数理解析研究所講究録
第600巻 1986年 117-134

Minimum principle and manifolds of nonnegative Ricci curvature

横浜市立大・文理　市田良輔（Ryosuke Ichida）

§0. 序

本稿の目的は，ある楕円型偏微分方程式に対する最小値原理を応用して非負リッチ曲率をもつリーマン多様体の幾何学的構造を調べることにある。ここで扱われる偏微分方程式は，ある領域において，与えられた連続関数を平均曲率にもつ nonparametric な曲面を求める問題に現われる2階の準線形楕円型偏微分方程式である。§1において，ある幾何学的な条件の下で，“最小値原理”（補題1.1）を示す。証明は本質的には，よく知られたE. Hopf の方法による。§2以降は，この補題の非負リッチ曲率をもつリーマン多様体への応用である。§2においては，非負リッチ曲率をもつ連結，完備なリーマン多様体M上である関数 α_M を定義し，この関数を使って，Mの幾何学的性質を調べる。補題1.1の最初の応用として，定理2.1を示す。この定理は，Toponogov と

Chengによる最大直径定理の一つの拡張と見なせる。定理2.1の証明と全く同じ方法で，最大直径定理の別証を与えることが出来る。よく知られたMyersの定理（[19]）は，これまで色々な観点からの拡張がなされている。（[1]，[2]，[5]，[7]，[9]，[24]）。先の関数α_Mを使って，我々の観点からのMyersの定理の拡張を与える（定理2.3，2.4，2.5）。§3においては，正曲率をもつ，単連結でないコンパクトリーマン多様体Mに対し，Mの単射半径とα_Mの関係について述べる。そして，実射影空間の一つの特徴付けを述べる（定理3.2）。§4において，境界をもつ非負リッチ曲率のリーマン多様体への補題1.1の応用を述べる。

§1．最小値原理

本稿の基本的な道具となる次の補題について述べる。

補題1.1．Mをリッチ曲率Ric_Mが非負であるn次元（$n \geqq 2$）連結リーマン多様体，W_1，W_2をMにおける埋め込まれた超曲面で，それぞれ，単位法ベクトル場ξ_1，ξ_2をもっているとする。H_1，H_2をそれぞれW_1，W_2のξ_1，ξ_2方向に関する平均曲率とする（$n=2$の場合は，測地的曲率を意味する）。W_1，W_2は以下の条件をみたす共通点$P \in M$を

もっと仮定する：(1) $\xi_1(p)=\xi_2(p)$，(2) W_2 における p のある近傍が W_1 に関して ξ_1 方向と同じ側に位置する。更に，$H_1 \geqq 0$ on W_1，$H_2 \leqq 0$ on W_2 を仮定する。このとき，p のある近傍において，W_1 と W_2 は一致する。

証明。$p \in W_1 \cap W_2$ を補題の仮定をみたす点とする。W_1 における p の周りの局所座標近傍系 $(U,(x_1,\cdots,x_{n-1}))$ と正数 δ を適当に取れば，$\exp:\perp_\delta(U) \longrightarrow M$ が embedding になる。ここに，$\perp_\delta(U)=\{r\xi_1(q);\ q\in U,\ |r|<\delta\}$。$\exp(\perp_\delta(U))$ 上の U までの符号付きの距離関数を t とする（$t(\exp_q(r\xi_1(q)))=r$，ξ_1 方向に対して正とする）。$\exp(\perp_\delta(U))$ 上の局所座標系 $(x_1,\cdots,x_{n-1},t)$ に関し，Gauss の補題より，M の線素は，$ds^2=\sum_{i,j=1}^{n-1} g_{ij}(x,t)\,dx_i\,dx_j+dt^2$ と表わせる。仮定の条件から，（必要なら，U を小さく取り直し（U は連結とする））W_2 は p の近くで，

$$V=\{\exp_q u(q)\xi_1(q);\ q\in U\},\ u\in C^\infty(U),\ u(p)=0,$$
$$0\leqq u<\delta,$$

