(E,E))$ として、R は $\forall s \in \Gamma(E)$ に対し、

$(Rs)(x) = R_x(s(x)) \quad$ for $\forall x \in M$

と作用する。

例

上のように

$$J = \bar{\Delta} - R$$

の形で表される operator には次のものがある。

(1) A^p := M上の C^∞ p-form 全体

として、

Δ := A^p に作用する Laplacian

(2) (1) の場合のうちで、$A^0 = C^\infty(M)$ の場合。

つまり、普通の Laplacian Δ_0

$$\Delta_0 = \delta df = -\Sigma_{i=1}{}^m(e_i{}^2 - \nabla_{\nabla_{e_i} e_i})f \quad \text{for } f \in C^\infty(M)$$

$\{e_i\}_{i=1}{}^m$:local orthonormal frame of (M,g)

(3) J_ϕ:harmonic map ϕ に対する Jacobi operator

(4) $\overline{\Delta}$:rough Laplacian （i.e. $R \equiv 0$ の場合）

▼ M:compact で、J、特に上の (1) - (4) の例は elliptic であるから、J, $\overline{\Delta}$、Δ_0 の spectrum は discrete である。J, $\overline{\Delta}$、Δ_0 のそれぞれに対応する固有値を重複度を込めて

$$J \rightarrow \tilde{\lambda}_1 \leqq \tilde{\lambda}_2 \leqq \cdots \leqq \tilde{\lambda}_i \cdots$$

$$\overline{\Delta} \rightarrow \overline{\lambda}_1 \leqq \overline{\lambda}_2 \leqq \cdots \leqq \overline{\lambda}_i \cdots$$

$$\Delta_0 \rightarrow 0 = \lambda_0 < \lambda_1 \leqq \lambda_2 \leqq \cdots$$

とおき、それらに対応する zeta functions を

$$\tilde{Z}(t) = \sum_{i=1}^{\infty} e^{-t\tilde{\lambda}_i}$$

$$\overline{Z}(t) = \sum_{i=1}^{\infty} e^{-t\overline{\lambda}_i}$$

$$Z(t) = \sum_{i=1}^{\infty} e^{-t\lambda_i}$$

とおく。

<u>補題1</u>

$$r = \operatorname*{Max}_{x \in M} \operatorname*{Max}_{\substack{s \in E_x \\ 0 \neq s}} \frac{\langle R_x s, s\rangle}{\langle s, s\rangle}$$

とおけば、

$$\tilde{Z}(t) \leqq e^{tr}\bar{Z}(t) \qquad (t > 0)$$

となる。

▼この補題は、 Min-Max principle を用いて $\tilde{\lambda}_i \geqq \bar{\lambda}_i - r$ を示すことにより、 容易に証明される。

▼もう１つ補題を引用しておこう。

<u>補題2</u> (Kato's inequality [H.S.U])

$$\bar{Z}(t) \leqq pZ(t) \qquad (t > 0)$$

$$p := \operatorname{rank} E$$

▼この２つの補題を合わせる事により、 次の命題がえられる。

<u>命題</u> ([B.G])

(1) $\tilde{Z}(t) \leqq pe^{tr}Z(t) \qquad (t>0)$

(2) Jの非正の固有値の重複度の和 $\leqq \tilde{Z}(t) \qquad (t>0)$

<u>証明</u>

(1)補題1,2 より明らか

(2)

$$左辺 \leqq \sum_{\tilde{\lambda}_i \leqq 0} e^{-t\tilde{\lambda}_i} \leqq \sum_{\tilde{\lambda}_i \leqq 0} e^{-t\tilde{\lambda}_i} + \sum_{\lambda_i > 0} e^{-t\tilde{\lambda}_i}$$

$$= \tilde{Z}(t)$$

<u>q.e.d.</u>

▼この命題には、いろいろ応用がある。例えば 1-form に作用する Laplacian Δを考える。この時 Weitzenboeck formula よりΔは

$$\Delta = \bar{\Delta} + \rho$$

$\bar{\Delta}$:rough Laplacian

$\rho(V) := -\sum_{i=1}^{n} R(e_i, V)e_i$ Ricci transformation

という形をしている。(cf [E.L2] p11 (1.30)Theorem)

$$r_{min} = \min_{x \in M} \min_{\substack{V \in T_x M \\ V \neq 0}} \frac{g(\rho(V), V)}{g(V,V)}$$

とおく。

$$Z(t) \to 1 \quad \text{as } t \to +\infty$$

であることに注意して

$$J = \Delta \ , R = -\rho$$

に対して命題を適用すれば、次がえられる。

<u>定理</u> (Bochner)

(i) $r_{min} \geqq 0 \Rightarrow b_1(M) \leqq m = \dim M$

(ii) $r_{min} > 0 \Rightarrow b_1(M) = 0$

▼証明は、 Hodge Theorem と命題を組み合わせれば出来る。
（Hodge Theorem については、 [Wa] Chapter 6 を見よ）

<u>注意</u>

$r_{min} < 0$ の場合でも、$b_1(M)$ を上から評価することが出来る。(cf. [B.G])

▼次に harmonic map の場合を考える。

(M,g):compact Riemanniann manifold

(N,h):Riemannian manifold

$\phi : (M,g) \to (N,h)$ harmonic

$$r_\phi = \underset{x \in M}{\mathrm{Max}} \ \underset{\substack{V \in T_y M \\ V \neq 0 \\ y = \phi(x)}}{\mathrm{Max}} \ \frac{h(\sum_{i=1}^{m} {}^{N}R(\phi_* e_i, V)\phi_* e_i, V)}{h(V,V)}$$

とすると、命題より、

$$\mathrm{Ind}(\phi) + \mathrm{Null}(\phi) \leqq n e^{t \cdot r_\phi} Z(t) \qquad (t > 0) \qquad (\#)$$

$$n = \dim N = \phi^{-1}TN \text{ の fiber の次元}$$

となる。

r_ϕ は、 ${}^N K \leqq a \quad (a > 0)$ のとき、

$$E^\infty(\phi) = \underset{x \in M}{\mathrm{Max}} \; e(\phi)$$

とおけば、

$$r_\phi \leqq 2aE^\infty(\phi)$$

と評価される。（簡単な計算である。）

これより（#）の式は、§2 の（ii）そのものではないが、それに近い結果を与えていることが分かる。

▼次に、［B.G］による命題を $\Omega \subset M$ bounded の場合に拡張する。
$J, \overline{\Delta}, \Delta$ は前と同様として

$\lambda_i(\Omega)$ は固有値問題

$$JV = \lambda V \quad \text{in } \Omega$$
$$V = 0 \quad \text{on } \partial\Omega$$

の第 i 固有値とする。

$\overline{\lambda}_i(\Omega)$は固有値問題

$$\overline{\Delta} V = \lambda V \qquad \text{in } \Omega$$
$$V = 0 \qquad \text{on } \partial\Omega$$

の第 i 固有値とする。

$\lambda_i(\Omega)$は固有値問題

$$\Delta V = \lambda V \qquad \text{in } \Omega$$
$$V = 0 \qquad \text{on } \partial\Omega$$

