数理解析研究所講究録
第 600 巻 1986 年 212-244

Zoll多様体上の固有値分布について

徳島大教養　桑原類史 (Ruishi Kuwabara)

0. はじめに

コンパクトリーマン多様体上の楕円型作用素（特に，Laplace-Beltrami作用素）の固有値分布を幾何学的構造との関連に於いて考察する所謂 "Spectral Geometry" は60年代後半から大きなトピックスのひとつとして発展してきた。その中で研究の手法として，楕円型作用素の解析的性質，リー群の表現論などが大きな役割をしている。中でも，擬微分作用素，フーリエ積分作用素の "symbol calculus" が有効な方法として使われている。これらは背景にある古典力学と量子力学の関係についての興味を喚起する。すなわち，作用素の固有値分布を対応する古典力学系の軌道（リーマン多様体に於いては測地流の軌道）の性質との関連に於いて考察しようという問題意識が自然に出てくる。

古典力学的に見て興味深いリーマン多様体として，全ての測地線が閉じていて同じ長さを持つ多様体（C_ℓ-多様体とか

Zoll多様体とか呼ばれる）がある。この様な多様体上の楕円型作用素（量子力学系）の固有値分布は特徴的な性質をもつ。ここでは，このことについて作用素の"*symbol calculus*"の手法に基づいて考察を行なう。

1. ベクトル束の断面に作用する2階楕円型作用素

この節では最も一般的な状況で楕円型作用素を定義する。

Mをn次元コンパクトC^∞多様体，EをM上のC^∞複素ベクトル束でファイバーはr次元とする。M上にC^∞リーマン計量g，E上にC^∞エルミート計量 $x \mapsto \langle\ ,\ \rangle_x$ $(x \in M)$ が定義されているとする。EのC^∞-断面の全体を$C^\infty(E)$とすると，$C^\infty(E)$には次の様な内積が定義される：

$$(s, s') = \int_M \langle s, s' \rangle_x \, dV_g(x)$$

ただし，dV_g は g から定まるMの体積要素である。Eの局所フレーム：$(e_1, \cdots, e_r)$ をとれば，$s \in C^\infty(E)$ は $s = \sum_{\alpha=1}^{r} s^\alpha e_\alpha$ (s^α: M上のC^∞関数）と表わされる。

さて，$C^\infty(E)$に作用する2階楕円型微分作用素 D として Mの局所座標，Eの局所フレームに関して，次の形に表わされるものを考える：

(1.1) $D\mathbf{s} = -\sum_{j,k} g^{jk}\nabla_j\nabla_k \mathbf{s} - 2\sum_{j} w^j \nabla_j \mathbf{s} + U\mathbf{s}$

ただし，$s=\sum_\alpha s^\alpha e_\alpha$，$\mathbf{s}={}^t(s^1,\cdots,s^r)$，$\nabla_j$ は g から定まる共変微分，w^j, U は $r\times r$ 行列である。2階の係数がスカラーである2階楕円型微分作用素は一般にこの様な形で表わされる。新しい局所フレーム $(e'_1,\cdots,e'_r)$ を $e'_\alpha=\sum_\beta G^\beta_\alpha e_\beta$ となる様にとったとき，このフレーム (e'_α) に対して

$$D\mathbf{s}' = -\sum g^{jk}\nabla_j\nabla_k\mathbf{s}' - 2\sum w'^j\nabla_j \mathbf{s}' + U'\mathbf{s}' \quad \left(s=\sum s'^\alpha e'_\alpha\right)$$

と表わされたとすると，簡単な計算により，

(1.2) $Gw'^j = \nabla^j G + w^j G \qquad (G=(G^\beta_\alpha))$

(1.3) $GU' = UG - \sum g^{jk}\nabla_j\nabla_k G - 2\sum w^j\nabla_j G$

の関係があることが分かる。関係式 (1.2) より1階の係数 w^j はベクトル束 E 上の線形接続とみなすことができる：$A^p(M,E)$ を M 上の滑らかな E-値 p 次微分形式の全体とする ($A^0(M,E)=C^\infty(E)$)。E 上の線形接続とは $\mathbb{C}$-線形作用素 $\tilde{d}: A^0(M,E)\to A^1(M,E)$ で

$$\tilde{d}(\phi s) = d\phi\cdot s+\phi\,\tilde{d} s \quad (\phi: M\text{上の}C^\infty\text{関数},\ s\in A^0(M,E))$$

を満たすものである。局所フレーム (e_α) に対して，

$$\tilde{d} e_\alpha = \sum_{\beta=1}^{r} \omega^\beta_\alpha e_\beta \quad (\omega^\beta_\alpha: 1\text{次微分形式})$$

と表わされるとき，$\omega=(\omega^\beta_\alpha)$ をフレーム (e_α) に関する $\tilde{d}$ の接続行列と呼ぶ。接続行列 ω はフレームのとり換え $(e_\alpha)\mapsto(e'_\alpha)$ に対して $G\omega' = dG+\omega G$ なる変換を受ける。この

変換は $\omega=\sum_{j=1}^{n} w_j dx^j$ と表わせば (1.2) に他ならない。この様に，1階の係数 w^j はE上の線形接続を定める。(ベクトル束上の接続については，例えば [WL, Ch.III] を参照されたい。)

次に，$V=U+\sum_j(\nabla_j w^j+w_j w^j)$，$V'=U'+\cdots$ と置けば，(1.3) は $V'=G^{-1}VG$ となる。従って，VはEの各ファイバー上の線形変換(ゲージ変換という)を表わしている。

今後，次の様に表わすことにする：

$$(1.4)\qquad D=-\sum_{j,k} g^{jk}\nabla_j\nabla_k-2\sum_j w^j\nabla_j+\left(V-\sum_j\nabla_j w^j-\sum_j w_j w^j\right)$$

Dの自己共役性については次が成り立つ。

補題 1.1. Dが $C^\infty(E)$ の内積に関して形式的自己共役である為の必要十分条件は次が成立することである：

(1) w^j が定める線形接続がEのエルミート計量と両立する。

(2) VがEの各ファイバー上でエルミート変換である。

Eのユニタリな局所フレームを選べば，$r\times r$ 行列 w^j, V に対する上の2つの条件はそれぞれ次の様になる：

(1′) w^j が歪エルミート行列である。

(2′) Vがエルミート行列である。

注意 1.2. $V \equiv 0$ のとき，自己共役作用素Dは，Mのリーマン計量 g，およびE上の線形接続 $\tilde{\alpha}$ から定まるが，これは Bochner-Laplace 作用素と呼ばれている。更に，$E = M \times \mathbb{C}$ で，$V \equiv 0$，$\tilde{\alpha}$：平坦接続（$\Leftrightarrow w^j \equiv 0$）の場合が $\mathbf{D} = \Delta$（Laplace-Beltrami 作用素）である。

注意 1.3. Eが複素直線束の場合，自己共役な作用素Dは $|e| = 1$ なる局所フレームに関して

$$D = -\sum_{j,k} g^{jk} \nabla_j \nabla_k - 2i \sum_j a^j \nabla_j + \left(V + \sum_j a_j a^j - i \sum_j \nabla_j a^j\right)$$

（a^j, V：実数値）と表わされる。物理的な言い方をすれば，a^j は磁場ポテンシャル，Vはスカラー（電場など）ポテンシャルと見なせ，Dはその様な場に於ける Schrödinger 作用素といえるものである。

この様にM上のベクトル束E上で

$$\text{自己共役作用素 } D \longleftrightarrow (g, \tilde{\alpha}, V)$$

なる対応関係がある。これより次が提起される：

『Dの固有値分布を $(g, \tilde{\alpha}, V)$ の幾何学的構造との関連に於いて研究する』

ここでは $M = S^n$（n次元球面）の場合を取扱う。S^n 上の標準計量 g_0 に対する Laplace-Beltrami 作用素 Δ_0 の固有値は良く知られているように

$$\lambda_k = k(k+n-1) = \left(k+\frac{n-1}{2}\right)^2 - \frac{(n-1)^2}{4}, \quad k=0,1,2,\cdots$$

であり，それぞれは非常に縮退している。そこで，次の問題を考察することにする。

「S^n上のベクトル束Eに対して，$(g, \mathcal{D}, V)$が$\Delta_0^{\cdot}(\leftrightarrow (g_0, \text{平坦接続}, 0))$の固有値$\{\lambda_k\}$からの“ずれ”についてどのように影響を与えるか？」