と表わせる。W_2 の ξ_2 方向に関する平均曲率 H_2 を u を使って書き表わし，整理すると次の2階準線形楕円型偏微分方程式を得る（$n=2$ の場合は常微分方程式）：

$$\sum_{i,j=1}^{n-1} A_{ij}(x,u,\nabla u)\,u_{ij}=B(x,u,\nabla u)$$

$$\nabla u = (u_1, \cdots, u_{n-1}),\quad u_i = \partial u/\partial x_i,\quad u_{ij} = \partial^2 u/\partial x_i \partial x_j$$

ここで,

$$B(x, u(x), \nabla u(x)) = B(x, u(x), 0) + \sum_{i=1}^{n-1} b_i(x) u_i(x),\quad b_i \in C^0(U)$$

と書き表わし，仮定の条件：$Ric_M \geqq 0$，$H_1 \geqq 0$，$H_2 \leqq 0$ を使えば，$B(x, u(x), 0) \leqq 0$ が示せる。このとき，uは線形楕円型偏微分方程式 $L(v) = \sum_{i,j=1}^{n-1} a_{ij}(x) v_{ij} - \sum_{i=1}^{n-1} b_i(x) v_i \equiv 0$，$a_{ij}(x) = A_{ij}(x, u(x), \nabla u(x))$，の supersolution である。$u$は$U$の内点$p$で最小値0を取るから，$u \equiv 0$ in U が結論される。よって，$V = U$となり，補題の主張が示された。

§2．非負リッチ曲率をもつ多様体

補題1.1の非負リッチ曲率をもつ，連結，完備なリーマン多様体への応用を述べる。

Mをn次元$(n \geqq 2)$連結，完備なリーマン多様体とする。$p \in M$と正数tに対し，$B(p, t)$，$S(p, t)$ をそれぞれ，Mにおける中心がp，半径tの開球，距離球面，$B(0_p, t)$，$S(0_p, t)$ をそれぞれ，接空間T_pMにおける中心が原点0_pで，半径tの開球，$(n-1)$次元球面とする。$\tilde{C}_M(p)$をT_pMにおけるpの tangent cut locus，$C_M(p)$をMにおけるpの cut locus を表わすとする。$p \in M$と$X \in S(0_p, 1)$に対し，$c_{p,X} : [0, \infty) \longrightarrow M$を$p$を出発する初期方向が$X$である測地

線とする。$c_{p,X}(t)$, $t>0$, が $c_{p,X}$ に沿う p に対する第1共役点であるとき、この t を $r(p, X)$ で表わす。$c_{p,X}$ が p に対する共役点を含まないとき、$r(p, X)=+\infty$ とおく。今、$0<t<r(p, X)$ となる t を取る。中心が p, 半径 t の測地的球面 $S_p(t)=\exp_p(S(0_p, t))$ は $c_{p,X}(t)$ のある近傍において正則な超曲面である。$H_p(X, t)$ を $c_{p,X}(t)$ における $S_p(t)$ の速度ベクトル $c'_{p,X}(t)$ 方向に関する平均曲率とする。次の補題が成立つ。

補題 2.1. $p\in M$ と $X\in S(0_p, 1)$ に対し、

$$(n-1)\frac{d}{dt}H_p(X,t) = Ric_M(c'_{p,X}(t)) + \|A_t\|^2$$

$(0<t<r(p, X))$ が成立つ。ここに、$Ric_M(c'_{p,X}(t))$ は $c'_{p,X}(t)$ 方向のリッチ曲率、$\|A_t\|$ は $c_{p,X}(t)$ における $S_p(t)$ の第2基本形式の長さである。

指数形式の比較定理を使うことにより、次の補題が容易に示される。

補題 2.2. $p\in M$, $X\in S(0_p, 1)$ に対し、$Ric_M(c'_{p,X}(t)) \geqq (n-1)\lambda^2$, $0\leqq t\leqq r(p, X)$, λ は正定数、を仮定する。このとき、$H_p(X, t)\geqq -\lambda\cot\lambda t$, $0<t<\min\{r(p, X),$