の第 i 固有値として、（３つの場合とも０固有値は除いて考えている）

$$\tilde{Z}_\Omega(t) = \sum_{i=1}^{\infty} e^{-t\tilde{\lambda}_i(\Omega)}$$

$$\overline{Z}_\Omega(t) = \sum_{i=1}^{\infty} e^{-t\overline{\lambda}_i(\Omega)}$$

$$Z_\Omega(t) = \sum_{i=1}^{\infty} e^{-t\lambda_i(\Omega)}$$

$$r = \max_{x \in M} \max_{\substack{s \in E_x \\ 0 \neq s}} \frac{\langle R_x s, s\rangle}{\langle s, s\rangle}$$

とおく。このとき前と同様にして、次が成立する。

命題

(1) $\tilde{Z}_{\Omega}(t) \leqq p e^{tr} Z_{\Omega}(t) \qquad (t > 0)$

(2) Jの非正の固有値の重複度の和 $\leqq \tilde{Z}_{\Omega}(t) \qquad (t > 0)$

▼更に、

$$r_{\Omega,\phi} = \operatorname*{Max}_{x \in \overline{\Omega}} \ \operatorname*{Max}_{\substack{V \in T_y M \\ V \neq 0 \\ y = \phi(x)}} \frac{h(\sum_{i=1}^{m} {}^N R(\phi_* e_i, V)\phi_* e_i, V)}{h(V,V)}$$

とおくと、やはり前と同様にして次の命題がが成立する。

命題

$\phi : \Omega \to (N,h)$ harmonic

に対し

$$\mathrm{Ind}(\phi) + \mathrm{Null}(\phi) \leqq n e^{t \cdot r_{\Omega,\phi}} Z(t) \qquad (t > 0) \qquad (*)$$

$n = \dim N = \phi^{-1}TN$ の fiber の次元

▼このとき、Δの固有値問題の第1固有値の重複度は1である。即ち

$0 < \lambda_1(\Omega) < \lambda_2(\Omega) \leqq \cdots$

であるから、上の２つの命題を用いて次が言える。

<u>定理</u>

(i) $\lambda_1(\Omega) \geqq r_{\Omega,\phi} \Rightarrow \mathrm{Null}_{\Omega}(\phi) \leqq n$

$\mathrm{Ind}_{\Omega}(\phi) = 0$

(ii) $\lambda_1(\Omega) > r_{\Omega,\phi} \Rightarrow \mathrm{Null}_{\Omega}(\phi) = \mathrm{Ind}_{\Omega}(\phi) = 0$

よって特にこのときϕは stable となる。

<u>証明</u>

(i) $\lambda_1(\Omega) \geqq r_{\Omega,\phi}$とせよ。このとき、 $\tilde{\lambda}_1(\Omega) < 0$ とすると、 $t \to \infty$ としたとき

$$\tilde{Z}_{\Omega}(t) \leqq p e^{tr} Z_{\Omega}(t)$$

が成り立たなくなるので（右辺より左辺の方が早く大きくなる）、これは上の命題に矛盾する。よって $\tilde{\lambda}_1(\Omega) \geqq 0$ となる。即ち、 $\mathrm{Ind}_{\Omega}(\phi) = 0$ となる。後は (*) において、 $t \to \infty$ としてやれば、 $\lambda_1(\Omega) \geqq r_{\Omega,\phi}$ より、(*)の右辺の極限は n 以下となり、左辺が t によらないことより結論が従う。

(ii) (*) において、 $t \to \infty$ としてやれば、 $\lambda_1(\Omega) > r_{\Omega,\phi}$ の仮定より、右辺が 0 に幾らでも近付くことより従う。

<u>q.e.d.</u>

▼更に、

$$\lambda_i(\Omega) \geqq C(M,g) \cdot \mathrm{Vol}(\Omega)^{-2/m} \cdot i^{-2/m}$$

$$i = 1,2,\cdots$$

という評価（cf.[Y1] p 22）を使って、次を得る。

<u>定理</u> （[U2]）

$\Omega \subset M^m$ bounded set

$\phi : \Omega \to (N,h)$ harmonic

に対して、

$$\mathrm{Ind}_{\Omega}(\phi) + \mathrm{Null}_{\Omega}(\phi) \leqq n \cdot \frac{\Gamma(\frac{m}{2}+1)e^{m/2}}{(\frac{m}{2})^{m/2}} \cdot D^{m/2}$$

となる。但し、

$$D = r_{\Omega,\phi} \cdot C(M,g)^{-1} \cdot \mathrm{Vol}(\Omega)^{2/m}$$

$$n = \dim N = \phi^{-1}TN \text{ の fiber の次元}$$

とおいた。
特に

$$\Omega \subset M = (\mathbb{R}^2, g_0) \quad g_0\text{:standard metric}$$

$$^{\exists} a > 0 \text{ such that } {}^N K \leqq a$$

の場合には、

$$E^{\infty}(\Omega, \phi) = \underset{x \in \overline{\Omega}}{\mathrm{Max}}\, e(\phi)$$

とおけば、

$$\mathrm{Ind}_{\Omega}(\phi) + \mathrm{Null}_{\Omega}(\phi) \leqq \frac{nea}{2\pi} \mathrm{Area}(\Omega) E^{\infty}(\Omega, \phi)$$

となる.

▼この定理の“特に”の部分により、 Ω を十分小さくとれば、

$$\mathrm{Ind}_{\Omega}(\phi) = \mathrm{Null}_{\Omega}(\phi) = 0$$

である。よって、これは §2 (i) に対する1つの解答になっている。

▼上の定理は、最後の命題に λ_i の評価を代入し、適当な t をとることにより証明される。後半は $(M,g) = (\mathbb{R}^2, g_0)$ のときには、 λ_i の評価に出てくる定数が

$$C(\mathbb{R}^m, g_0) = 4\pi^2 \omega_m^{-2/m}$$

$$\omega_m = \frac{\pi^{m/2}}{\Gamma\left(\frac{m}{2}+1\right)}$$

で与えられ、特に

$$C(\mathbb{R}^2, g_0) = 4\pi$$

となることより従う。

<u>問題0</u>

定理中の $\mathrm{Area}(\Omega)E^{\infty}(\Omega, \phi)$ を $E(\Omega, \phi)$ で置き換えられないだろうか。

Chapter 3 Stability of several harmonic maps

▼§1で compact Kaehler 多様体の間の holomorphic map は weakly stable であるという定理から導かれるいくつかの事柄を示す。そして、特に map の行き先が $P^n(\mathbb{C})$ である場合に、"weakly stable harmonic map は holomorphic か？"という問題に付いて考察する。
§2では、 closed Riemannian manifold に対して、weakly stable, unstable という概念を定義して、 Einstein manifold, homogeneous space の場合にその概念がどうなっているかの結果と、それらに関連した問題をいくつか紹介する。

§1 Weak stability about holomorphic maps

▼この§は定理などの引用が多いので、この§に限って、定理などに番号を付ける。
▼次の事は、良く知られている。
"compact Kaehler 多様体の間の holomorphic map は wekly stable である"
これを定理の形で述べると次のようになる。

定理(3.1.1) (Lichnerowicz [E.L2] Part I §8)
(i) (weak stability)