2. 作用素の摂動に対する固有値の変化

まず，固有値の変化に関する簡単な一般的考察をする。

$E = S^n \times \mathbb{C}^r$ とし，次の3種の1-パラメータ変形を考える：

(I) リーマン計量： $g(t)$, $g(0) = g_0$ (S^nの標準計量)

(II) 接続行列： $\omega(t)$, $\omega(0) = 0$ (平坦接続)

(III) ゲージ変換： $V(t)$, $V(0) = 0$

ただし，$-\varepsilon < t < \varepsilon$で，それぞれ$t$に関して解析的とする。

各々の変形を行ったときの微分作用素をそれぞれ，$D_{\mathrm{I}}(t)$, $D_{\mathrm{II}}(t)$, $D_{\mathrm{III}}(t)$ とする。($D_{\mathrm{I}}(0) = D_{\mathrm{II}}(0) = D_{\mathrm{III}}(0) = \Delta_0 I_r$ である。)

作用素の解析的な変形を行ったとき，固有値，固有断面も解析的に変化することが知られている(cf. [Ka])。$\Delta_0 I_r$ の固有値 λ_k から変化した $D_L(t)$ ($L = \mathrm{I}, \mathrm{II}, \mathrm{III}$) の固有値を $\lambda_{k,j}$ ($j = 1, \cdots N_k$) とする。このとき，t に関する微分を“・”(ドット)

で表わすと，

(2.1) $\quad \dot{\lambda}_{j,k}^{(L)}(t)=\left(\dot{D}_L(t)\varphi_{j,k}^{(L)}(t),\ \varphi_{j,k}^{(L)}(t)\right) \qquad (L=\mathrm{I},\mathrm{II},\mathrm{III})$

が成り立つ．ただし，$\varphi_{j,k}^{(L)}(t)$ は $\lambda_{j,k}^{(L)}$ に対する固有断面で L^2-ノルムが1のものである。（(,) は I の場合は計量 $g(t)$ から，他の場合は g_0 から定まる内積である。） ところで，$\dot{D}_L(t)$ は I の場合：2次，II の場合：1次，III の場合：0次の微分作用素である。$C^\infty(E)$ の Sobolev ノルムを $\|u\|_\ell=\|(I+D_L(t))^{\ell/2}u\|_{L^2}$ によって定めると，一般に，m 次(擬)微分作用素 D に対して，$\|Du\|_{\ell-m}\leqq C\|u\|_\ell$ が成り立つから (2.1) より

$$|\dot{\lambda}_{j,k}^{(L)}(t)|\leqq\|\dot{D}_L(t)\varphi_{j,k}^{(L)}(t)\|_{L^2}$$

$$\leqq\begin{cases} C_t^{(\mathrm{I})}\|\varphi_{j,k}^{(\mathrm{I})}(t)\|_2=C_t^{(\mathrm{I})}\|(I+D_{\mathrm{I}}(t))\varphi_{j,k}^{(\mathrm{I})}(t)\|_0=C_t^{(\mathrm{I})}(1+\lambda_{j,k}^{(\mathrm{I})}(t)) \\ C_t^{(\mathrm{II})}\|\varphi_{j,k}^{(\mathrm{II})}(t)\|_1=C_t^{(\mathrm{II})}\|(I+D_{\mathrm{II}}(t))^{\frac12}\varphi_{j,k}^{(\mathrm{II})}(t)\|_0=C_t^{(\mathrm{II})}(1+\lambda_{j,k}^{(\mathrm{II})}(t))^{\frac12} \\ C_t^{(\mathrm{III})}\|\varphi_{j,k}^{(\mathrm{III})}(t)\|_0=C_t^{(\mathrm{III})} \end{cases}$$

（$C_t^{(L)}$：t にのみ依存する定数）

従って，$\lambda_{j,k}^{(L)}(0)=\lambda_k=k(k+n-1)$ に注意すれば次が成り立つ．

<u>命題 2.1.</u> $k\to\infty$ に於いて，

(I) $\quad |\lambda_{j,k}^{(\mathrm{I})}(t)-\lambda_k|=O(k^2)$.

(II) $\quad |\lambda_{j,k}^{(\mathrm{II})}(t)-\lambda_k|=O(k)$.

(III) $\quad |\lambda_{j,k}^{(\mathrm{III})}(t)-\lambda_k|=O(1)$.

上の命題から，摂動によって縮退した λ_k の分裂の大体の様子が分かる．区間 $[\lambda_k, \lambda_{k+1}]$ の巾は k の1次のオーダーで増加するから，計量の変形 $g(t)$ による分裂に於いては，固有値の大きなところでの分布は極めて複雑になる。そこで，変形 $g(t)$ で分裂が k の1次以下のオーダーで納まるようなものを考察する。これについて，まず次が言える。

<u>補題2.2.</u>　t をパラメータとする1次擬微分作用素 $A(t)$ で

(2.2)　$$\dot{D}_I(t) + [D_I(t), A(t)] \ (= G(t))$$

が1次以下の擬微分作用素になるものが存在すれば

$$|\lambda^{(I)}_{j,k}(t) - \lambda_k| = O(k)$$

が成り立つ。

（証明）(2.2) を使って (2.1) を書き換えると，簡単な計算で

$$\dot{\lambda}^{(I)}_{j,k}(t) = \left(G(t)\varphi^{(I)}_{j,k}(t), \varphi^{(I)}_{j,k}(t) \right)$$

となる。$G(t)$ が1次以下だから求める結論が得られる。∎

S^n の余接バンドル T^*S^n の局所正準座標を (x, ξ) とする．$D_I(t)$ の主シンボルは $H(t;x,\xi) = \sum_{j,k} g^{jk}(t;x)\xi_j\xi_k$ である．$A(t)$ の主シンボルを $a(t;x,\xi)$ とすれば，条件 (2.2) はシンボルに関して，

(2.3)　$$\dot{H}(t) + \frac{1}{i}\{H(t), a(t)\} = 0$$

となる。ただし，$\{\ ,\ \}$ は T^*S^n の標準的シンプレクティック構造 Ω に関するポアソン括弧である。（擬微分作用素については [H2], [T] など参照されたい。）

命題2.3. (2.3) を満たす $a(t)$ が存在する為の必要十分条件は各 $t\in(-\varepsilon,\varepsilon)$ に対して，計量 $g(t)$ に関する測地線が全て閉でその長さが 2π であることである。

定義2.4. コンパクト多様体上のリーマン計量が上の性質 〜〜〜 を満たすとき，$C_{2\pi}$-計量あるいは Zoll 計量といい，その様な計量を持ったリーマン多様体を $C_{2\pi}$-多様体あるいは Zoll 多様体と呼ぶ (cf. [B])。

（命題2.3の証明） $g(t)$ が $C_{2\pi}$-計量の変形であるとする。$g(t)$ の閉測地線 $\gamma_t(s)$ $(0\leqq s\leqq 2\pi)$ を $S_t^*S^n=\{(x,\xi)\in T^*S^n;\ |\xi|_{g(t)}=1\}$ へ持ち上げたものを $\tilde{\gamma}_t(s)$ とする。（$H(t)$ に対するハミルトンベクトル場 $X_{H(t)}$ (i.e. $X_{H(t)}\lrcorner\Omega=-dH(t)$) の積分曲線で $S_t^*S^n$ 上にあるものが $\tilde{\gamma}_t(s)$ 達である。）任意の t について

$\int_0^{2\pi}H(t;\tilde{\gamma}_t(s))\,ds=2\pi$ だから

$$(*)\qquad \int_0^{2\pi}\dot{H}(t;\tilde{\gamma}_t(s))\,ds=0$$

が全ての閉測地線 $\gamma_t(s)$ に対して成立する。$(x,\xi)\in T^*S^n$ に対して

$$a(t;x,\xi)=\frac{|\xi|_{g(t)}}{2\pi i}\int_0^{2\pi}\left(\int_0^s \dot{H}(t;\tilde{\gamma}_t(\tau))\,d\tau\right)ds$$

