数理解析研究所講究録
第600巻 1986年 135-150

Perturbation of surfaces with constant mean curvature

阪大理 小磯深幸 (Miyuki Koiso)

§1. 序

Ωは$\mathbb{R}^n$ $(n \geq 2)$内の有界領域であって、その境界$\partial\Omega$はC^∞級で滑らかであるとする。xは$\bar{\Omega}$から$\mathbb{R}^{n+1}$の中への挿入とする。xが平均曲率一定であるという条件は、xがある変分問題の臨界点であるということと同値である。平均曲率一定な挿入xがあったとき、境界$x(\partial\Omega)$を保ちながら、平均曲率一定のままで、xが滑らかに変化し得るか、という問題を考えよう。本稿では、xが安定な場合には、xの近傍で、xと境界を同じくする平均曲率一定の超曲面の一助変数族が一意的に存在するということを、もう少し一般的な結果を証明することによって示す。

まず初めに、上に掲げた変分問題について厳密に述べる。$x \in C^{k+\alpha}(\bar{\Omega}, \mathbb{R}^{n+1})$ $(0 < \alpha < 1,\ k \geq (n/2) + 2)$は挿入と

する。x の面積 $A(x)$, 体積 $V(x)$ を次のように定義する。

$$A(x)=\int_{\Omega}d\omega\ ,\qquad V(x)=\frac{1}{n+1}\int_{\Omega}\langle x, N\rangle\, d\omega\ ,$$

ただしここで, $d\omega$ は x の面積要素, N は x の単位法ベクトル場とし, $\langle\ ,\ \rangle$ は $\mathbb{R}^{n+1}$ の標準的な内積を表すものとする。$H\in\mathbb{R}$ に対して, 汎函数 A_H を,

$$A_H(x) = A(x) + nHV(x)$$

によって定義する。

x の変分 $x_t\in C^{2+\alpha}(\bar{\Omega}, \mathbb{R}^{n+1})$ （$\varepsilon>0$, $t\in(-\varepsilon, \varepsilon)$, $x_0=x$）が体積を保つ, とは, すべての $t\in(-\varepsilon,\varepsilon)$ に対して $V(x_t)=V(x)$ が成立するときをいう。x_t が境界を保つ, とは, すべての $t\in(-\varepsilon,\varepsilon)$ に対して $x_t|_{\partial\Omega}=x|_{\partial\Omega}$ が成立するときをいう。

H_x を x の平均曲率とし,

$$H_0 = A(x)^{-1}\int_{\Omega}H_x\, d\omega$$

とおく。このとき, 次の (i)～(iii) が同値であることが知られている（c.f. Barbosa - do Carmo [1]）:

(i) x の平均曲率一定 $=H_0\neq 0$。

(ii) 任意の境界と体積を保つ変分 x_t に対し, $dA(x_t)/dt$

は $t=0$ で 0 である。

(iii) 任意の境界を保つ変分 x_t に対し、$dA_{H_0}(x_t)/dt$ は $t=0$ で 0 である。

平均曲率一定な超曲面の安定性を定義するとき、上の(ii), (iii)に現れる変分問題のどちらを採用するかという問題が生じるが、(ii)の変分問題の方がより自然に思われるので、そちらを採用する。

定義. x が平均曲率一定 $\neq 0$ のとき、x が安定であるとは、すべての境界と体積を保つ変分 x_t に対し、

$$\left.\frac{d^2A(x_t)}{dt^2}\right|_{t=0} > 0$$

が成立するときをいう。

次の結果が成立する。

系 1. $x \in C^{k+\alpha}(\overline{\Omega}, \mathbb{R}^{n+1})$ は平均曲率一定 $H_0 \neq 0$ の挿入とする。x が安定ならば、x の $C^{2+\alpha}(\overline{\Omega}, \mathbb{R}^{n+1})$ での近傍 U, 正数 ε, 1 対 1 C^1 写像 $f: (-\varepsilon, \varepsilon) \longrightarrow C_0^{2+\alpha}(\overline{\Omega}, \mathbb{R})$ ($f(0)=0$) および C^1 函数 $H: (-\varepsilon, \varepsilon) \longrightarrow \mathbb{R}$ ($H(0)=H_0$) が存在して、$x+f(t)N$ ($t \in (-\varepsilon, \varepsilon)$) は、平均曲率一定 $= H(t)$