$\pi/\lambda\}$ が成立つ。等号が成立すれば，断面曲率 K_M について，$K_M(\sigma(r))=\lambda^2$，$0\leqq r\leqq t$，が成立する。ここに，$\sigma(r)$ は $C'_{p,X}(r)$ を含む接空間 $T_{C_{p,X}(r)}M$ における任意の2次元平面である。

さて，$p\in M$，$X\in S(0_p,1)$ を取る。$\alpha_M(p,X)\in\mathbb{R}^+\cup\{+\infty\}$ を次で定義する（$\mathbb{R}^+$ はすべての正数全体のなす集合）：

$\alpha_M(p,X)=\inf\{t>0\,;\,H_p(X,t)\geqq 0\}$ if $\exists r$ $(0<r<r(p,X))$ s.t $H_p(X,r)\geqq 0$,

$\alpha_M(p,X)=r(p,X)$ if $H_p(X,t)<0$ $(\forall t\in(0,r(p,X)))$

$\alpha_M : M\longrightarrow\mathbb{R}^+\cup\{+\infty\}$ を $\alpha_M(p)=\sup\{\alpha_M(p,X)\,;\,X\in S(0_p,1)\}$ で定義する。そして，$\alpha(M)=\sup\alpha_M$ とおく。

$\pi:\tilde{M}\longrightarrow M$ を M のリーマン被覆多様体とする。定義より，$\alpha_{\tilde{M}}=\alpha_M\circ\pi$ が分る。補題2.1，2.2を使って，次の命題を得る。

命題2.1．M を n 次元 $(n\geqq 2)$ 連結，完備なリーマン多様体とする。M のリッチ曲率 Ric_M について，$Ric_M\geqq(n-1)\lambda^2$，（λ は正定数）を仮定する。このとき，$\alpha(M)\leqq\pi/2\lambda$ が成立する。

定理2.1. Mを非負リッチ曲率をもつn次元($n \geqq 2$)連結，完備なリーマン多様体とする。$\alpha_M(p)+\alpha_M(q) \leqq d_M(p,q)$，$d_M(p,q)$は$p$と$q$の距離，が成立つ様な$M$の異なる2点$p$，$q$が存在すると仮定する。このとき，$M$は$S^n$(標準的な$n$次元球面)に同相である。

証明。p，$q \in M$を$\alpha_M(p)+\alpha_M(q) \leqq d_M(p,q)$をみたす異なる2点とする。$M$の完備性と$\exp_p$の連続性により，$A=\{X \in S(0_p,1);\ \exp_p dX=q\}$，$d=d_M(p,q)$，は$S(0_p,1)$における空でない閉集合である。以下，$A$が$S(0_p,1)$における開集合であることを示す。$X$を$A$の任意の点とする。$c_{p,X}|[0,d]$は$p$から$q$への最短測地線分であるから，$r(p,X) \geqq d$である。$2r=d-\alpha_M(p)-\alpha_M(q)$，$r_1=\alpha_M(p)+r$，$r_2=\alpha_M(q)+r$とおく。$S(0_p,1)$における$X$の近傍$U_X$を$\exp_p|CU_X$，$CU_X=\{tZ;\ 0 \leqq t \leqq r_1,\ Z \in U_X\}$，が微分同型になるように取れる。$\alpha_M(p)$の定義と補題2.1を使って，超曲面$W_1=\exp_p(r_1U_X)$，$r_1U_X=\{r_1Z;\ Z \in U_X\}$，の単位法ベクトル場$\Xi_1$，$\Xi_1(c_{p,Z}(r_1))=c'_{p,Z}(r_1)$，方向に関する平均曲率$H_1$は非負であることが分る。同様に，$S(0_q,1)$における$Y=-c'_{p,X}(d)$の近傍$U_Y$を$W_2=\exp_q(r_2U_Y)$が埋入された超曲面になり，かつ，$W_2$の単位法ベクトル場