とおく。ただし，$\tilde{\gamma}_t(0)=\xi/|\xi|_{g(t)}$．このa(t)に対して，(*)に注意すれば，(2.3)が成立することが言える。逆に，(2.3)を満たすa(t)について，$\frac{1}{i}a(t)$に対するハミルトンベクトル場Ξ_tを考えると，(2.3)より

(**) $\qquad \dot{H}(t)=\Xi_t H(t)$

が成り立つ。tに依存するベクトル場Ξ_tを積分すると，tをパラメータとする$T^*S^n\setminus 0$の正準変換χ_t (i.e. $\chi_t^*(\Omega)=\Omega$)が得られる。そして(**)より　$H(t)=\chi_t^* H(0)$　が成り立つ。これより，$\chi_{t*}(X_{H(t)})=X_{H(0)}$となり，H(t)のハミルトン流(測地流)の全ての軌道が正準変換χ_tによってH(0)の測地流の軌道に1対1に写像され，g(t)の測地線が全て閉で長さが2πであることが分かる。∎

ξに関して正1次同次な関数$a(t;x,\xi)$を主シンボルに持つ1次擬微分作用素A(t)が存在する。更に，その様なA(t)の中でうまく選べば，(2.2)式のG(t)の次数を0次まで落とせることが容易に分かる。(A(t)のsubprincipal symbolをうまく選ぶ。)従って，補題2.2と命題2.3を合せて，次が言えた。

<u>定理2.5.</u>　任意の t に対して $g(t)$ が $C_{2\pi}$-計量ならば

(2.4)　　$|\lambda_{j,k}^{(I)}(t) - \lambda_k| = O(1) \quad (k \to \infty)$

が成り立つ。

<u>注意2.6.</u>　上の定理は $g(t)$ が t について解析的でなく，C^∞ 級の仮定で証明できる（cf. §4）。逆：「(2.4) が成り立てば $g(t)$ は $C_{2\pi}$-計量である.」が成立することも知られている（[D-G, Theorem 3.2]）。

<u>注意2.7.</u>　S^n 上の $C_{2\pi}$-計量の例としては，Zoll が S^2 について見つけたものを Weinstein が高次元に拡張した次の様なものが知られている（cf. [B, Ch. 4]）：$\mathbb{R}^{n+1} \supset S^n$ の座標として，$(\theta, \bar{x}) \in [0,\pi] \times S^{n-1}$ をとる。（$\theta = 0, \pi$ がそれぞれ北極，南極に対応し，赤道（$\theta = \pi/2$）が S^{n-1} である。）C^∞ 関数 $h : [-1,1] \to (-1,1)$ で $h(-1) = h(1) = 0$，$h(-\lambda) = -h(\lambda)$ を満たすものを考え，

$$g_h = (1 + h(\cos\theta))^2 d\theta^2 + \sin^2\theta \, \bar{g}_0$$

（$\theta \in (0,\pi)$，$\bar{g}_0$：S^{n-1} 上の標準計量）とすれば，これは S^n 上の $C_{2\pi}$-計量に拡張される。また，最近，Kolokol'tsov [Ko] は Zoll の例とは異なる S^2 上の C_l-計量について，測地流の第一積分との関係に於いて論じている。

3. 固有値の漸近分布

ここでは，作用素の"*symbol calculus*"によって，固有値分布の漸近的性質が明らかにされる模様を述べる。

$P : C^\infty(E) \to C^\infty(E)$ を自己共役な楕円型1次擬微分作用素で次の条件を満たすものとする（ここでは，一般の $E \to (M, g)$ で考える）：

(P.1) P の主シンボル：$p(x,\xi) = \left(\sum_{j,k} g^{jk}(x)\xi_j\xi_k\right)^{\frac{1}{2}} I_r = |\xi|_{g(x)} \cdot I_r$

(P.2) P のスペクトル：$\{k+\beta\,;\ \beta:\text{定数},\ k = n_0, n_0+1, n_0+2, \cdots\}$
（n_0：ある整数）。

$Q : C^\infty(E) \to C^\infty(E)$ をユニタリ，または自己共役な0次擬微分作用素で，P と可換なものとする。

$k+\beta$ に対する P の固有断面を $\varphi_j^{(k)}$ $(j = 1, \cdots, N_k,\ k \geqq n_0)$ とすると，Q と P は可換だから

$$Q\varphi_j^{(k)} = \mu_j^{(k)}\varphi_j^{(k)}, \quad \mu_j^{(k)} \in \mathbb{C}$$

が成り立つ。$S = \{\mu_j^{(k)}\,;\ j = 1, \cdots, N_k,\ k \geqq n_0\}$ とすれば，

$$S \subset S^1 = \{z \in \mathbb{C}\,;\ |z| = 1\} \quad (Q：ユニタリ)$$

$$S \subset \mathbb{R} \quad (Q：自己共役)$$

である。$S_k = \{\mu_j^{(k)}\,;\ j = 1, \cdots, N_k\}$ の $k \to \infty$ に於ける漸近分布の様子がQのシンボルによって以下の様に分かる：　Qの主シンボル $\sigma(Q)$ は各 $(x,\xi) \in T^*M$ に対してファイバー E_x の線形変換を対応させる。その固有値を $\sigma_1(x,\xi), \cdots, \sigma_r(x,\xi)$ とする。T^*M の *Liouville* 測度から導びかれる $S^*M(=\{(x,\xi)\,;\ |\xi|_{g(x)} = 1\})$

上の体積要素を dm とする。このとき，次が言える。

<u>命題 3.1.</u>　ρ を実数値関数で，$\rho\in C^\infty(S^1)$ (Q：ユニタリ)，または $\rho\in C^\infty(\mathbb{R})$ (Q：自己共役) とする。このとき，

$$\sum_{j=1}^{N_k}\rho(\mu_j^{(k)}) = C_0(\rho)k^{n-1}+o(k^{n-1}) \qquad (k\to\infty) \tag{3.1}$$

が成り立つ．ただし，

$$\begin{aligned} C_0(\rho) &= (2\pi)^{-n}\int_{S^*M}\mathrm{Trace}\,\rho(\sigma(Q)(x,\xi))\,dm \\ &= (2\pi)^{-n}\int_{S^*M}\left(\sum_{j=1}^{r}\rho(\sigma_j(x,\xi))\right)dm\,. \end{aligned}$$

証明は Hörmander [H1] に沿って行なわれる。

Q のスペクトル分解によって，C^∞ 関数 ρ に対して，$\rho(Q)$ が定義される．

<u>補題 3.2.</u>　$\rho(Q)$ は 0 次擬微分作用素で，主シンボルは $\rho(\sigma(Q))$ で与えられる．

(証明)　例えば [T, p.300] ∎

$P_0 = P-\beta$ とし，

$$\hat{\theta}_\rho(t) = \mathrm{Trace}\left[\rho(Q)\exp(-itP_0)\right]$$

$$= \sum_{k=n_0}^{\infty} \sum_{j=1}^{N_k} (\rho(Q)\exp(-itP_0)\varphi_j^{(k)}, \varphi_j^{(k)})$$

$$= \sum_{k=n_0}^{\infty} a_k e^{-ikt}, \qquad a_k = \sum_{j=1}^{N_k} \rho(\mu_j^{(k)})$$

を考える。$\hat{\theta}_\rho(t)$ は超関数で,

$$\theta_\rho(\lambda) = \sum_{k \geqq n_0} a_k \delta(\lambda - k)$$

のフーリエ変換である。

$U(t) = \exp(-itP_0)$ は各 $t \in \mathbb{R}$ に対してユニタリ作用素で核が, S^n の局所座標, E の局所フレームに関して

$$U(t,x,y) = (2\pi)^{-n} \int_{\mathbb{R}^n} e^{i\varphi(t,x,\xi,y)} u(t,x,\xi,y)\, d\xi$$

の形で与えられるフーリエ積分作用素である (cf. [H1],[H2],[Tr]). ここで, φ は相関数と呼ばれる ξ について正1次同次な実数値関数であり, u は振幅関数と呼ばれ, $r \times r$ 行列値関数で

$$u(t,x,\xi,y) \sim \sum_{j=0}^{\infty} u_j(t,x,\xi) \quad (|\xi| \to \infty)$$

(u_j : ξ について正 $-j$ 次同次) なる漸近展開を持つ。方程式:

$$\frac{1}{i}\frac{\partial U}{\partial t} + P_0 U = 0, \quad U\big|_{t=0} = I_r$$

より, φ および u_j は次の様な方程式系を満たす:

$$(3.2) \quad \begin{cases} \dfrac{\partial \varphi}{\partial t} + p\left(x, \dfrac{\partial \varphi}{\partial x}\right) = 0 & \text{(アイコナール方程式)} \\ \varphi(0,x,\xi,y) = (x-y)\cdot\xi + O(|x-y|^2|\xi|) \end{cases}$$

$$(3.3) \quad \begin{cases} \mathcal{L} u_j = \mathcal{F}_j(u_0, u_1, \cdots, u_{j-1}) & \text{(輸送方程式)} \\ u_0(0,x,\xi) = I_r, \quad u_j(0,x,\xi) = 0 \ (j \geqq 1). \end{cases}$$

1階偏微分方程式 (3.2) は, $|t|$ が十分小さいとき,

$$\varphi(t,x,\xi,y)=\psi(x,\xi,y)-tp(y,\xi),$$

$$\psi(x,\xi,y)=(x-y)\cdot\xi+O(|x-y|^2|\xi|)\quad(x\to y)$$

という解をもつことが分かる [H1, p.206].