であり、U内には、これらの他には、xと境界値を同じくする平均曲率一定の挿入は、($\bar{\Omega}$の$C^{2+\alpha}$級微分同相写像だけの違いを除き)存在しない。

xの第2基本形式のノルムの2乗を$\|B\|^2$とおく。特に、$n=2$であり、Ωが単連結である場合には、$\int_\Omega \|B\|^2 d\omega < 8\pi$ならば、$x$は安定である(Barbosa – do Carmo [1])。したがって、このとき、系1の結論が成立する。

§2. 安定性に関連するある固有値問題

以下、$x \in C^{k+\alpha}(\bar{\Omega}, R^{n+1})$は平均曲率一定$H_0 \neq 0$の挿入とする。$(u^1, \cdots, u^n)$を$R^n$ $(\supset \Omega)$の点の座標，xによりR^{n+1}から誘導されるΩ上の計量を$g = \sum_{i,j=1}^n g_{ij}\, du^i du^j$，面積要素，Laplacianをそれぞれ，$d\omega$，$\Delta = \frac{1}{\sqrt{G}} \sum_{i,j} \frac{\partial}{\partial u^i}\left(\sqrt{G}\, g^{ij} \frac{\partial}{\partial u^j}\right)$ $(G = \det(g_{ij}),\ (g^{ij}) = (g_{ij})^{-1})$によって示す。

xの境界を保つ変分$x_t \in C^{2+\alpha}(\bar{\Omega}, R^{n+1})$に対し、変分ベクトル場

$$\xi(w) = \left.\frac{d x_t(w)}{dt}\right|_{t=0}, \quad w \in \bar{\Omega}$$

の法成分をfとおく。すなわち、$f(w) = \xi(w) \cdot N(w)$，$w \in \bar{\Omega}$。

すると、$f \in C_0^{2+\alpha}(\bar{\Omega}, \mathbb{R})$ であって、

$$\left.\frac{dA(x_t)}{dt}\right|_{t=0} = -n\int_\Omega H_0 f\, d\omega, \quad \left.\frac{dV(x_t)}{dt}\right|_{t=0} = \int_\Omega f\, d\omega \qquad (1)$$

である。(1)は x の平均曲率 H_0 が一定でない場合にも成立する。) また、A_H の第2変分については、

$$\left.\frac{d^2 A_{H_0}(x_t)}{dt^2}\right|_{t=0} = -\int_\Omega (\Delta f + \|B\|^2 f) f\, d\omega \qquad (2)$$

が成り立つ (Barbosa-do Carmo [1])。(2)の右辺を $I(f)$ とおこう。すなわち、任意の $f \in C_0^{2+\alpha}(\bar{\Omega}, \mathbb{R})$ に対し、

$$I(f) = -\int_\Omega (\Delta f + \|B\|^2 f) f\, d\omega$$

である。

定理A (Barbosa-do Carmo [1]). x が安定であるための必要十分条件は、$\int_\Omega f\, d\omega = 0$ をみたすすべての $f \in C_0^{2+\alpha}(\bar{\Omega}, \mathbb{R}) - \{0\}$ に対して $I(f) > 0$ が成り立つことである。

内積 $(f,g) = \int_\Omega (fg + \nabla f \cdot \nabla g) d\omega$ をもつ Sobolev 空間 $H_0^1(\Omega)$ を考える。$H_0^1(\Omega)$ で次の固有値問題(*)を考えよう。

$$(*) \begin{cases} \Delta f + \|B\|^2 f + \lambda f = 0 & \text{in } \Omega \\ f = 0 & \text{on } \partial\Omega \end{cases}$$