(M,g):compact Kaehler manifold

(N,h):Kaehler manifold

$\phi:(M,g) \to (N,h)$ holomorphic

とせよ。この時、ϕ はそれを含む homotopy class で energy minimizing である。すなわち、

$^\forall \phi_t:\phi$ の smooth 1-parameter family with $\phi_0=\phi$

に対し

$$E(\phi) \leqq E(\phi_t) \quad \text{for } ^\forall t$$

となる。

(ii)(rigidity)

(i)の仮定に加え、

ϕ_t:harmonic for $^\forall t$

ならば

ϕ_t:<u>holomorphic</u> for $^\forall t$

となる。

<u>注意</u>

定理中で holomorphic を全て anti-holomorphic としても成り立つ。

▼この定理の無限小版も知られている。

<u>定理</u>(3.1.2) ([S],[I],[U4])

(M,g):compact Kaehler manifold

(N,h):Kaehler manifold

$\phi:(M,g) \to (N,h)$ holomorphic

とせよ。このとき、

$$\int_M h(J_\phi V,V)\, dv_g = \frac{1}{2}\int_M h(DV,DV)\, dv_g$$

となる。但し、 $V \in \Gamma(\phi^{-1}TN)$ に対し $DV \in \Gamma(\phi^{-1}TN\otimes T^*M)$ を

$$DV(X) := \tilde{\nabla}_{JX} V - J\tilde{\nabla}_X V$$

$\tilde{\nabla}$:connection induced from ${}^N\nabla$

J:almost complex structure on TM or on $\phi^{-1}TN$

(同じ記号で表す)

で定める。

▼この定理の証明はしない。

▼この定理(3.1.2)より、定理の仮定を満たすϕに対して

(1)ϕは weakly stable である。

(2)$\mathrm{Ker}(J_\phi) \cong H^0(\phi^{-1}\mathbb{T}N)$

$\mathbb{T}N$:holomorphic vector bundle of N

$H^0(\phi^{-1}\mathbb{T}N)$:$\phi^{-1}\mathbb{T}N$ の holomorphic section 全体

が成り立つ事が分かる。

上の (1),(2) の証明

(1)積分の右辺の形より明らか。

(2)定理(3.1.2) より

$$\mathrm{Ker}(J_\phi) = \{V \in \Gamma(\phi^{-1}\mathbb{T}N) \mid DV = 0\}$$

となる。（J_ϕによる固有空間分解を考えよ）

$$DV = 0 \Leftrightarrow \nabla_{JX} V = J\nabla_X V \quad \forall X \in \Gamma(TM)$$

よって $V \in \mathrm{Ker}(J_\phi)$ に対し

$$V^- = \frac{1}{2}(V - \sqrt{-1}\cdot JV)$$

と置けば、 $V^- \in \Gamma(\phi^{-1}\mathbb{T}N)$ である。 N:Kaehler 多様体 であるから、J:complex structure が平行となるので V^- が holomorphic section になることが分かる。この $\mathrm{Ker}(J_\phi)$ から $H^0(\phi^{-1}\mathbb{T}N)$ への対応は１対１であり、逆対

応も、同様にしてできるので、全射である事が分かり、結論が従う。

q.e.d.

▼これらの定理の応用を幾つか紹介しておこう。

系(3.1.3)

(M,g):compact Kaehler manifold

とすると、 id:(M,g) → (M,g) 恒等写像 は weakly stable である。

このとき、Jacobi operator は

$$J_{id} = \bar{\Delta} - \rho$$

$\bar{\Delta}$:rough Laplacian

ρ :Ricci transformation

であり、このとき

$$\mathrm{Ker}(J_{id}) \cong A(M)$$

A(M):holomorphic vector fields on M 全体

となる。

▼これは、 Lichnerowicz によって既に示されている。(cf. [Li](5.2.89))
証明は定理(3.1.2) に当てはめれば、すぐ得られる。

▼もう1つ定理(3.1.2)の応用をあげておく。

系(3.1.4) (Obata [U2])

(M,g):compact Kaehler manifold

$\mathrm{Ric}_M \geqq \alpha > 0$

とせよ。このとき

$$\lambda_1(M,g) \geq 2\alpha \qquad \lambda_1(M,g)\text{:Laplacian の non-zero 第1固有値}$$

となる。更にここで等号が成立すれば、 $A(M) \neq 0$ となる。

証明

$$\Delta f = \lambda_1(M,g)f$$

となる $f \neq 0$ をとり

$$V = \mathrm{grad}\ f$$

とおく。

$$b:TM \to T^*M$$
$$\#:T^*M \to TM$$

を canonical bundle isomorphism とする。（musical isomorphism と言う cf.[E.L2] p4）。これらは connection preserving な bundle map である。

$$df = V^b$$

である。 Weitzenboeck formula （cf. [E.L2] (1.30)）より

$$\begin{aligned}\Delta df &= -\ \mathrm{trace}\ \nabla^2 df - \Sigma_{i=1}^m (R(e_i,\cdot)df)(e_i)\\ &= -\ \mathrm{trace}\ \nabla^2 df + \Sigma_{i=1}^m df({}^M R(e_i,\cdot)e_i)\end{aligned}$$

$R, {}^M R$:curvature of T^*M and TM respectively

一方、

$$\Delta df = d\Delta f = \lambda_1 df$$

であるから、

$$-\lambda_1 V^\flat = -\ \mathrm{trace}\ \nabla^2 V^\flat + \Sigma_{i=1}{}^m\ V^\flat({}^M R(e_i,\cdot)e_i)$$
$$= -\ (\mathrm{trace}\ \nabla^2 V)^\flat + \Sigma_{i=1}{}^m\ g(({}^M R(e_i,\cdot)e_i,V)$$
$$= -\ (\mathrm{trace}\ \nabla^2 V)^\flat + \Sigma_{i=1}{}^m\ g(({}^M R(e_i,V)e_i,\cdot)$$
$$= -\ (\overline{\triangle} V)^\flat + \Sigma_{i=1}{}^m\ (({}^M R(e_i,V)e_i)^\flat$$
$$\therefore\quad \lambda_1 V = \overline{\triangle} V + \rho(V)$$
$$\overline{\triangle} V = \lambda_1 V - \rho(V)$$

一方、系(3.1.3) より id:M → M が wekly stable であるから、

$$0 \leqq \int_M \langle J_{id}V, V\rangle dv_g = \int_M \langle \overline{\triangle} V - \rho(V), V\rangle dv_g$$

$$= \int_M \langle \lambda_1 V - 2\rho(V), V\rangle dv_g$$

$$\leqq (\lambda_1 - 2\alpha)\int_M \langle V, V\rangle dv_g$$

$V = \mathrm{grad}\ f \neq 0$ であるから、

$$\lambda_1 - 2\alpha \geqq 0$$

となる。この式で等号が成立すれば、

$$\int_M \langle J_{id}V, V\rangle dv_g = 0$$

となるので、$0 \neq V \in A(M)$ となる。

q.e.d.

▼ $(M,g),(N,h)$:compact Kaehler manifolds

$\phi:(M,g) \to (N,h)$ harmonic

この設定の下で、今までやったことと逆の問題を考える。

問題1

（イ）ϕが weakly stable

（ロ）ϕは、その homotopy class で energy minimizing

この（イ）又は（ロ）がなりたつとせよ。このときϕは holomorphic 又は、anti-hlomorphic か?