補題 3.2 に注意すれば, 作用素 $\rho(Q)\exp(-itP_0)$ も 0 次フーリエ積分作用素で, 核が

$$(2\pi)^{-n}\int e^{i\varphi(t,x,\xi,y)}s(t,x,\xi,y)\,d\xi$$

$$s(t,x,\xi,y)=e^{-i\varphi(t,x,\xi,y)}q(x,D_x)\left(e^{i\varphi(t,x,\xi,y)}u(t,x,\xi,y)\right)$$

で与えられる。ただし, $\rho(Q)=q(x,D_x)$ (0 次擬微分作用素) で,

$$s(t,x,\xi,y)\sim\sum_{j=0}^{\infty}s_j(t,x,\xi,y)\quad(s_j:\xi \text{ について } -j \text{ 次同次})$$

と漸近展開される。特に,

$$s_0(0,x,\xi,y)=\sigma(\rho(Q))(x,\xi)=\rho(\sigma(Q))(x,\xi).$$

さて, $k\to\infty$ に於ける $a_k=\sum_{j=1}^{N_k}\rho(\mu_j^{(k)})$ の挙動を調べる.

$$\Theta_\rho(\lambda)=\int_{-\infty}^{\lambda}\theta_\rho(\nu)\,d\nu=\sum_{k\leqq\lambda}a_k$$

とおく。η を正値急減少関数で, $\hat{\eta}$ (η のフーリエ変換) が原点の十分小さな近傍に台を持ち, $\hat{\eta}(0)=1$ となるものとすると,

$$\begin{aligned}
&\int_{-\infty}^{\infty}\eta(\lambda-\mu)\Theta_\rho(\mu)\,d\mu\\
&=\int_{-\infty}^{\lambda}\left(\int_{-\infty}^{\infty}\eta(\nu-\mu)\theta_\rho(\mu)\,d\mu\right)d\nu\\
&=(2\pi)^{-1}\int_{-\infty}^{\lambda}\left(\int_{-\infty}^{\infty}\hat{\eta}(t)\hat{\theta}_\rho(t)e^{it\nu}\,dt\right)d\nu\\
&=(2\pi)^{-n-1}\,\mathrm{Trace}\int_{-\infty}^{\lambda}\left(\int\hat{\eta}(t)s(t,x,\xi,x)e^{it(\nu-p(x,\xi))}\,d\xi\,dx\,dt\right)d\nu
\end{aligned}$$

$$= (2\pi)^{-n}\,\mathrm{Trace}\int_{-\infty}^{\lambda}\Big(\int R(x,\nu-p(x,\xi),x,\xi)\,d\xi\,dx\Big)d\nu\,. \quad ※$$

ただし， $R(x,\sigma,y,\xi)=(2\pi)^{-1}\int_{-\infty}^{\infty}\hat{\eta}(t)S(t,x,\xi,y)e^{it\sigma}dt$ である。

$R(x,\sigma,y,\xi)$ は σ に関して急減少であり，

$$\int_{-\infty}^{\infty}R(x,\sigma,y,\xi)d\sigma=\hat{\eta}(0)S(0,x,\xi,y)=S_0(0,x,\xi,y)=\rho(\sigma(Q))(x,\xi)\,.$$

ここで，

$$R_1(x,\tau,y,\xi)=\begin{cases}\int_{-\infty}^{\tau}R(x,\sigma,y,\xi)d\sigma & (\tau<0)\\ \int_{-\infty}^{\tau}R(x,\sigma,y,\xi)d\sigma-\rho(\sigma(Q))(x,\xi) & (\tau\geqq 0)\end{cases}$$

と置けば，※式は

$$(2\pi)^{-n}\,\mathrm{Trace}\int_{p(x,\xi)\leqq\lambda}\rho(\sigma(Q))(x,\xi)\,d\xi\,dx$$
$$+(2\pi)^{-n}\,\mathrm{Trace}\int_{\mathbb{R}^n}R_1(x,\lambda-p(x,\xi),x,\xi)\,d\xi\,dx$$

と書ける。定義より $R_1(x,\tau,y,\xi)$ は τ について急減少だから，

$^{\forall}N$ に対して，

$$|第2項|\leqq C\int(1+|\lambda-\sigma|)^{-N}dm(\sigma)\quad(m(\sigma):=vol\{(x,\xi);\,p(x,\xi)\leqq\sigma\}).$$

$p(x,\xi)$ が ξ に関して正1次同次だから，$|dm/d\sigma|\leqq C'\sigma^{n-1}$ である。

このことから，$|第2項|\leqq C(1+|\lambda|)^{n-1}$ が言える。従って，

$$\int_{-\infty}^{\infty}\eta(\lambda-\mu)\Theta_\rho(\mu)d\mu$$
$$=(2\pi)^{-n}\,\mathrm{Trace}\int_{p(x,\xi)\leqq\lambda}\rho(\sigma(Q))(x,\xi)\,d\xi\,dx+O(\lambda^{n-1})$$
$$=(2\pi)^{-n}\,\mathrm{Trace}\int_0^{\lambda}r^{n-1}dr\int_{p(x,\xi)=1}\rho(\sigma(Q))(x,\xi)\,dm+O(\lambda^{n-1})$$
$$=\frac{(2\pi)^{-n}}{n}\Big[\mathrm{Trace}\int_{p(x,\xi)=1}\rho(\sigma(Q))(x,\xi)\,dm\Big]\lambda^n+O(\lambda^{n-1})\,.$$

ここで，$\rho \geqq 0$ の場合を考えれば，$\Theta_\rho(\mu) \geqq 0$ だから，

$\int_{-\infty}^{\infty} \eta(\lambda-\mu)\Theta_\rho(\mu)d\mu = O(\lambda^n)$ より，

$$\Theta_\rho(\lambda+1) - \Theta_\rho(\lambda) \leqq C(1+|\lambda|)^{n-1}$$

$$|\Theta_\rho(\lambda+\mu) - \Theta_\rho(\lambda)| \leqq C(1+|\lambda|+|\mu|)^{n-1}(1+|\mu|)$$

が言える．ゆえに，

$$\begin{aligned} &|\Theta_\rho(\lambda) - \int \eta(\lambda-\mu)\Theta_\rho(\mu)\,d\mu| \\ &\leqq \int |\Theta_\rho(\lambda) - \Theta_\rho(\lambda-\mu)|\,\eta(\mu)\,d\mu \\ &\leqq C\int (1+|\lambda|+|\mu|)^{n-1}(1+|\mu|)\,\eta(\mu)\,d\mu \leqq C'(1+|\lambda|)^{n-1} \end{aligned}$$

結局，

$$\Theta_\rho(\lambda) = \frac{(2\pi)^{-n}}{n}\left[\mathrm{Trace}\int_{p(x,\xi)=1} \rho(\sigma(Q))(x,\xi)\,dm\right]\lambda^n + O(\lambda^{n-1})$$

が成り立つ．これより，

$$\begin{aligned} a_k &= \sum_{j=1}^{N_k} \rho(\mu_j^{(k)}) = \Theta_\rho(k) - \Theta_\rho(k-1) \\ &= (2\pi)^{-n}\left(\mathrm{Trace}\int_{S^*M} \rho(\sigma(Q))(x,\xi)\,dm\right)\lambda^{n-1} + o(\lambda^{n-1}). \end{aligned}$$

一般の ρ に対しても，$\rho = \rho_+ - \rho_-$ （$\rho_+(x) = \max(\rho(x), 0)$，$\rho_-(x) = -\min(\rho(x), 0)$）と考えることによって公式（3.1）が成り立つことが示される。■

特に，$\rho \equiv 1$ とすれば，次が得られる．

系 3.3. $N_k = (2\pi)^{-n} \cdot r \cdot \mathrm{vol}(S^*M)\,k^{n-1} + o(k^{n-1})$.