(*) は可算個の固有値 $\lambda_1 < \lambda_2 \leq \lambda_3 \leq \cdots$ をもち，

$$\lambda_1 = \operatorname*{Inf}_{f \in H_0^1(\Omega) - \{0\}} \frac{\int_\Omega \left(|\nabla f|^2 - \|B\|^2 f^2 \right) d\omega}{\int_\Omega f^2 \, d\omega} \tag{3}$$

である（c.f. Berger - Gauduchon - Mazet [2, p.186]）。また、λ_1 に属する固有空間Eは1次元で、各固有函数 $\in E$ は Ω 内で定符号であることが知られている。さらに，$\partial\Omega$ が C^∞ 級であり，x が $C^{k+\alpha}$ 級（$k \geq (n/2)+2$）であることから，楕円型方程式の解に関する一般論より，(*) の各固有函数は，$C_0^{2+\alpha}(\bar{\Omega}, \mathbb{R})$ にはいる（c.f. Gilbarg - Trudinger [3, pp. 186-187]）。

<u>補題1.</u>　x が安定ならば，$\lambda_2 > 0$ である。

<u>証明.</u>　$\lambda_2 \leq 0$ と仮定して矛盾を導く。f, g をそれぞれ λ_1, λ_2 に属する固有函数とすると，$f, g \in C_0^{2+\alpha}(\bar{\Omega}, \mathbb{R})$ であって，Green の公式により，$0 = \int_\Omega (f \Delta g - g \Delta f) \, d\omega$
$= \int_\Omega \{-f(\lambda_2 + \|B\|^2) g + g(\lambda_1 + \|B\|^2) f\} \, d\omega = (\lambda_1 - \lambda_2) \int_\Omega fg \, d\omega$。
$\lambda_1 - \lambda_2 < 0$ であるから，

$$\int_\Omega fg \, d\omega = 0 。 \tag{4}$$

$$x(s, t) = x + (sf + tg) N, \quad s, t \in \mathbb{R}$$

とおいて，方程式

$$V(x(s,t)) = V(x) \quad (:\text{定数}) \tag{5}$$

を考える。fはΩで定符号だから、(1)により、

$$\left.\frac{\partial V}{\partial s}\right|_{(s,t)=(0,0)} = \int_\Omega f\,d\omega \neq 0 \quad 。$$

したがって、陰函数定理が(5)に適用できる。故に、$t=0$ の近傍での t の C^∞ 函数 $\varphi(t)$ であって $\varphi(0)=0$ なるものが存在して、

$$V(x(\varphi(t),t)) \equiv V(x) \tag{6}$$

が成立する。$x(\varphi(t),t)$ の変分ベクトル場は、

$$\left.\frac{dx(\varphi(t),t)}{dt}\right|_{t=0} = (\varphi'(0)f+g)N$$

であるから、再び(1)を用いて、

$$\int_\Omega(\varphi'(0)f+g)\,d\omega = \left.\frac{dV(x(\varphi(t),t))}{dt}\right|_{t=0} = 0 \quad 。$$

よって、定理Aにより、x が安定ならば、

$$\mathcal{I}(\varphi'(0)f+g) > 0$$

でなければならない。ところが、f, g の定義と(4)、および $\lambda_1 < \lambda_2 \leq 0$ なる仮定により、

$$\mathcal{I}(\varphi'(0)f+g) = -\int_\Omega\{\Delta(\varphi'(0)f+g)+\|B\|^2(\varphi'(0)f+g)\}(\varphi'(0)f+g)\,d\omega$$

$$= -\int_\Omega(-\lambda_1\varphi'(0)f-\lambda_2 g)(\varphi'(0)f+g)\,d\omega$$

$$= \lambda_1 \varphi'(0)^2 \int_\Omega f^2 d\omega + \lambda_2 \int_\Omega g^2 d\omega$$

$$\leq 0 \quad .$$

これは矛盾である。したがって、x が安定ならば、$\lambda_2 > 0$ であることが示された。

<u>注意1.</u>　$\lambda_1 > 0$ であるための必要十分条件は、すべての $f \in C_0^{2+\alpha}(\bar{\Omega}, \mathbb{R}) - \{0\}$ に対し、$\mathscr{I}(f) > 0$ が成立することである。