ξ_2, $\xi_2(c_{q,Z}(r_2)) = -c'_{q,Z}(r_2)$, 方向に関する平均曲率$H_2$が非正になるように取れる。$W_1 \subset \bar{B}(p, r_1)$, $W_2 \subset \bar{B}(q, r_2)$, $c_{p,X}(r_1) = c_{q,Y}(r_2) \in W_1 \cap W_2$ であるから, W_1, W_2 は補題1.1の仮定をすべてみたしている。補題1.1から, $S(0_p, 1)$ におけるXの近傍 V_X ($\subset U_X$) と $S(0_q, 1)$ におけるYの近傍 V_Y ($\subset U_Y$) を $\exp_p(r_1 V_X) = \exp_q(r_2 V_Y) \subset W_1 \cap W_2$ となる様に取れる。そのとき, $V_X \subset A$ である。よって, Aは $S(0_p, 1)$ における開集合である。$S(0_p, 1)$ の連結性より, $A = S(0_p, 1)$である。このことは, $\exp_p : B(0_p, d) \to B(p, d)$ が微分同型, $\exp_p(S(0_p, d)) = \{q\}$ を意味する。このとき, Mは S^n と同相であることが分る。

定理2.1において, その証明から, $M = B(p, t) \cup B(q, d-t) \cup S(p, t)$, $S(p, t) = S(q, d-t)$ $(0 < t < d = d_M(p, q))$ が分る。又, $d_M(p) + d_M(q) < d_M(p, q)$ であれば, $S(p, d_M(p))$, $S(q, d_M(q))$ は全測地的超曲面で, $M \setminus (B(p, d_M(p)) \cup B(q, d_M(q)))$ はリーマン積 $S(p, d_M(p)) \times [0, 2r]$ $(2r = d - d_M(p) - d_M(q))$ に等長である。(補題2.1を使って示される。)

定理2.1と上に述べたことから次を得る。

定理2.2. Mをリッチ曲率が正であるn次元($n \geqq 2$)連結，完備なリーマン多様体とする。Mの任意の2点p，qに対し$d_M(p,q) \leqq \alpha_M(p)+\alpha_M(q)$が成立つ。等号が成立するような2点$p$，$q$が存在すれば，次の事が成立つ。

(1) $\tilde{C}_M(p)=S(0_p, d_M(p,q))$，$C_M(p)=\{q\}$。$q$に対しても同じ事が成立する。$M \approx S^n$ (同相) である。

(2) $S(p, \alpha_M(p)) = S(q, \alpha_M(q))$

(3) $S(p, \alpha_M(p))$は極小超曲面である。

以下において Myers の定理([19])の拡張について述べる。

定理2.3. Mを非負リッチ曲率をもつn次元($n \geqq 2$)連結，完備なリーマン多様体とする。もし，$\alpha(M)$が有限ならば，Mはコンパクトで，その基本群は有限群である。

定理2.4. Mを定理2.3と同じとする。もし，$\alpha_M(p)$が有限となるようなMの点pが存在すれば，Mの基本群は有限群である。

上の二定理は定理2.1とMのリーマン被覆$\pi: \tilde{M} \to M$に対し，$\alpha_{\tilde{M}} = \alpha_M \circ \pi$が成立つことを使って証明される。

定理2.5. Mをリッチ曲率が正であるn次元($n \geqq 2$)連結,完備なリーマン多様体とする。もし,$\alpha_M(p)$が有限となるMの点pが存在すれば,$\alpha(M)$は有限であって,Mの直径$d(M)$に対して,$d(M) \leqq 2\alpha(M) \leqq \pi/\lambda$ が成立つ。ここに,λは$\lambda^2 = \inf\{Ric_M(X)/(n-1)\,;\,\|X\|=1\}$となる正数である。もし,ある正数$\lambda$に対し,$Ric_M \geqq (n-1)\lambda^2$ が成立すれば,不等式$d(M) \leqq 2\alpha(M) \leqq \pi/\lambda$ を得る。$d(M) = 2\alpha(M)$が成立すれば,M はS^nに同相である。

定理2.5の注意。 条件 $Ric_M \geqq (n-1)\lambda^2$ (λは正定数),$2\alpha(M) < \pi/\lambda$ をみたすn次元($n \geqq 4$)連結,コンパクトなリーマン多様体が存在する。例えば,ユークリド球面を除く,他の単連結,コンパクトな階数1の対称空間,ユークリッド単位球面のリーマン積 $S^k(1) \times S^m(1)$ ($k > 4(m-1)$, $m \geqq 2$)等はそのような条件をみたす。