ところで，${}^{\forall}t\in\mathbb{R}$ に対して，$U(t)=\exp(-itP_0)$ の相関数 φ は，アイコナール方程式（3.2）を解いて，

$$\varphi(t,x,\xi,y)=\varphi(0,\Phi_{-t}(x,\xi),y)$$

となる。ただし，Φ_t は $p(x,\xi)=|\xi|_{g(x)}$ に対するハミルトン流即ち測地流である。（または方程式（3.2）の特性帯と言ってもよい。）$U(2\pi)$ が恒等写像（即ち擬微分作用素）であるから，$\Phi_{-2\pi}(x,\xi)=(x,\xi)$ が ${}^{\forall}(x,\xi)\in T^*M\setminus 0$ に対して成立しなければならない。この様に，条件（P.1），（P.2）を満たす作用素 P が存在する為には，(M,g) の各測地線が全て閉で，各長さの整数倍が 2π であることが必要条件である。

4．線形接続と固有値分布

(S^n,g)：$C_{2\pi}$-多様体

E：S^n 上の C^∞-エルミート計量を持つ複素ベクトル束

$\tilde{\alpha}$：E 上のエルミート計量と両立する線形接続

V：E のエルミートゲージ変換

という状況を考える。ただし，次の仮定を置く。

仮定4.1. S^n の $C_{2\pi}$-計量の C^∞，1-パラメータ族 $g(t)$ $(0\leqq t\leqq 1)$ で，$g(0)=g_0$（標準計量），$g(1)=g$ となるものが存在する。

§3, 命題3.1 を適用して, 作用素

$$D = -\sum g^{jk}\nabla_j\nabla_k - 2\sum w^j\nabla_j + \left(V - \sum\nabla_j w^j - \sum w_j w^j\right)$$

の固有値分布の漸近的性質を明らかにする.

D+C が正値作用素になるように適当な正定数 C をとり, $D' = (D+C)^{1/2}$ とおく. D'は自己共役, 正値, 楕円型, 1次擬微分作用素で, $\sigma(D')(x,\xi) = |\xi|_{g(x)}$ である (cf. [S])。そして,

$$Q_1 = \exp(-2\pi i D')$$

と定義すれば, Q_1はユニタリであり, 更に (§3 の $\exp(-itP_0)$ についての議論と同様に) $\sigma(D')$ から定義されるアイコナール方程式の特性帯 (測地流) が全く周期 2π だから, 0次擬微分作用素である。§3 の議論に於ける P, Q のうち, Q としてとりあえず Q_1 を考える.

先ず, Q_1 の主シンボル $\sigma(Q_1)$ を計算する。その為に, §3 と同様に, フーリエ積分作用素 $K(t) = \exp(-itD')$ の核

$$K(t,x,y) = (2\pi)^{-n}\int_{\mathbb{R}^n} e^{i\phi(t,x,\xi,y)} k(t,x,\xi,y)\,d\xi$$

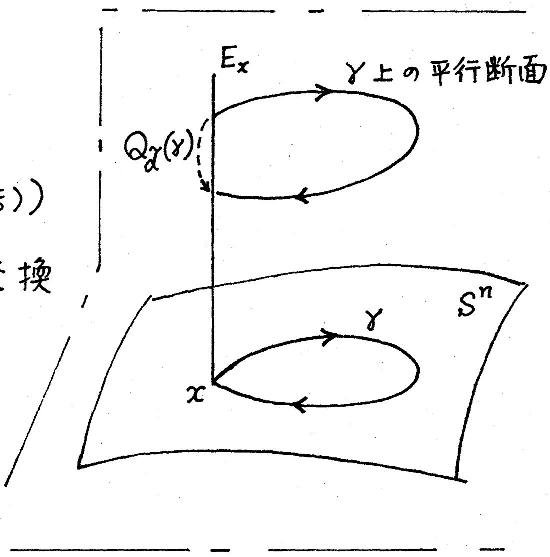
$$k(t,x,\xi,y) \sim \sum_{j=0}^{\infty} k_j(t,x,\xi)$$

に対して, $k_0(2\pi, x, \xi)$ を計算すればよい。この計算は, k_0 に対する輸送方程式:

$$\mathcal{L}k_0 = \frac{1}{i}\frac{\partial}{\partial t}k_0 + Lk_0 = 0, \qquad k_0\big|_{t=0} = I_r$$

(ただし, L は Φ および D' のシンボル $\sigma_T(D') \sim p + p_0 + p_{-1}$

$+\cdots$ の中の p, p_0 に関係する1階線形微分作用素）を特性帯に沿って解くことによって得られる。（詳細な計算は [Ku 3] を参照されたい。） $\gamma(x,\xi)$ を (S^n, g) の閉測地線 $\gamma(t)$ で初期条件：$\gamma(0)=x$, $\dot{\gamma}(0)=(\xi/|\xi|)^{\#}$ （#：g による同型 $T^*S^n \to TS^n$）を満たすものとし，接続 $\tilde{d}$ の $\gamma(t)$ に沿うホロノミーを $Q_{\tilde{d}}(\gamma(x,\xi))$ で表わす。$Q_{\tilde{d}}(\gamma(x,\xi))$ はファイバー E_x のユニタリ変換である。また，T^*S^n に於ける特性帯 $\{\tilde{\gamma}(t) : 0 \leqq t \leqq 2\pi\}$ に沿う Maslov 指数を α とする。



命題 4.2. $\quad \sigma(Q_1)(x,\xi) = e^{-\pi i\alpha/2} Q_{\tilde{d}}(\gamma(x,\xi)) \quad (\alpha = 2(n-1))$.

補足 4.3. 輸送方程式の作用素 L の係数が D' の subprincipal symbol：

$$p_0 - \frac{1}{2i}\sum_j \frac{\partial^2 p}{\partial x^j \partial \xi_j} = -\frac{i}{|\xi|}\sum g^{jk} w_j \xi_k$$

に関係しており，結果として，$\sigma(Q_1)$ が接続に関係する量で表わされる。また，輸送方程式を特性帯に沿って解いてゆくとき，焦点では，Maslov のアイデア（cf. [M-F]）に従って，フーリエ変換でそこを越える訳であるが，その際，ある種の補

正項が付く。これが因子 $e^{-\pi i\alpha/2}$ の所以である。仮定4.1があれば，α は標準計量 g_0 の場合と等しく $2(n-1)$ である。

ホロノミーとの関係をすっきりさせる為，$Q=e^{\pi i\alpha/2}Q_1$ とする。

$$\sigma(Q)(x,\xi)=Q_\gamma(\gamma(x,\xi)).$$

ユニタリ変換 $Q_\gamma(\gamma(x,\xi))$ の固有値を $\sigma_1(x,\xi),\cdots,\sigma_r(x,\xi)$ とする。これらは S^1 の点である。次の仮定を置く。

<u>仮定4.4.</u> $\Sigma_\gamma:=\{\sigma_1(x,\xi),\cdots,\sigma_r(x,\xi)\,;\,(x,\xi)\in T^*S^n\setminus 0\}\neq S^1$.