▼しかし、これは一般には成立しない。ここでその反例を与えておく。

例1 ([L.S])

$$(M,g) = (P^1(\mathbb{C}), g_0) \quad g_0\text{:Fubini-Study metric}$$

$$(N,h) = (P^1(\mathbb{C}) \times P^1(\mathbb{C}), g_0 \times g_0)$$

とする。

$$\sigma : P^1(\mathbb{C}) \to P^1(\mathbb{C})$$

を、$P^1(\mathbb{C})$ を round sphere と思った時の anti-podal map とせよ。そして

$$\phi:(M,g) \to (N,h)$$

$$\phi(x) = (x, \sigma(x))$$

とおく。このとき

Claim ϕ:energy minimizing

（∵）

$$\psi:(M,g) \to (N,h)$$

$$\psi(x) = (x,x)$$

と定めれば、ψは holomorphic だから energy minimizing である。

$$\Phi:(N,h) \to (N,h)$$

$$\Phi(x,y) = (x, \sigma(y))$$

とすれば、Φは isometry である。よって、$\phi = \Phi \circ \psi$ は energy minimizing である。 q.e.d.

ところが、 ϕ は明らかに ± holomorphic (i.e. holomorphic or anti-holomorphic) ではない。

▼以下、 g_0:Fubini-Study metric of $P^n(\mathbb{C})$ とする。

▼問題1には反例があったが、次は成立すると思われていた。

<u>問題2</u> ([E.L2] p69 (3.4))

(M,g):compact Kaehler manifold

$\phi:(M,g) \to (P^n(\mathbb{C}),g_0)$ weakly stable harmonic map

ならば、 ϕ は ± holomorphic か?

▼これが成立すると思われていた理由は、次の定理にあった。

<u>定理</u> ([L.S])

$(P^n(\mathbb{C}),g_0)$ の stable な minimal submanifold は complex manifold である。
(但し、ここでの stable は area functional についてである。)

▼だが、問題2にも反例がある。

<u>例2</u>

$$\Phi:P^1(\mathbb{C})\times P^1(\mathbb{C}) \to P^3(\mathbb{C}) \quad \text{Segre imbedding}$$

$$([z_0,z_1],[w_0,w_1]) \mapsto [z_0w_0,z_0w_1,z_1w_0,z_1w_1]$$

とする。これは holomorphic であるから、 energy minimizing である。故に

$$\phi:P^1(\mathbb{C})\times P^1(\mathbb{C}) \to P^3(\mathbb{C})$$

$$\phi = \Phi\circ(\mathrm{id}\times\sigma)$$

とすれば、ϕ は energy minimizing ではあるが ± holomorphic ではない。

▼しかしある場合には、問題1、2が肯定的に解決されたり、問題1、2に近いことが言えたりしている。以下、それに関した結果を幾つか挙げる。

<u>定理</u>　([X], [Siu])

$\phi:(S^2,g) \to (P^n(\mathbb{C}),g_0)$ weakly stable harmonic map

ならば、ϕ は ± holomorphic である。

<u>注意</u>

(S^2,g) の g は、任意の Riemannian metric でよい。

((S^2,g) からの写像が weakly stable であることや、± holomorphic であるは、conformal diffeo では変わらない性質であり、S^2 上の metric は互いに、conformal diffeo で移り合うことに注意せよ。)

▼その他の結果を述べるため、次の定義をする。

<u>定義</u>

(M,g):compact kaehler manifold

(N,h):Riemann manifold

に対し

$\phi:(M,g) \to (N,h)$ <u>pluri-harmonic</u>

$\Leftrightarrow \quad \alpha(X,Y) + \alpha(JX,JY) = 0$

$\quad\quad$ for $\forall X,Y \in T_xM,\ x \in M$

但し、

J:complex structure of M

$$\alpha(X^-,Y^-) = \tilde{\nabla}_{X^-}\phi_*(Y^-) - \phi_*(\nabla_{X^-}Y^-)$$

for $X^-, Y^- \in \Gamma(TM)$

:ϕに関する第２基本形式

$\tilde{\nabla}$:= the connection on $\phi^{-1}TN$ induced from ${}^N\nabla$

∇ := the Levi-Civita connection of M

▼pluri-harmonic map に関するいくつかの性質を述べる。証明は容易である。

(1)ϕ:pluri-harmonic $\Rightarrow$ ϕ:harmonic

(2)(N,h):compact Kaehler manifold

ϕ:(M,g) $\to$ (N,h) holomorphic

$\Rightarrow$ ϕ:pluri-harmonic

(3)$\dim_{\mathbb{C}} M = 1$ ならば、全ての harmonic map は pluri-harmonic である。

(4)(M,g):compact kaehler manifold

(M',g'):compact complex manifold

(N,h):Riemanniann manifold

ϕ:(M,g) $\to$ (N,h) pluri-harmonic

ψ:(M',g') $\to$ (M,g) holomorphic

$\Rightarrow$

$\phi \circ \psi$:(M',g') $\to$ (N,h) pluri-harmonic

▼問題１、２に関連して、最近、大仁田氏によって示されたのは次の定理である。

<u>定理</u> (Ohnita [Oh2])

(N,h):Riemannian manifold

ϕ:($P^n(\mathbb{C})$,g_0) $\to$ (N,h) weakly stable harmonic map

$\Rightarrow$ ϕ:pluri-harmonic

▼次の結果も最近のものである。

<u>系</u>　(Bando,Ohnita[Oh2])

$\phi:(P^n(\mathbb{C}),g_0)\to(P^n(\mathbb{C}),g_0)$　weakly stable harmonic map

$\Rightarrow$　$\phi:\pm$ holomorphic

<u>注意1</u>

大仁田氏の定理は 写像の定義域である $(P^n(\mathbb{C}),g_0)$ を rank $\geqq$ 2 の対称空間に置き換えられない。（例2が反例になっている。）

<u>注意2</u>

坂東、大仁田氏の系について、仮定が minimal isometric immersion の場合は宇田川氏によって得られていた。

§ 2 Weak stability about Einstein manifolds

▼この§では、 closed Riemannian manifold に対して、weakly stable, unstable という概念を定義して、 Einstein manifold, homogeneous space の場合にその概念がどうなっているかの結果と、それらに関連した問題をいくつか紹介する。

▼以下 (M,g):closed Riemann 多様体 とする。

$id:(M,g) \to (M,g)$ identity map

は harmonic map であり、その Jacobi operator は

$J_{id} = \bar{\Delta} - \rho : \Gamma(TM) \to \Gamma(TM)$

であった（see Chapter 3 §1 p34）。次の定義は、長野正氏による。

定義

(1) (M,g):weakly stable

$\Leftrightarrow$ $id:(M,g) \to (M,g)$ identity map が harmonic map として weakly stable である。

(2) (M,g):unstable

$\Leftrightarrow$ (M,g) が wekly stable でない。

記号

(1)$\mathcal{M}$:= the isometry classes of all compact Riemannian manifolds

(2)$\mathcal{M}_s$:= $\{[(M,g)] \in \mathcal{M} \mid (M,g)\text{:weakly stable}\}$