定理2.1の証明と全く同じ論法で,Toponogov-Chengの最大直径定理([8],[26])の別証を与えることが出来る。この定理の証明はこれまで色々な別証が与えられている([14],[15],[25])。

最大直径定理。Mをn次元($n\geq 2$)連結，完備なリーマン多様体とする。Mのリッチ曲率Ric_Mと直径$d(M)$が条件$Ric_M \geq (n-1)\lambda^2$ (λは正定数)，$d(M)=\pi/\lambda$をみたすと仮定する。このとき，Mは定曲率λ^2のn次元ユークリッド球面に等長である。

証明。仮定より，Mはコンパクトになる。$d(M)=d_M(p,q)$となるMの2点p，qを取る。このとき，定理2.2，2.5から，$\alpha_M(p)=\alpha_M(q)=\pi/2\lambda$が分る。定理2.1と同じ論法で，$M=B(p,\pi/2\lambda)\cup B(q,\pi/2\lambda)\cup S(p,\pi/2\lambda)$を示すことが出来る。このとき，補題2.1，2.2を使って，二つの閉球$\bar{B}(p,\pi/2\lambda)$，$\bar{B}(q,\pi/2\lambda)$は曲率λ^2のn次元ユークリッド球面における半径$\pi/2\lambda$の閉球に等長であることが示される。これより，Mは$S^n(\lambda^2)$に等長である。

§3．リッチ曲率が非負である非単連結なリーマン多様体

前節で定義された関数α_Mを使って，非負リッチ曲率をもつ単連結でない完備リーマン多様体の幾何学的性質について述べる。

Mを連結，完備なリーマン多様体で，単連結でないとする。$\tilde{M}$を被覆写像πをもつMの普遍なリーマン被覆多様体とする。

$p \in M$ と $\gamma \in \pi_1(M,p)$ に対し，$\|\gamma\|(p) = \inf\{L(c)$；$c$ は γ に属する p における測地的ループ$\}$ とおく。ここに，$L(c)$ は c の長さである。

命題3.1。Mを非負リッチ曲率をもつn次元$(n \geqq 2)$ 連結，非単連結，完備なリーマン多様体とする。Mのある点 p とある $\gamma \in \pi_1(M,p)$に対し，$\|\gamma\|(p) \geqq 2\alpha_M(p)$ が成立すると仮定する。このとき，$\tilde{M}$ は S^n に同相である。従って，Mはコンパクトで，その基本群は有限群である。更に，基本群の元の個数は偶数である。又，$\gamma, \delta \in \pi_1(M,p)$ が $\|\gamma\|(p)$, $\|\delta\|(p) \geqq 2\alpha_M(p)$ をみたせば，$\gamma = \delta$ である。

上の命題の証明は，定理2.1と $\alpha_{\tilde{M}} = \alpha_M \circ \pi$ という性質を使って示される。

次の定理は，$\tilde{M}$に定理2.2を適用して証明される。

定理3.1. Mを正のリッチ曲率をもつn次元$(n \geqq 2)$連結，非単連結，コンパクトなリーマン多様体とする。このとき，任意の点 $p \in M$における指数写像の単射半径 $i_M(p)$ について，$i_M(p) \leqq \alpha_M(p)$ が成立する。ある点 $p \in M$において，等号が成立すれば，$\tilde{M}$は S^n に同相であって，次の性質が成

立つ。

(1) $\pi_1(M)\cong Z_2$

(2) $\tilde{C}_M(p)=S(0_p,\alpha_M(p))$, $C_M(p)=\hat{S}(p,\alpha_M(p))$

(3) $C_M(p)$ は M に埋入された極小超曲面である。

(4) $\exp_p: S(0_p,\alpha_M(p))\longrightarrow C_M(p)$ は二重被覆写像である。

(5) 各 $X\in S(0_p,1)$ に対し，$c_{p,X}|[0,2\alpha_M(p)]$ は p における単純測地的ループである。

定理3.1の注意．M を定理3.1と同じであるとする。$i_M(p)=\alpha_M(p)$ をみたす M の点 p が存在するとき，定理の主張から，M は n 次元実射影空間 $\mathbb{R}P^n$ とホモトピー型が同じであることが分る。$2\leqq n\leqq 4$ のときは，M は $\mathbb{R}P^n$ と同相である（[31]）。