$e^{2\pi i\delta}\in S^1\setminus\Sigma_\gamma$ $(0\leqq\delta<1)$ とし，

$$J_k=(\bar\lambda_{k-1}+\delta C_{k-1},\ \bar\lambda_k+\delta C_k]\subset\mathbb{R}$$

とする。ただし，

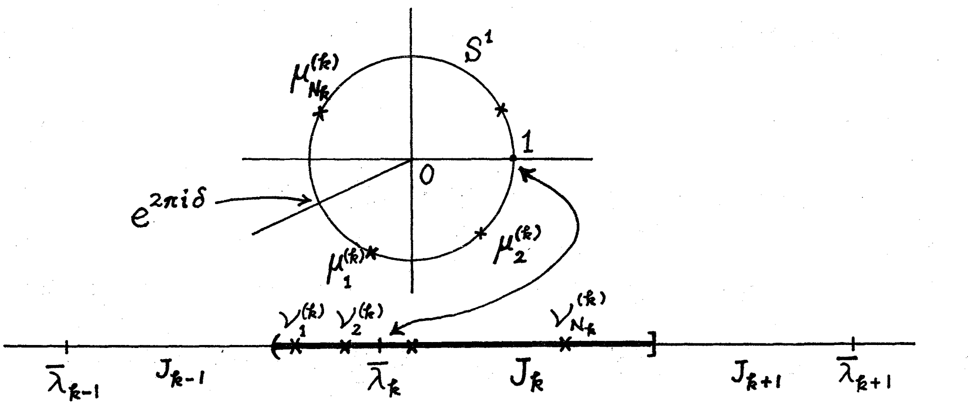
$$\bar\lambda_k=\left(k+\frac{\alpha}{4}\right)^2=\lambda_k+\frac{(n-1)^2}{4},\quad k=0,1,2,\cdots$$

$$C_k=\bar\lambda_{k+1}-\bar\lambda_k=2k+(\alpha/2)+1.$$

Dの固有値で，区間 J_k に含まれるものを $\nu_1^{(k)},\cdots,\nu_{N_k}^{(k)}$ とする。更に，

$$\mu_j^{(k)}=\begin{cases}\exp\left(2\pi i\,\dfrac{\nu_j^{(k)}-\bar\lambda_k}{C_{k-1}}\right) & (\nu_j^{(k)}<\bar\lambda_k)\\[2ex] \exp\left(2\pi i\,\dfrac{\nu_j^{(k)}-\bar\lambda_k}{C_k}\right) & (\nu_j^{(k)}\geqq\bar\lambda_k)\end{cases}$$

と置く（次図参照）。



Dの固有値 $\nu_j^{(k)}$ に対する固有断面を $\varphi_j^{(k)}$ とする．

$$Q\varphi_j^{(k)} = \mu_j'^{(k)}\varphi_j^{(k)}, \quad \mu_j'^{(k)} \in S^1$$

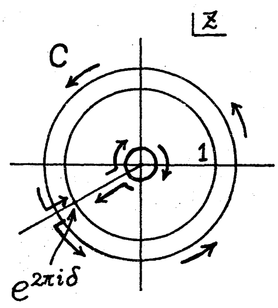
とすると，Qの定義から簡単な評価によって次が言える。

補題4.5. j, k に依らない定数Mが存在して，

$$|\arg \mu_j^{(k)} - \arg \mu_j'^{(k)}| \leq \frac{M}{k} \quad (\arg z : z\text{の偏角}).$$

§3の議論を適用する為に条件(P.1),(P.2)を満たすPが必要である．仮定4.4から $e^{2\pi i\delta}$ の近傍にはQの固有値が有限個しかないことが言える。そこで，Dunford積分：

$$R = \frac{1}{2\pi i}\mathrm{Log}\,Q = \left(\frac{1}{2\pi i}\right)^2\int_C \mathrm{Log}\,z\,(z-Q)^{-1}dz$$



によって作用素Rを定義する。Cは図の様な閉曲線である．このとき，Rは0次擬微分作用素で

$$D'\varphi_j^{(k)} = \bar{\mu}_j^{(k)}\varphi_j^{(k)}$$

としたとき，

$$R\varphi_j^{(k)} = -\left\{\bar{\mu}_j^{(k)} - \left(k + \frac{\alpha}{4}\right)\right\}\varphi_j^{(k)}$$

が成り立つ。従って，$P = D' + R$ とおけば，条件(P.1),(P.2)が満足される。この様にして，命題3.1と補題4.5より次が言えた。

定理4.6. $k \to \infty$ に於いて，

$$\begin{aligned}\sum_{j=1}^{N_k} \rho(\mu_j^{(k)}) &= (2\pi)^{-n}\left[\mathrm{Trace}\int_{S^*S^n} \rho(Q_\gamma(\gamma(x,\xi)))\,dm\right]k^{n-1} + o(k^{n-1}) \\ &= (2\pi)^{-n}\left[\int_{S^*S^n}\left(\sum_{j=1}^{r} \rho(\sigma_j(x,\xi))\right)dm\right]k^{n-1} + o(k^{n-1}).\end{aligned}$$

（漸近展開の第1項は接続のホロノミーにのみ依存する。）

この定理は，雑な言い方をすれば，『S^1に於ける$\{\mu_j^{(k)}\}$の分布は，$k \to \infty$に於いて，(S^n, g)の閉測地線に沿うホロノミーの固有値分布$\{\sigma_j(x,\xi)\}$に収束する。』ことを主張する。

次に，固有値分布について次の定義をする。

定義4.7. $a^{(1)}, \cdots, a^{(s)}$を$[0, 1)$の点とし，

$$\bar{\lambda}_k^{(m)} = \bar{\lambda}_k + C_k a^{(m)} \quad (m = 1, \cdots, s)$$

とおく。作用素Dのスペクトルが，タイプ$\{a^{(1)}, \cdots, a^{(s)}\}$の

クラスターを成す，とは，ある正定数Mが存在して次が成立することである：

(1) 集合 $I_m=\bigcup_{k=0}^{\infty}[\bar{\lambda}_k^{(m)}-M,\ \bar{\lambda}_k^{(m)}+M]$ の中にDの固有値が無限個含まれる。

(2) Dの固有値は全て $\bigcup_{m=1}^{s} I_m$ に含まれる。

定理4.6（＋若干の考察）により，次が示される。

定理 4.8. Dのスペクトルがタイプ $\{a^{(1)},\cdots,a^{(s)}\}$ のクラスターを成す為の必要十分条件は

(4.1) $$\Sigma_\gamma=\{e^{2\pi i a^{(1)}},\cdots,e^{2\pi i a^{(s)}}\}$$

が成り立つことである。

注意 4.9. $Q_\gamma(\gamma(x,\xi))$ の性質に注意すれば，上の定理より，クラスターのタイプ $A=\{a^{(1)},\cdots,a^{(s)}\}$ について，次が分かる。

(1) $s\leqq$ Eのファイバーの次元

(2) $a^{(m)}(\neq 0)\in A \Rightarrow 1-a^{(m)}\in A$

(3) Eが直線束なら，クラスターのタイプは $\{0\}$ または $\{1/2\}$ に限る。

例 4.10. S^2 上の複素直線束の同値類を $\{E_m;\ m(\in\mathbb{Z})$: Chern数$\}$

とする。(S^2, g_0)の面積要素（2次形式）をΘとすると，各E_m上には，曲率形式が$\Omega_m = im\Theta/2$で与えられるような接続$\tilde{d}_m$（調和接続）が一意的に存在する。$(S^2, g_0; E_m, \tilde{d}_m)$に対応するBochner-Laplace作用素のスペクトルは具体的に計算できて，

$$\left\{ \left(k + \frac{|m|+1}{2}\right)^2 - \frac{m^2+1}{4} \ ; \ k = 0, 1, 2, \cdots \right\}$$

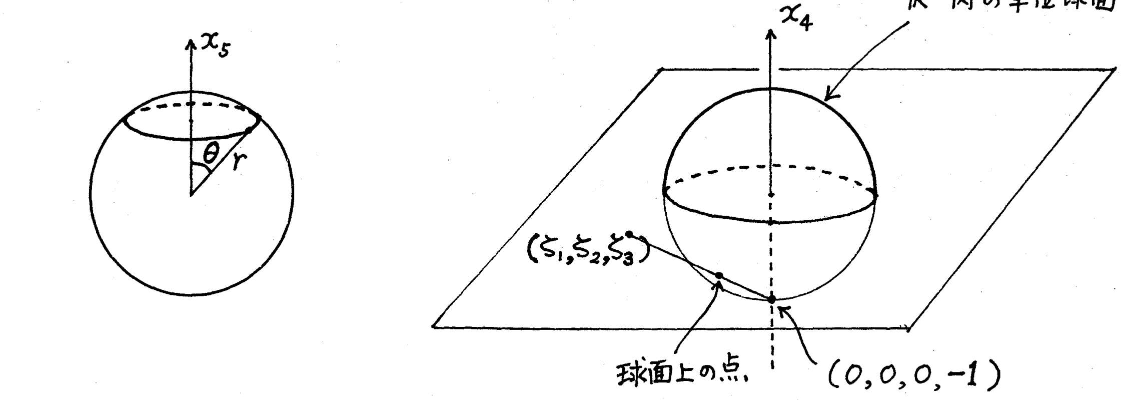
となる（[Ku1]および図参照）。また，ホロノミーについては任意の閉測地線γに対して，