(3)$\mathcal{M}_u$:= $\{[(M,g)] \in \mathcal{M} \mid (M,g)\text{:unstable}\}$

▼ここで

$\mathcal{M} = \mathcal{M}_s \cup \mathcal{M}_u$ (disjoint union)

である。次の問題について考察する。

<u>問題3</u>

$\mathcal{M}_s$ 又は $\mathcal{M}_u$ を決定せよ。

▼今までに、この問題に関して分かっている事を述べると

(i) 定義より $\mathcal{M}_u$ は $\mathcal{M}$ の適当な位相に関し開集合である。

(例えば、C^∞-topology に関して開集合である。)

(ii) $\{[(M,g)] \in \mathcal{M} \mid (M,g):\mathrm{Kaehler}\} \subset \mathcal{M}_s$

(Chapter 3 §3 の定理(3.1.1) を見よ)

(iii) $\{[(M,g)] \in \mathcal{M} \mid \mathrm{Ric}_M \leqq 0\} \subset \mathcal{M}_s$

(これは、J_{id} の形より明らか)

▼しかし、$\mathcal{M}$ 全体で考えるのは難しいので、対象を Einstein manifold に制限して問題を考えてみる。その場合、次の結果が知られている。

<u>定理</u> (R.T.Smith [Sm 2])

(M,g):compact Einstein manifold with Einstein constant α

(i.e. $\rho = \alpha g$)

このとき、次の(i)、(ii)が成立する。

(i) (M,g):weakly stable

$\Leftrightarrow \lambda_1(M,g) \geqq 2\alpha$

$\lambda_1(M,g)$:the first non-zero eigenvalue of Laplacian

(ii) $\mathrm{Null}(id) = \dim \mathrm{Ker}(J_{id})$

$= \dim i(M,g) + m(2\alpha)$

$i(M,g) := \{X \in \Gamma(TM) \mid \text{Killing vector field}\}$

$m(2\alpha) := \dim \{f \in C^\infty(M) \mid \Delta f = 2\alpha f\}$

▼対称空間については、次のことが知られている。

<u>命題</u> ([Oh1],[U1])

(M,g):connected and simply connected isotropy irreducible compact Riemannian symmetric space

このような (M,g) は 、常に Einstein である。このとき、(M,g) に対し次が成り立つ

(M,g):unstable ⇔ (M,g) は次のいづれかである。

(1)S^n ($n \geqq 3$)

(2)$G_{p,q}(\mathbb{H}) = Sp(p+q)/Sp(p)\times Sp(q)$ ($p \geqq q \geqq 1$)

(3)$P^2(Cay) = F_4/Spin(9)$

(4)E_6/F_4

(5)$SU(2p+2)/Sp(p+1)$ ($p \geqq 2$)

(6)$SU(p+1)$ ($p \geqq 2$)

(7)$Sp(p)$ ($p \geqq 2$)

<u>定理</u> (Ohnita [Oh1])

(M,g):isotropy irreducible compact symmetric space

とせよ。このとき、次の３つは同値である。

(i) (M,g):unstable

(ii) $^\forall$(N,h):Riemannian manifold

$^\forall \phi$:(M,g) → (N,h):non-constant harmonic map

を持ってきたとき、ϕは unstable である。

(iii) $^\forall$(M',g'):Riemannian manifold

$^\forall \psi$:(M',g') → (M,g):non-constant harmonic map

を持ってきたとき、ψは unstable である。

▼最後に幾つか問題をあげておく。

<u>問題４</u>

isotropy irreducible compact homogeneous Riemannian manifolds を stable なものと unstable なものに分類せよ。

<u>注意</u>

この様な Riemannian manifold は Wolf によって完全に分類されている。（cf. [W1],[W2]）

問題４の多様体の中で、 symmetric ではない unstable manifold が見つけられれば、大変面白いと思う。

▼isotropy 表現が reducible のときには、次の Ziller による結果が有る事を注意しておこう。(cf. [Z])

“ $\exists\, g : S^{4n+3} = Sp(n+1)/Sp(n)$ 上の homogeneous 計量

such that

(i) S^{4n+3} 上の canonical metric とは isometric ではない。

(ii) $id : (S^{4n+3}, g) \to (S^{4n+3}, g)$ <u>unstable</u>”

（Matsuzawa による結果（[M]）を使って、この Einstein 計量が unstable であることが確かめられる。）

<u>問題５</u>　(Lawson-Simons [L.S])

(M,g):compact Riemannian manifold

$\frac{1}{4} < {}^{M}K \leq 1$　(i.e. M:$\frac{1}{4}$-pinched)

ならば、

$\forall (M', g'), \forall (N, h)$:Riemann manifolds

$\forall \psi : (M', g') \to (M, g)$:non-constant harmonic map

$\forall \phi : (M, g) \to (N, h)$:non-constant harmonic map

を持ってきたとき、ψ や ϕ は unstable であるか。

(浦川-harmonic map)

注意 The Sphere Theorem により、問題5の 仮定を満たす(M,g) の universal covering は球面に homeo である。（The Sphere Theorem に付いては、 [K1] Theorem 2.8.5 をみよ。）

▼これに対する部分的回答は Aminov,Kawai,Howard らによって得られている。(cf.[A],[How],[K])

▼最後に、講演後の J.L.Kazdan 氏の質問を問題として述べておく

問題6

M:compact manifold

で、

$\exists\, g_1, g_2$:Riemannian metrics on M

such that (M,g_1):stable

(M,g_2):unstable

となるような M が存在するか?

すなわち、 unstable, stable の概念は diffeo で不変か?

Chapter 4 Constructions and classification problems of harmonic mappings

▼この章では、 harmonic map を具体的に構成することや、 harmonic map を parametrize することに関して考察する。

§1 Eigenmaps into spheres

▼harmonic map の構成に関して基本的なのは次の定理である。

定理 (Eells-Sampson [E.S])

$(M,g),(N,h)$:compact Riemann manifolds

${}^{N}K \leqq 0$

とせよ。このとき

$\forall\, \psi: M \to N$ smooth map

$\exists\, \phi:(M,g) \to (N,h)$ harmonic map

such that (i) $\phi \in [\psi]$ ($[\psi]$:ψを含む homotopy class)

(ii) ϕは、$[\psi]$ で energy minimizing

▼ある熱方程式を解くことにより、定理にあるϕの存在がいえる。

▼(N,h) の曲率の条件が無い場合、次のような問題がある。

問題7 ([Y2] No.112)

(S^n,g):standard unit sphere

$\pi_i(S^n) = [S^i,S^n]$:S^n の i-th homotopy 群

とする。このとき、$\pi_i(S^n)$ の各元を

$\phi:S^i \to S^n$ harmonic

で代表することができるか。

▼更に次のような問題も考えられる。

<u>問題８</u>　(Eells)
(S^1,g) から (S^n,g) への全ての harmonic map を分類せよ。

▼問題７に関しては、次の R.T. Smith の結果がある。
“$n \leqq 7$ ならば、$\pi_n(S^n)$ の任意の元は、 harmonic map で代表する事ができる。”
問題７、８に attack するには、次の結果が、essential である。

<u>定理</u>　(Takahashi [T],[T.D])