定理3.2．M を正のリッチ曲率をもつ n 次元 $(n\geqq 2)$ 連結，非単連結，コンパクトなリーマン多様体とする。このとき，M の単射半径 $i(M)$ について，$i(M)\leqq\alpha(M)$ が成立する。等号成立は M が定曲率の n 次元実射影空間のときに限る。

$i(M)=\alpha(M)$ が成立するとき，定理3.1より $\tilde{M}$ は再帰空間になる。そのとき，$\tilde{M}$ は定曲率の n 次元球面に等長になる。

$\pi_1(M)\cong Z_2$ だから，Mは定曲率のn次元実射影空間に等長になる。

§4。境界をもつリーマン多様体

境界をもつリーマン多様体への補題1.1の応用を述べる。$\bar{M}=M\cup\partial M$を smooth な境界をもつ連結なリーマン多様体とする。dを$\bar{M}=M\cup\partial M$上のリーマン計量から導びかれた距離関数とする。$\bar{M}$が完備とは距離空間$(\bar{M},d)$が完備なときをいう。Hを∂Mの内向き単位法ベクトルに関する平均曲率とする。

定理4.1（[15],[10]）。$\bar{M}=M\cup\partial M$をコンパクトな境界∂Mをもつn次元$(n\geqq 2)$連結，完備なリーマン多様体とする。$Ric_M\geqq 0$，$H\geqq 0$を仮定する。このとき，∂Mの連結成分の個数は，高々2個である。∂Mの連結成分の個数が2個のときは，$\bar{M}$はリーマン積$\Gamma\times[0,r]$ $(r>0)$と等長である。ここに，Γは$(n-1)$次元連結，コンパクトなリーマン多様体$(\partial\Gamma=\phi)$である。

定理4.2（[15]）。$\bar{M}$は定理4.1と同じとする。$\bar{M}$は非コンパクト，∂Mは連結，$Ric_M\geqq 0$，$H\geqq 0$と仮定する。このと

き，$\bar{M}$ はリーマン積 $\partial M\times[0,\infty)$ に等長である。

定理4.3 ([17])．$\bar{M}=M\cup\partial M$ を境界 ∂M をもつ n 次元 $(n\geq 2)$ 連結，コンパクトなリーマン多様体とする。$Ric_M>0$, $H\geq 0$ を仮定する。このとき，∂M は連結で，$\pi_1(M,\partial M)=0$ である。

$\bar{M}=M\cup\partial M$ を連結な境界 ∂M をもつコンパクト，連結なリーマン多様体とする。$\delta=\max\{d(p,\partial M);\, p\in M\}$ とおく。∂M が不動点をもたない，回帰的な (involutive) 等長写像 $\varphi:\partial M\longrightarrow\partial M$ をもち，$\bar{M}$ がリーマン積 $\partial M\times[0,\delta]$ において，(p,δ) と $(\varphi(p),\delta)$ を同一視して出来る商空間 $\partial M\times[0,\delta]/\sim$ に等長であるとき，$\bar{M}$ は Möbius 型 ということにする。

定理4.4．$\bar{M}=M\cup\partial M$ を連結な境界 ∂M をもつ n 次元 $(n\geq 2)$ コンパクト，連結なリーマン多様体とする。$Ric_M\geq 0$, $H\geq 0$, $\pi_1(M,\partial M)\neq 0$ を仮定する。このとき，$\bar{M}$ は Möbius 型 である。

References

[1] W. Ambrose, A theorem of Myers, Duke Math. J., 24 (1957), 345-348.

[2] A. Avez, Riemannian manifolds with non-negative Ricci curvature, Duke Math. J., 39 (1972), 55-64.