<u>証明.</u>　$\lambda_1 > 0$ とする。Green の公式と(3)により、任意の $f \in C_0^{2+\alpha}(\bar{\Omega}, \mathbb{R}) - \{0\} \subset H_0^1(\Omega) - \{0\}$ に対し、

$$\mathscr{I}(f) = -\int_\Omega (\Delta f + \|B\|^2 f) f \, d\omega = \int_\Omega (|\nabla f|^2 - \|B\|^2 f^2) \, d\omega > 0 .$$

逆に、$\lambda_1 \leq 0$ とする。g を λ_1 に属する固有函数とすると、$g \in C_0^{2+\alpha}(\bar{\Omega}, \mathbb{R})$ であり、

$$\mathscr{I}(g) = \int_\Omega (|\nabla g|^2 - \|B\|^2 g^2) \, d\omega = \lambda_1 \int_\Omega g^2 \, d\omega \leq 0 .$$

（証明終）

Mori [5], Ruchert [6] は、すべての $f \in C_0^{2+\alpha}(\bar{\Omega}, \mathbb{R}) - \{0\}$ に対し、$\mathscr{I}(f) \geq 0$, あるいは、$\mathscr{I}(f) > 0$ が成立するときに、x が安定であると定義している。

§3. 平均曲率一定超曲面の摂動

$C^{2+\alpha}(\overline{\Omega}, \mathbb{R}^{n+1})$ における x の十分小さい近傍 U をとれば、$y|_{\partial\Omega} = x|_{\partial\Omega}$ を満たす任意の $y \in U$ は、ある $C^{2+\alpha}$ 級微分同相写像 $\tau : \overline{\Omega} \longrightarrow \overline{\Omega}$ と、ある $f \in C_0^{2+\alpha}(\overline{\Omega}, \mathbb{R})$ とを用いて、

$$y \circ \tau = x + fN$$

という形に一意的に表せる。

<u>定理B</u>（Tomi [7]）. $C_0^{2+\alpha}(\overline{\Omega}, \mathbb{R})$ における 0 の十分小さい近傍 V が存在して、次が成立する：$x+fN$, $f \in V$, が平均曲率一定 $= H$ であるのは、

$$D_f A_H(x+fN) = 0$$

が成立するとき、かつそのときに限る。ただし、ここで、D_f は、f に関する Fréchet 微分である。また、$x+fN$ の平均曲率，単位法ベクトル場，面積要素をそれぞれ H_f, N_f, $d\omega_f$ とするとき、

$$D_f A_H(x+fN)g = n\int_{\Omega}(H-H_f)\,g\,\langle N, N_f\rangle\,d\omega_f ,$$

$$D_f^2 A_H(x+fN)\Big|_{f=0}(g,h) = -\int_{\Omega}(\Delta g + \|B\|^2 g)\,h\,d\omega$$

が成立する。

$H_0^1(\Omega)$ の双対空間を $H_0^1(\Omega)^*$ によって示す。$H_0^1(\Omega)$ における 0 の近傍 $\tilde{V}$ を十分小さくとれば、$\tilde{V}\times\mathbb{R}$ から $H_0^1(\Omega)^*$ の中への写像 χ が次のように定義できる。

$$\chi(f, H) = D_f A_H(x+fN)\text{。}$$

すなわち、任意の $g\in H_0^1(\Omega)$ に対し、

$$\chi(f, H)g = n\int_\Omega (H-H_f)g\langle N, N_f\rangle d\omega_f \tag{7}$$

である。定理Bにより、次の補題がわかる。

補題2. χ は Fréchet 微分可能であって、任意の $f\in H_0^1(\Omega)$, $g\in H_0^1(\Omega)$, $H\in\mathbb{R}$ に対し、

$$\left(D_f\chi(0, H_0)f\right)g = -\int_\Omega\left(\Delta f + \|B\|^2 f\right)g\,d\omega \tag{8}$$

$$\left(D_H\chi(0, H_0)H\right)g = nH\int_\Omega g\,d\omega \tag{9}$$

が成立する。$x+fN$ $(f\in C_0^{2+\alpha}(\bar{\Omega}, \mathbb{R})\subset H_0^1(\Omega))$ が平均曲率一定 $=H$ であるのは、$\chi(f, H)=0$ であるとき、かつそのときに限る。