(M',g'):Riemann manifold

(S^n,g):standard sphere in $\mathbb{R}^{n+1}$

として、　$i:(S^n,g) \to \mathbb{R}^{n+1}$　をその imbedding とする。
この時、

$\forall \phi:(M',g') \to (S^n,g)$　smooth map

に対し

$$\Phi(x) := i \circ \phi(x) = (\Phi_0(x),\Phi_1(x),\cdots,\Phi_n(x))$$

とおけば、

ϕ:harmonic

$\Leftrightarrow$

$$\Delta\Phi_i = 2e(\phi)\Phi_i \qquad i = 0,1,\cdots,n$$

但し　Δ:Laplacian of (M',g')

▼ϕが harmonic であることと同値である次の式

$$\tau(\phi) = 0$$

を計算すれば、定理の式が得られる。

▼この定理より、$\phi:(M',g')\to(S^n,g)$ harmonic が与えられたとき、次の2つの場合に分けることが意味を持つ。

(i) $e(\phi)$:constant on M'

(ii) $e(\phi)$:non-constant on M'

以下このノートでは、(i) の場合を考える。

((ii) の場合には、[Sm1] に部分的結果がある。)

(i) を満たす harmonic map $\phi:(M',g')\to(S^n,g)$ を <u>eigenmap</u> と呼ぶ。この時 ϕ は、Δ の固有値 $2e(\phi)$ の固有関数である。更に次の定理が知られている。(定理に出てくる言葉を、定理の後に定義した。)

<u>定理</u> (do Carmo - Wallach [D.W], D'Ambra - G.Toth [T.D])

(M',g'):isotropy irreducible compact oriented homogeneous Riemannian manifold

(S^n,g):n-dimensional standard sphere

この時

(1) $\phi:(M',g')\to(S^n,g)$ harmonic with constant energy density (i.e. $e(\phi)\equiv$ constant on M')

ならば、(M',g') の Laplacian のある固有値 λ_k に対して、

$$2e(\phi)=\lambda_k$$

である。

(2) λ_k:Δ の固有値 を1つ固定する。

このとき、

$$\{\phi:(M',g')\to(S^n,g)\mid \text{full, harmonic, } 2e(\phi)\equiv\lambda_k,\ n:\text{自然数}\}$$

は finite dimensional vector space の compact convex body L_k で parametrize される。

(n も動くことに注意せよ)

▼上の定理の (2) で出てきた言葉の定義をする。

定義

$\phi : M' \to S^n$ smooth が full である

$\Leftrightarrow$

S': hypersphere of (S^n, g)

(i.e. totally geodesic $(n-1)$-dimesional sphere)

で、

$\phi(M') \subset S'$

となる S' が存在しない。

定義

$M' = G/K$, λ_k: as in the theorem

$V_k := \{f \in C^\infty(M') \mid \Delta f = \lambda_k f\}$

とする。($\dim V_k < \infty$ であることに注意せよ。)

$v_0 \in V_k$ such that

$s \cdot v_0 = v_0 \quad$ for $\forall s \in K$

$\| v_0 \| = 1$

但し

$s \cdot v_0(x) = v_0(sx) \quad$ for $\forall x \in M', \forall s \in G$

$\| \ \|$: L^2-norm

(この様な v_0 は必ず存在する。)

となる v_0 を固定して、次のように定義する。

$S^2(V_k)$: symmetric square of V_k

$v_0{}^2$: symmetric square of v_0

$W_k := \{c \in S^2(V_k) \mid c \perp g \cdot v_0{}^2 \text{ for } \forall g \in G\}$

$L_k := \{c \in W^k \mid c + I \geq 0\}$

但し

$I \in S^2(V_k)$:identity element

$\perp$:L^2-norm に関する直交

（L_k は W_k の convex body になっており、 $\dim W_k < \infty$ である。）

▼１つコメントしておくと、どの様な λ_k:k-th eigenvalue of Δ $(k \geqq 1)$ に対して $\dim W_k > 0$ となるか、という問題は、調和写像の剛性と関連して興味ある問題である。

（ 定理より、 $\dim W_k > 0$ であれば、定理の仮定を満たす $2e(\phi) = \lambda_k$ なる full harmonic map は $L_k \neq \{0\}$ で parametrize され、 infinitesimally rigid ではない。）

（cf. [U5]）

§2 Non-linear σ-models

▼dim M = 2 の場合の harmonic map の存在については、次の定理が良く知られている。

定理 (Sacks - Uhlenbeck [S.U])

(M,g):closed Riemannian manifold, $\dim M = 2$

(N,h):Riemannian manifold, $\pi_2(N) = \{0\}$

とする。この時

$\forall \psi : M \to N$ smooth map

$\exists \phi : (M,g) \to (N,h)$ harmonic

such that

(i) $\phi \in [\psi]$ ($[\psi]$:ψを含む homotopy class)

(ii) ϕは、$[\psi]$ で energy minimizing

▼以下 $(M,g) = (S^2,g)$:standard 2-sphere として考える。

(i)Calabi constructions $S^2 \to S^n$

▼Calabi の定理を紹介するために、notation 等を決めておく。

先ず

$$I_p = SO(2p+1)/U(p)$$

とおく。I_pは、$\mathbb{C}^{2p+1}$ 内の p 次元 isotropic subspaces 全体の成す空間と同一視される。そして I_p には hermite 対称空間としての metric を入れておく。このとき、I_p には compact Kaehler manifold の構造が入る。

$$\pi : I_p \to S^{2p} = SO(2p+1) / SO(2p)$$

を、自然な包含射像

$$U(p) \to SO(2p) : X + \sqrt{-1}\,Y \mapsto \begin{bmatrix} X & Y \\ -Y & X \end{bmatrix}$$

$$X, Y \in M(n, \mathbb{R})$$

から誘導される射影とする。

これは Riemannian submersion となっている。（cf. [N]）

(M', g'):Riemanniann manifold としたとき

$\psi : (M', g') \to I_p$ が <u>horizontal</u> である。

$\Leftrightarrow$ $\psi_*(T_x M') \subset H_{\psi(x)}$ for $x \in M'$

但し、H_y:Horizontal space of Riemannian subersion π

for $y \in I_p$

ときめる。

<u>定理</u> (Calabi [C1],[C2])

$\phi : (S^2, g) \to (S^n, g)$:full harmonic

このとき、次の２つが成立する。

(i) $n = 2p$ (i.e. n:even)

(ii) $^\exists \psi : (S^2, g) \to I_p$ holomorphic horizontal map

such that $\phi = \pi \circ \psi$

▼証明については、[L] Proposition 1.2, Theorem 3.8 を見よ。

▼次の問題をあげておこう。

<u>問題9</u>　(Verdier [V])

S^2 から I_p への全ての holomorphic horizontal map を求めよ。

<u>(ii)Twistor constructions　$S^2 \to P^n(\mathbb{C})$</u>

▼これに関しては、定理を1つあげておく。並んでいる名前の内、最初の4人は物理学者で、後の3人が幾何学者である。

<u>定理</u>　(Din-Zakrewski, Glasev-Stora, Burns-Eells-Wood [E.W])

次の2つの集合の間には1対1対応がある。

$$\{\phi \mid (S^2, g) \to (P^n(\mathbb{C}), g_0) \text{ full, harmonic}\}$$

$$\Leftrightarrow \quad \{(f, r) \mid f: S^2 \to P^n(\mathbb{C}) \text{ full, holomorphic}$$

$$0 \leqq r \leqq n \text{ integer}\}$$

(g_0:Fubini-Study metric)