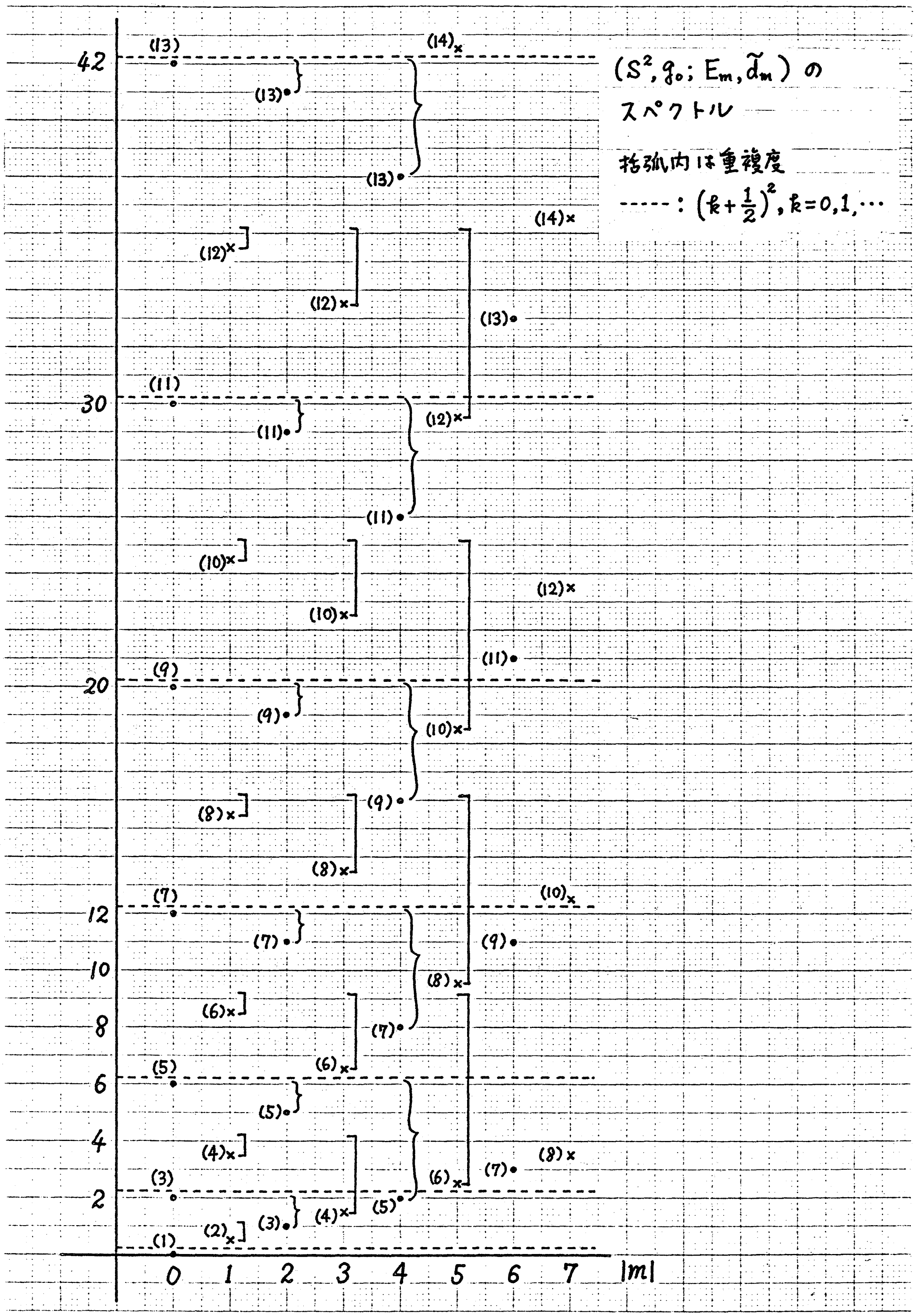
$$Q_{\tilde{d}_m}(\gamma) = (-1)^m$$

である。この様に，$\tilde{d}_m$に対するスペクトルは，タイプ$\{0\}$（m：偶数），または，タイプ$\{1/2\}$（m：奇数）のクラスターを成す。

例 4.11（YangのSU(2)-モノポール[Y]）．$\mathbb{R}^5 = \{(x^1, \cdots, x^5)\}$の座標系として，次の様な$(\zeta_1, \zeta_2, \zeta_3, \theta, r)$をとる：

$$\begin{cases} x_i = (r \sin\theta) 2\zeta_i (1 + |\zeta|^2)^{-1} & (i = 1, 2, 3) \\ x_4 = (r \sin\theta)(1 - |\zeta|^2)(1 + |\zeta|^2)^{-1} \\ x_5 = r\cos\theta \end{cases}$$




$(S^2, g_0; E_m, \tilde{d}_m)$ の
スペクトル —
括弧内は重複度
-----: $(k+\frac{1}{2})^2$, $k=0,1,\cdots$
42
30
20
12
10
8
6
4
2
0 1 2 3 4 5 6 7 |m|

単位球面 $S^4(\subset \mathbb{R}^5)$ は $r=1$ で与えられる．

$$S^+=\{(\zeta_1,\zeta_2,\zeta_3,\theta)\in S^4;\ 0\leqq\theta<\tfrac{\pi}{2}+\varepsilon\}\quad (0<\varepsilon<\tfrac{\pi}{2})$$

$$S^-=\{(\zeta_1,\zeta_2,\zeta_3,\theta)\in S^4;\ \tfrac{\pi}{2}-\varepsilon<\theta\leqq\pi\}$$

とし（$S^4=S^+\cup S^-$），S^+, S^- 上の $su(2)$-値1次微分形式を，それぞれ，

$$\omega^+=-\frac{1}{2}(1-\cos\theta)dg\,g^{-1},\quad \omega^-=\frac{1}{2}(1+\cos\theta)g^{-1}dg$$

とする．ただし，

$$g=g(\zeta,\theta)=\frac{1}{1+|\zeta|^2}\begin{bmatrix}1-|\zeta|^2+2i\zeta_3 & 2\zeta_2+2i\zeta_1\\ -2\zeta_2+2i\zeta_1 & 1-|\zeta|^2-2i\zeta_3\end{bmatrix}\in SU(2)$$

Eを $\mathbb{C}^2$ をファイバーとする S^4 上のエルミートベクトル束で $S^+\cap S^-$ に於ける変換関数が $g(\zeta,\theta)$ であるものとする．このとき，$su(2)$-値形式 ω^+,ω^- はE上の線形接続（$\tilde{d}_1$ と表わす）を定義する。この接続 $\tilde{d}_1$ は Yang-Mills 接続（調和接続）の最も簡単なもの（<u>1-インスタントン</u>のひとつ）である。（Yang-Mills 接続については，例えば [S-T] 等を参照されたい。）

更に，ホロノミーについて，(S^4,g_0) の任意の閉測地線 γ に対して，

$$Q_{\tilde{d}_1}(\gamma)=-I_2$$

が成り立つことが分かる。この様に，$\tilde{d}_1$ に対する Bochner-Laplace作用素のスペクトルはタイプ{1/2}のクラスターを成す。

<u>問題 4.12.</u>　スペクトルがクラスターを成す為の条件 (4.1) が満たされる接続はどの様なものか。

<u>問題 4.13.</u>　$C_{2\pi}$-多様体 ((S^n, g_0), $(\mathbb{C}P^n, g_0)$, $\cdots$) 上のベクトル束に於ける Yang-Mills 接続は条件 (4.1) を満足するか。