上の(8)式から、次の補題が成立することがわかる。

補題3. $\mathrm{Ker}\ D_f\chi(0, H_0) = \left\{f\in H_0^1(\Omega);\ \Delta f + \|B\|^2 f = 0 \text{ in } \Omega\right\}$.

したがって、$\mathrm{Ker}\, D_f \mathcal{X}(0, H_0) = \{0\}$ であるための必要十分条件は、固有値問題(*) (§2) が固有値 0 をもたないことである。

定理 1. (*)が固有値 0 をもたないとする。このとき、H_0 の $\mathbb{R}$ における近傍 W と，W から $C_0^{2+\alpha}(\Omega, \mathbb{R})$ の中への C^1 写像 φ であって $\varphi(H_0) = 0$ を満たすものが一意的に存在して、

$$x + \varphi(H) N \qquad (H \in W)$$

は平均曲率一定 $= H$ である。さらに、x の十分小さい $C^{2+\alpha}$ 近傍内には、これらの他には、x と同じ境界値をもつ平均曲率一定の挿入は、Ω の $C^{2+\alpha}$ 微分同相写像だけの違いを除き、存在しない。

証明. $D_f \mathcal{X}(0, H_0) : H_0^1(\Omega) \longrightarrow H_0^1(\Omega)^*$ は有界線形写像であることが (8) より容易にわかる。したがって、Fredholm の拓一定理により、$D_f \mathcal{X}(0, H_0)$ については単射であることと全射であることとが同値になる。ところが今、定理の仮定と補題 3 により、$\mathrm{Ker}\, D_f \mathcal{X}(0, H_0) = \{0\}$ である。したがって、$D_f \mathcal{X}(0, H_0)$ は、同相写像である。よって、陰函数定理（Lang [4, pp. 17-18]）により、H_0 の $\mathbb{R}$ における近傍 $\tilde{W}$ と，$\tilde{W}$ から $H_0^1(\Omega)$ の中への C^1 写像 $\tilde{\varphi}$ であって $\tilde{\varphi}(H_0) = 0$ を満たすものが一意的に存在して、

$$\mathcal{X}(\tilde{\varphi}(H), H) = 0 \qquad \text{for all } H \in \tilde{W}$$

が成立する。$C_0^{2+\alpha}(\bar{\Omega}, \mathbb{R})$ は $H_0^1(\Omega)$ の開集合であり，$\tilde{\varphi}(H_0) = 0 \in C_0^{2+\alpha}(\bar{\Omega}, \mathbb{R})$ であるから、H_0 の近傍 $W \subset \tilde{W}$ を適当にとって，$\varphi = \tilde{\varphi}|_W$ とおくとき φ が $C_0^{2+\alpha}(\bar{\Omega}, \mathbb{R})$ の中への写像となるようにできる。このとき

$$\chi(\varphi(H), H) = 0 \qquad \text{for all } H \in W$$

であるが、補題2により、各 $x + \varphi(H)N$ $(H \in W)$ は、平均曲率一定 $= H$ である。また、他に平均曲率一定であって x と境界値を同じくする挿入が存在しないことは、この節の初めに述べた注意によりわかる。　　　　（証明終）

次に、$(*)$ の最小固有値 λ_1 が 0 である場合について考えよう。$\lambda_1 = 0$ に属する固有函数 f_0 であって、次の(i)および(ii)を満足するものが一意的に存在する。