<u>(iii)Chiral fields　$S^2 \to U(n)$</u>

▼　$$U(n) := \{X \in M(n, \mathbb{C}) \mid {}^t\bar{X} \cdot X = I\}$$

として、U(n) 上に

$$\langle X, Y \rangle := \mathrm{Trace}\ (X \cdot {}^t\bar{Y})$$

$$\text{for } X, Y \in u(n) = \{X \in M(n, \mathbb{C}) \mid {}^t\bar{X} + X = 0\}$$

より誘導される両側不変な metric h(,) を入れておく。

$$g_0 = dx^2 + dy^2 \quad \text{metric on } \mathbb{R}^2$$

$$\Omega \subset \mathbb{R}^2 \quad \text{bounded}$$

とする。このとき、　$\phi:(\Omega, g_0) \to (U(n), h)$　の energy は

$$E(\phi, \Omega) = \iint_\Omega \left\{ \left| \phi^{-1}\frac{\partial \phi}{\partial x} \right|^2 + \left| \phi^{-1}\frac{\partial \phi}{\partial y} \right|^2 \right\} dxdy$$

但し　$\partial \phi / \partial x$　は行列を成分毎に微分したもの

$|\quad|$　は h で定まる norm

と表される。この式より第一変分を計算して,

$\phi:(\Omega, g_0) \to (U(n), h)$　smooth

が harmonic map である。

$$\Leftrightarrow \quad \frac{\partial}{\partial x}\left(\phi^{-1}\frac{\partial \phi}{\partial x}\right) + \frac{\partial}{\partial y}\left(\phi^{-1}\frac{\partial \phi}{\partial y}\right) = 0 \quad \text{on } \Omega \qquad (*)$$

ということが分かる。次の補題は、(S^2, g) から $(U(n), h)$ への harmonic map の分類は、$(\mathbb{R}^2, g_0)$ から $(U(n), h)$ への harmonic map の分類に帰結される事を示している。証明には、Sacks-Uhlenbeck の結果（[S.U] Theorem 3.6）を用いる。

<u>補題</u>

$\forall \phi:(\mathbb{R}^2, g_0) \to (U(n), h)$　smooth

が、(*)を満たし

$$E(\phi, \mathbb{R}^2) < \infty$$

であれば、ϕ は (S^2, g) から $(U(n), h)$ への harmonic map へ、(S^2, g)から$(\mathbb{R}^2, g_0)$への立体射影を通じて、一意に拡張される。逆に

$\phi:(S^2, g) \to (U(n), h)$　harmonic

が与えられた時に

$\mu:(\mathbb{R}^2, g_0) \to (S^2, g)$ inverse of stereographic projection

とすれば、μ は conformal だから

$\phi\circ\mu:(\mathbb{R}^2, g_0) \to (U(n), h)$ harmonic

となる。

▼ここで

$$A_x = \phi^{-1}\frac{\partial\phi}{\partial x}, \quad A_y = \phi^{-1}\frac{\partial\phi}{\partial y} \qquad (\star)$$

とおけば、A_x, A_y は $u(n)$-valued function on Ω となる。

そして、(*) は次の形となる。

$$\frac{\partial}{\partial x}A_x + \frac{\partial}{\partial y}A_y = 0 \quad \text{on } \Omega \qquad (**)$$

更に、この微分方程式(**)の積分可能条件は

$$\frac{\partial}{\partial x}A_y - \frac{\partial}{\partial y}A_x + [A_x, A_y] = 0 \qquad (***)$$

となる。このとき，次のことが分かる．（cf. [Yo] §61）

“$\forall A_x$, $\forall A_y$: $u(n)$-valued functions on Ω satisfying (**),(***)

ならば、任意に与えられた $(x_0, y_0) \in \Omega$, $U_0 \in \Omega$ に対して，

$\exists\,\phi:(\Omega, g_0) \to (U(n), h)$ harmonic

such that

$\phi(x_0, y_0) = U_0$

が存在して、A_x , A_y は、ϕ により（$\star$）で表される。”

従って問題は (**), (***) を満たす A_x, A_y を求めることに帰着された.

▼ここで, 方程式 (**), (***) の幾何的意味について述べよう.
Ω 上の u(n) 値1次微分形式 $A = A\,dx + A\,dy$ を考え, Ω 上の自明なベクトル束 $E = \Omega \times \mathbb{C}^n$ を考える. そこで E 上に次のような接続

$$\nabla = d + A$$
$$\text{i.e.} \quad \nabla_X \sigma = X\sigma + A(X)\sigma$$
$$\text{for } \sigma \in \Gamma(E),\ X \in \Gamma(T\Omega)$$

を与える. 但し, $A(X)\sigma$ は, $\Gamma(E) = \Omega$ 上の $\mathbb{C}^n$ 値 C^∞ 関数全体 とみなし $A(X)$ を行列として σ に作用させたものである.

さて, δ を (Ω, g_0) の余微分 (i.e. dual of exterior derivative) とすれば,

$$(**) \Leftrightarrow \delta A = 0$$

となっている。

他方, ∇ に対する curvature $\bar{R}$ を

$$\bar{R}_{X,Y} = \nabla_{[X,Y]} - [\nabla_X, \nabla_Y] \quad \text{for } X, Y \in \Gamma(T\Omega)$$

と定義したとき,

$$(***) \Leftrightarrow R = 0$$
i.e. ∇ は平坦な接続
(従って, 自明な Yang-Mills 接続である.)

となっている. (いづれも簡単な計算で確かめられる.)

<u>注意</u>

(**),(***) を満たす A_x , A_y は物理で chiral field と呼ばれているものである。この様な A_x, A_y を全て見いだすことは，大変面白い問題と思われる．これに関して， K.Uhlenbeck の興味あるプレプリントがあるが，まだ完全には解決されていない．

▼最後に問題を出しておこう。

<u>問題１０</u>

(S^2,g) から、 Hermite 対称空間 (N,h) への harmonic map の表現を捜せ。（(i),(ii) のように、(N,h) の適当な Twistor 空間を作り、 Twistor construction せよ。）

<u>注意</u>

この問題に関しては，(N,h) が複素グラスマン多様体の場合には， Burstall の結果（cf. [B]）がある．また， Eells-Salamon の論文（cf. [E.Sal]）も参考になる．

BIBLIOGRAPHY

[A] J. A. Aminov, On the instability of minimal surfaces in an n-dimensional Riemannian space of positive curvature, Math. USSR Sb., 100(1976),400-419

[A.S] T. Adachi and T. Sunada, Energy spectrum of certain harmonic mappings, Compos. Math., 56(1985),153-170

[B] F. E. Burstall, A twistor description of harmonic maps of a 2-sphere into a Grassmannian, Math. Ann. 274(1986),61-74

[B.D] J. L. Barbosa and M. P. do Carmo, Stability of minimal surfaces and eigenvalues of the Laplacian, Math. Zeit., 173(1980), 13-28

[B.G] P. Berard and S. Gallot, Inequalites isoperimetriques pur l'equation de la chaleur et application a l'estimation de quelques invariants, Seminaire Goulaouic-Meyer-Schwartz, No.15(1983)