問題 4.12 については，(S^n, g_0) 上の複素直線束の場合，接続 $\tilde{\alpha}$ に対するスペクトルがクラスターを成す為の必要十分条件は，$\tilde{\alpha}$ の曲率形式 $d\omega$ が "odd" である，即ち，対蹠写像 $\tau: S^n \to S^n$ に対して，$\tau^*(d\omega) = -d\omega$ が成り立つ，ことである ([Ku2, Theorem 4.5])。

5. <u>$\Delta + V$ の固有値分布</u>

§4 で扱った作用素 D について，接続 $\tilde{\alpha}$ のホロノミーが任意の閉測地線に対して恒等変換である場合，スペクトルはタイプ {0} のクラスターを成す。即ち，ある定数 M が存在し，固有値は $\bigcup_{k=0}^{\infty} [\lambda_k - M, \lambda_k + M]$ に含まれる。このとき，区間 $[\lambda_k - M, \lambda_k + M]$ に含まれる固有値 $\{\nu_j^{(k)}; 1 \leq j \leq N_k\}$ の分布状況を考察することが次の問題になる。この際，当然，D の 0 次の項の影響が現われてくる。

ここでは，簡単に，次の場合を考える：

$$\left.\begin{array}{l}(S^n, g):\ C_{2\pi}\text{-多様体（仮定4.1を満たすとする）}\\ E = S^n \times \mathbb{C}\\ D = \Delta + V \quad \text{(i.e. E上の平坦接続の場合)}\end{array}\right\}$$

以下，作用素 D', Q, P, $\cdots$ 等は §4 と同様に定義する。0次擬微分作用素 Q について，この場合，$\sigma(Q) = 1$ である。従って，$Q = I + Q_{-1}$ と書ける。ここで，Q_{-1} は -1 次擬微分作用素である。ところで，

$$R = \frac{1}{2\pi i} \operatorname{Log}(I + Q_{-1}) = \frac{1}{2\pi i} \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k+1} \frac{Q_{-1}^k}{k}$$

だから，R は -1 次で，主シンボルは $\sigma(R) = \sigma(Q_{-1})/2\pi i$ である。自己共役な0次擬微分作用素として，

$$Q' = -2PR + \frac{(n-1)^2}{4} - c$$

を考える。

補題 5.1. $\sigma(Q')(x,\xi) = -\dfrac{|\xi|}{\pi i}\sigma(Q_{-1})(x,\xi) + \dfrac{(n-1)^2}{4} - c$.

さて，$\mu_j^{(k)} = \nu_j^{(k)} - \lambda_k$ とし，

$$Q'\varphi_j^{(k)} = \mu_j'^{(k)}\varphi_j^{(k)}, \quad \mu_j'^{(k)} \in \mathbb{R}$$

とする。簡単な評価により，次が言える。

補題 5.2. j, k に依らない定数 C が存在して

$$|\mu_j^{(k)} - \mu_j'^{(k)}| \leq \frac{C}{k}.$$

以上により，P, Q′ に対して，§3 の命題3.1 をそのまま適用できる。あとは，具体的に $\sigma(Q')$ を計算することが残されているだけである。補題5.1 より，$\sigma(Q_{-1})$ を計算すればよい。それは，$K(t)=\exp(-itD')$ の核における $k_1(2\pi, x, \xi)$ を求めることである．即ち，$\sigma(Q_{-1})(x,\xi)=e^{\pi i\alpha/2}k_1(2\pi,x,\xi)$ が成り立つ．従って，k_1 に対する輸送方程式：

(5.1) $$\mathcal{L}k_1 \equiv \left(\frac{1}{i}\frac{\partial}{\partial t}+L\right)k_1 = \mathcal{F}_1(k_0)$$

を特性帯に沿って解けばよい。（詳細は[Ku4] に譲る.）

結果として，

(1) $g=g_0$（標準計量）の場合：

$$\sigma(Q_{-1})(x,\xi) = -\frac{i}{2|\xi|}\left(\int_0^{2\pi} V(\gamma(t))\,dt + 2\pi C - \frac{(n-1)^2}{2}\pi\right),$$

ただし，$\gamma(t)$ は $\gamma(0)=x,\ \dot\gamma(0)=(\xi/|\xi|)^{\#}$ を満たす閉測地線である．これより，次が得られる．

<u>定理 5.3</u> (Weinstein)．$\mu_j^{(k)}=\nu_j^{(k)}-\lambda_k$ に対して，

$$\sum_{j=1}^{N_k}\rho(\mu_j^{(k)}) = (2\pi)^{-n}\left(\int_{S^*S^n}\overline{V}(x,\xi)\,dm\right)k^{n-1}+o(k^{n-1}) \quad (k\to\infty)$$

ただし，

$$\overline{V}(x,\xi)=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}V(\gamma(t))\,dt.$$

(2) g が一般の $C_{2\pi}$-計量の場合は，今のところ，(5.1) の解を V および g の曲率によるすっきりした形に表わすことができていないので，これについては省略する。

<u>注意 5.4.</u> Weinstein [W] はここの議論とは異なる"平均法"と呼ばれる方法で定理 5.3 を導びいている。ここでの方法は，概ね，Guillemin [G] に似ている。[G] では，更に，$\bar{V}\equiv 0$ の場合について議論を進めている。

<u>注意 5.5.</u> $g=g_0$, $V\equiv 0$ で，$\tilde{\alpha}$ が平坦でなく，クラスターを成す場合 (i.e. 曲率 Ω が odd のとき) の $\{\nu_j^{(k)}\}$ の漸近分布については [Ku2], [G-U] で考察されている。

参考文献

[B] A.L. Besse, Manifolds all of whose Geodesics are Closed, Springer-Verlag, Berlin Heidelberg, 1978.

[D-G] J. Duistermaat and V. Guillemin, The spectrum of positive elliptic operators and periodic bicharacteristics, Invent. math. 29(1975), 39-79.

[G] V. Guillemin, Some spectral results for the Laplace operator with potential on the n-sphere, Advances in Math. 27 (1978), 273-286.

[H1] L. Hörmander, The spectral function of an elliptic operator, Acta Math. 121(1968), 193-218.

[H2] L. Hörmander, The Analysis of Linear Partial Differential Operators. III, IV, Springer-Verlag, Berlin Heidelberg, 1985.

[Ka] T. Kato, Perturbation Theory for Linear Operators, 2nd ed., Springer-Verlag, 1984.

[Ko] V.N. Kolokol'tsov, New examples of manifolds with closed geodesics, Vestnik Moskov Univ. Ser. I Mat. Mekh. (1984), 80-82 (in Russian).

[Ku1] R. Kuwabara, On spectra of the Laplacian on vector bundles, J. Tokushima Univ. 16(1982), 1-23.

[Ku2] R. Kuwabara, Some spectral results for the Laplacian on line bundles over S^n, Comment. Math. Helv. 59(1984), 439-458.

[Ku3] R. Kuwabara, Spectra of the Laplacian on vector bundles over $C_{2\pi}$-manifolds, preprint, 1985.

[Ku4] R. Kuwabara, Band asymptotics of eigenvalues for the Zoll manifold, preprint, 1986.

[M-F] V.P. Maslov and M.V. Fedoriuk, Semi-Classical Approximation in Quantum Mechanics, D. Reidel Publishing, Dordrecht, 1981.

[S] R.T. Seeley, Complex powers of an elliptic operator, Proc. Sympos. Pure Math. 10(1967), 288-307.

[S-T] 坂根由昌, 竹内勝, Yang-Mills 場の幾何学, 数学, 32(1980), 44-63.

[T] M.E. Taylor, Pseudodifferential Operators, Princeton Univ. Press, Princeton, 1981.

[Tr] F. Treves, Introduction to Pseudodifferential and Fourier Integral Operators. Vol.2 Fourier Integral Operators, Plenum Press, New York, 1980.

[W] A. Weinstein, Asymptotics of eigenvalue clusters for the Laplacian plus a potential, Duke Math. J. 44(1977), 883-892.

[WL] R.O. Wells, Differential Analysis on Complex Manifolds, 2nd ed., Springer-Verlag, New York, 1980.

[Y] C.N. Yang, Generalization of Dirac's monopole to SU_2 gauge fields, J. Math. Phys. 19(1978), 320-328.

[G-U] V. Guillemin and A. Uribe, Band asymptotics on line bundles over S^2, J. Differential Geometry 21(1985), 129-133.