[3] A. Besse, Manifolds all of whose geodesics are closed, Ergebnisse der Mathematik, No. 93, Springer-Verlag, Berlin, 1978.

[4] R. Bott, On manifolds all of whose geodesics are closed, Ann. of Math., 60 (1954), 375-382.

[5] E. Calabi, On Ricci curvature and geodesics, Duke Math. J., 34 (1967), 667-676.

[6] J. Cheeger and D. G. Ebin, Comparison theorem in Riemannian geometry, North Holland, Amsterdam, 1975.

[7] J. Cheeger, M. Gromov and M. Taylor, Finite propagation speed, kernel estimates for functions of the Laplace operator, and the geometry of complete Riemannian manifolds, J. Diff. Geom., 17 (1982), 15-53.

[8] S. Y. Cheng, Eigenvalue comparison theorems and its geometric application, Math. Z., 143 (1975), 289-297.

[9] G. Galloway, Compactness criteria for Riemannian manifolds, Proc. Amer. Math. Soc., 84 (1982), 106-110.

[10] R. Ichida, On Riemannian manifolds of nonnegative Ricci curvature containing compact minimal hypersurfaces, Advanced Studies in Pure Mathematics, 3 (1984), 473-485.

[11] ________, On manifolds of nonnegative Ricci curvature, Yokohama Math. J., 32 (1984), 191-202.

[12] ________, Manifolds of positive Ricci curvature with a certain function, Yokohama Math. J., 33 (1985), 161-167.

[13] ________, On manifolds of nonnegative Ricci curvature and an extension of Myers'theorem, Preprint.

[14] Y. Itokawa, The topology of certain Riemannian manifolds with positive Ricci curvature, J. Diff. Geom., 18 (1983), 151-155.

[15] A. Kasue, Ricci curvature, geodesics some geometric properties of Riemannian manifolds with boundary, J. Math. Soc. Japan, 35 (1983), 117-131.

[16] J. L. Kazdan, An isoperimetric inequality and Wiedersehen manifolds, Seminar on Differetial Geometry, Edited by S. T. Yau, Ann. Math. Studies, No. 102, 143-157.

[17] B. Lawson, The unknottedness of minimal embeddings, Invent. Math. 11 (1970), 183-187.

[18] S. Lopez de Medrano, Involutions on Manifolds, Ergebnisse der Mathematik, No. 59, Springer-Verlag, Berlin, 1971.

[19] S. B. Myers, Riemannian manifolds with positive mean curvature, Duke Math. J., 8 (1941), 401-404.

[20] H. Nakagawa, A note on theorems of Bott and Samelson, J. Math. Kyoto Univ., 7 (1967), 205-220.

[21] T. Otsuki, On focal elements and the spheres, Tohoku Math. J., 17 (1965), 285-304.

[22] T. Sakai, Comparison and finiteness theorems in Riemannian geometry, Advanced Studies in Pure Mathematics, 3 (1984), 125-181.

[23] H. Samelson, On manifolds with many closed geodesics, Portugaliae Math., 22 (1963), 193-196.

[24] K. Shiohama, An extension of a theorem of Myers, J. Math. Soc. Japan, 27 (1975), 561-569.

[25] __________, A sphere theorem for manifolds of positive Ricci curvature, Trans. Amer. Math. Soc., 275 (1983), 811-819.

[26] V. Toponogov, Riemannian spaces with curvature bounded below, Uspehi Math. Nauk, 14 (1959), 87-130.

[27] C. T. Yang, On the Blaschke conjecture, Seminar on Differential Geometry, Edited by S. T. Yau, Ann. Math. Studies. No. 102, 159-171.

[28] D. Gilbarg and N. S. Trudinger, Elliptic partial differential equations of second order, Sprineger Verlag, 1977.

[29] J. Serrin, The problem of Dirichlet for quasilinear elliptic differential equations with many independent variables, Philos. Trans. Roy. Soc. London Ser., A 264 (1969), 413-196.

[30] R. Ichida, Riemannian manifolds which contain minimal hypersurfaces, Preprint.

[31] H. Nakagawa, 大域のRiemannian幾何学, 海外出版