(i) $f_0 > 0 \qquad \text{in } \Omega$

(ii) $\int_\Omega (f_0^2 + |\nabla f_0|^2)\, d\omega = 1$

$\lambda_1 = 0$ に属する固有空間を E，その直交補空間を $E^\perp$ とする。すなわち、

$$E = \{a f_0 \; ; \; a \in \mathbb{R}\}$$

$$E^\perp = \{g \in H_0^1(\Omega) \; ; \; \int_\Omega (f_0 g + \nabla f_0 \nabla g)\, d\omega = 0\}$$

<u>定理2.</u>　(*)の最小固有値 $\lambda_1=0$ とする。このとき、Eにおける0の近傍WとWから $E^{\perp}\times\mathbb{R}$ の中への C^1 写像 $\psi=(\xi,\eta)$ であって、$\psi(0)=(0,H_0)$ を満たすものが一意的に存在して、

$$x+(f+\xi(f))N \quad (f\in W)$$

は平均曲率一定 $=\eta(f)$ である。さらに、x の十分小さい $C^{2+\alpha}$ 近傍内には、これら以外には、x と境界値を同じくする平均曲率一定の挿入は、$\bar{\Omega}$ の $C^{2+\alpha}$ 級微分同相写像だけの違いを除き、存在しない。

<u>証明.</u>　$\tilde{V}$ は補題2の前に定義した $H_0^1(\Omega)$ における0の近傍とする。$(\tilde{V}\cap E)\times(\tilde{V}\cap E^{\perp})\times\mathbb{R}$ から $H_0^1(\Omega)^*$ の中への写像 $\bar{\chi}$ を、

$$\bar{\chi}(f_1,f_2,H)=\chi(f_1+f_2,H)$$

によって定義する。$\bar{\chi}(0,0,H_0)=0$ であり、$\bar{\chi}$ はFréchet 微分可能である。$\bar{\chi}$ の $(0,0,H_0)$ における (f_2,H) に関するFréchet微分 $D_{(f_2,H)}\bar{\chi}(0,0,H_0)$ は、$E^{\perp}\times\mathbb{R}$ から $H_0^1(\Omega)^*$ の中への線形写像であって、任意の $(f_2,H)\in E^{\perp}\times\mathbb{R}$，$g\in H_0^1(\Omega)$ に対し、

$$\begin{aligned}\left(D_{(f_2,H)}\bar{\chi}(0,0,H_0)(f_2,H)\right)g&=\left(D_{f_2}\bar{\chi}(0,0,H_0)f_2\right)g+\left(D_H\bar{\chi}(0,0,H_0)H\right)g\\&=\left(D_f\chi(0,H_0)f_2\right)g+\left(D_H\chi(0,H_0)H\right)g\end{aligned}$$

$$= \int_\Omega (-\Delta f_2 - \|B\|^2 f_2 + nH) g \, d\omega \tag{10}$$

が成立する。ただし、ここで、補題2を用いた。

$$\mathrm{Ker}\, D_{(f_2,H)} \overline{\chi}(0,0,H_0) = \{(0,0)\}$$

である。実際、$(f_2, H) \in E^\perp \times \mathbb{R}$, $D_{(f_2,H)} \overline{\chi}(0,0,H_0)(f_2, H) = 0$ と仮定すると、(10)により、

$$-\Delta f_2 - \|B\|^2 f_2 + nH = 0 \ . \tag{11}$$

したがって、Fredholmの択一定理により、$nH \in E^\perp$でなければならない（c.f. Gilbarg－Trudinger [3, Theorem 8.6]）。よって、

$$nH \int_\Omega f_0 \, d\omega = 0 \ .$$

ところが、Ω上$f_0 > 0$であるから、$H = 0$でなければならない。故に、(11)により、$f_2 \in E$。一方、$f_2 \in E^\perp$であり、$E \cap E^\perp = \{0\}$であるから、$f_2 = 0$である。

したがって、再びFredholmの択一定理により、$D_{(f_2,H)}\overline{\chi}(0,0,H_0) : E^\perp \times \mathbb{R} \longrightarrow H_0^1(\Omega)^*$は同相写像。よって、陰函数定理が適用でき、定理1の証明と同様の議論を行なうことにより、定理2の結論が成立することがわかる。（証明終）