[C1] E. Calabi, Minimal immersions of surfaces in Euclidean spheres, J. Diff. Geom., 1(1967),111-125

[C2] E. Calabi, Quelques applications de l'analyse complexe aux surfaces d'aire minima, Topics in complex manifolds, Univ. Montreal, (1967),59-81

[D.W] M. P. do Carmo and N. R. Wallach, Minimal immersions of spheres into spheres, Ann. Math., 93(1971), 43-62

[E.L1] J. Eells and L. Lemaire, A report on harmonic maps, Bull. London Math. Soc. 10(1978),1-68

[E.L2] J. Eells and L. Lemaire, Selected topics in harmonic maps, CBMS Reg. Conf. Series, No.50.(1983)

[E.Sal] J. Eells and S. Salamon, Twistorial construction of harmonic maps of surfaces into four-manifolds, to appear in Ann. Scuola Norm. Pisa (1986)

[E.S] J. Eells and J. H. Sampson, Harmonic Mappings of Riemannian Manifolds, Amer. J. Math., 86(1964),109-160

[E.W] J. Eells and J. C. Wood, Harmonic maps from surfaces to complex projective spaces, Adv. in Math., 49(1983),217-263

[G.K.M] D. Gromoll, W. Klingengerg and W. Meyer, Riemannsche Geometrie im Grossen, Lecture Notes in Math. 55, Springer, New York, (1968)

[Ht] P. Hartman, On Homotopic Harmonic Maps, Can. J. Math. 19 (1967),673-687

[H] D. Hoffmann, Lower bounds of the first eigenvalue of the Laplacian of Riemannian submanifolds, Minimal submanifolds and geodesics, Kaigai Publ. (1978),61-73

[How] R. Howard, The nonexistence of stable submanifolds, varifolds and harmonic maps in sufficiently pinched simply connected Riemannian manifold, Michigan Math. J. 32(1985),321-334

[H.S.U] H. Hess, R. Schrader and D. A. Uhlenbrock, Kato's inequality and the spectral distribution of Laplacians on compact Riemannian manifolds, J. Differential Geom. 15(1980),27-37

[I] T. Ishihara, The index of a holomorphic mapping and the index theorem, Proc. Amer. Math, Soc., 66(1977),169-174

[K] S. Kawai, On the instability of a minimal surface in a 4-manifold whose curvature lies in the interval (1/4,1], Publ. R.I.M.S., Kyoto Univ.,18(1982),1067-1075

[Kl] W. Klingenberg, Riemannian Geometry, Studies in Mathematics, Walter de Gruyter, (1982)

[K.N] S. Kobayashi and K. Nomizu, Foundations of Differential geometry, vol. I, Interscience, New York, (1963)

[Ko] M. Koiso, On the stability of minimal surfaces in $\mathbb{R}^3$, J. Math. Soc. Japan, 36(1984),523-541

[L] H. B. Lawson, Surfaces minimales et la construction de Calabi-Penrose, Seminare Bourbaki, Asterisque, 121-122(1985)197-210

[Li] A. Lichnerowicz, Geometrie des groupes de transformations, Dunod, (1958)
Geometry of groups of transformations, translated and edited by M. Cole, Noordhoff International Publishing, (1977)

[L.S] H. B. Lawson and J. Simons, On stable currents and their application to global problems in real and complex geometry, Ann. Math., 98(1973)427-325

[M] T. Matsuzawa, Einstein metrics and fibered Riemannian structures, Kodai Math. J., 6(1983),340-345

[Mi] J. Milnor, Morse Theory, Ann. Math. Studies 51, Princeton Univ. Press, (1963)

[Mo] H. Mori, Notes on the stability of minimal submanifolds of Riemannian manifolds, Yokohama Math. J. 25(1977),9-15

[N] B. O'Neill, The fundamental equations for a submersion, Michigan Math. J. 13(1966),459-469

[Oh1] Y. Ohnita, Stability of harmonic maps and standard minimal immersions, Tohoku Math. Journ.,38(1986),259-267

[Oh2] Y. Ohnita, Pluriharmonicity of stable harmonic mappings, a preprint

[S] T. Sunada, Holomorphic mappings into compact quotient of symmetric bounded domains, Nagoya Math. J., 64(1976),159-175

[Siu] Y. T. Siu, Some remaarks on the complex analyticity of harmonic maps, Southeast Asian Bull. Math., 3(1979),240-253

[Sm1] R. T. Smith, Harmonic Mappings of Spheres, Amer. J. Math., 97(1975),364-385

[Sm2] R. T. Smith, The second variation formula for harmonic mappings, Proc. Amer. Math. Soc., 47(1975),229-236

[S.U] J. Sacks and K. Uhlenbeck, The existence of minimal immersion of 2-Spheres, Ann. Math., 113(1981),1-24

[T] T. Takahashi, Minimal immersions of Riemannian manifolds, J. Math. Soc. Japan, 18(1966),380-385

[Tan] S. Tanno, Remarks on Sobolev inequalities and stability of minimal submanifolds, J. Math. Soc. Japan, 35(1983),323-329

[T.D] G. Toth and G. D'Ambra, Parameter space for harmonic maps of constant energy density into spheres, Geometriae Dedicata, 17(1984),61-67

[U1] H. Urakawa, The first eigenvalue of the Laplacian for a positively curved homogeneous Riemannian manifold, Compos. Math. 59(1986),57-71

[U2] H. Urakawa, Stability of harmonic maps and eigenvalues of Laplacian, to appear in Trans. Amer. Math. Soc.

[U3] H. Urakawa, Spectral geometry of the second variation operator of Laplacian, a preprint

[U4] H. Urakawa, Stability of harmonic maps and eigenvalues of Laplacian, Lecture Note in Math. 1201, Curvature and Topology of Rieamannian Manifolds, Proceedings, Katata 1985, 285-307

[U5] H. Urakawa, Minimal immersions of projective spaces into spheres, Tsukuba J. Math., (1985)

[V] J. L. Verdier, 2-dimensional σ-models and harmonic maps from S^2 to S^{2n}, Lecture Notes in Physics, Springer, 180(1982),136-141

[Wa] F. Warner, Foundations of Differentiable Manifolds and Lie Groups, Graduate Texts in Mathematics 94, Springer

[W1] J. A. Wolf, The Geometry and structure of Isotropy irreducible Homogeneous Spaces, Acta Math., 120(1968),59-148

[W2] J. A. Wolf, Correction to The Geomtry and Structure of Isotropy Irreducible Homogeneous Spaces, Acta Math., 152(1984), 141-142

[X] Y. L. Xin, On stable harmonic maps and their application, Proc. Beijing Symp. Diff. Geom. Diff. Eq., 3(1980),1611-1619

[Y1] S. T. Yau, Survey on partial differential equations in differential geometry, Ann. Math. Studies 102, Princeton, (1982),3-71

[Y2] S. Y. Yau, Problem section, Ann. Math. Studies 102, Princeton, (1982),669-706

[Yo] K. Yoshida, 微分方程式の解法（第２版），岩波書店，(1978)

[Z] W. Ziller, Homogeneous Einstein metrics on spheres and projective spaces, Math. Ann., 59(1982),351-358