<u>注意2.</u>　証明からわかるように、定理2の仮定「$\lambda_1 = 0$」は弱められる。すなわち、固有値0の重複度が1であり、0

に属する固有函数 f_0 に対して $\int_\Omega f_0 d\omega \neq 0$ が成立すれば、定理２の結論は成り立つ。

注意３. $\eta : W \to \mathbb{R}$ は単射であるとは限らない。実際, $x(\bar{\Omega})$ が半径１の n 次元半球面であるとき、$x(\bar{\Omega})$ は平均曲率一定＝１であって $\lambda_1 = 0$ であるから, 定理２のような $\Psi = (\xi, \eta)$ が存在するが, η は０の近傍で１対１ではない。η が単射であるかどうかは, 変分ベクトル場の法成分が f_0 であるような、x の変分 x_t に対して、t の函数 $A_{H_0}(x_t)$ が $t=0$ で極値をとるか否かということと、密接な関係があるように思われる。

x が安定ならば、$\lambda_2 > 0$ であり（補題１）, したがって、定理１と定理２から、§1 で述べた系１が成立することがわかる。$H : (-\varepsilon, \varepsilon) \longrightarrow \mathbb{R}$ は、$\lambda_1 \neq 0$ ならば０の近傍で単射であるが、$\lambda_1 = 0$ のときは、単射であるとは限らない。

注意４. 平均曲率一定超曲面の摂動に関しては、他に, Tomi [7] による次のような結果がある：$x_0 \in C^{k+\alpha}(\bar{\Omega}, \mathbb{R}^{n+1})$ は平均曲率一定＝H_0 であって、$x_0|_{\partial\Omega}$ は１対１であるとする。また、x_0 は同じ境界をもつ $C^{2+\alpha}$ 曲面全体の中で、A_{H_0} の

strict local minimum をとるものと仮定する。このとき、任意の $\varepsilon > 0$ に対して、ある $\delta > 0$ が存在して次を満たす。$\partial\Omega$ から $\mathbb{R}^{n+1}$ の中への $C^{k+\alpha}$ 埋入 τ であって、$C^{k+\alpha}$-$\mathrm{dist}(\tau, x_0|_{\partial\Omega}) < \delta$ を満たす任意のものに対し、$C^{2+\alpha}$-$\mathrm{dist}(x, x_0) < \varepsilon$ なる $x \in C^{2+\alpha}(\bar{\Omega}, \mathbb{R}^{n+1})$ であって、平均曲率一定 $= H_0$ かつ、$\partial\Omega$ への制限 $x|_{\partial\Omega}$ が、$\partial\Omega$ から $\tau(\partial\Omega)$ への同相写像であるようなものが存在する。

参考文献

[1] J.L.Barbosa and M.do Carmo: Stability of hypersurfaces with constant mean curvature, Math. Z. 185 (1984), 339-353.

[2] M.Berger, P.Gauduchon et E.Mazet: Le spectre d'une variété riemannienne, Lecture Notes in Math. 194, Springer-Verlag, Berlin-Heidelberg-New York, 1971.

[3] D.Gilbarg and N.S.Trudinger: Elliptic partial defferential equations of second order (Second edition), Springer-Verlag, Berlin-Heidelberg-New York-Tokyo, 1983.

[4] S.Lang: Differential manifolds, Addison-Wesley, Reading-Menlo Park-London-Don Mills, 1972.

[5] H.Mori: Stable complete constant mean curvature surfaces in $\mathbb{R}^3$ and H^3, Transactions of A.M.S. 278 (1983), 671-687.

[6] H.Ruchert: Ein Eindeutigkeitssatz für Flächen konstanter mittlerer Krümmung, Arch. Math. 33 (1979), 91-104.

[7] F.Tomi: A perturbation theorem for surfaces of constant mean curvature, Math. Z. 141 (1975), 253-264.