数理解析研究所講究録
第 601 巻 1986 年 148-153

Vortex flow を記述する確率微分方程式と 2次元Vorticity方程式の導出

奈良女子大学理学部　長田博文 Hirofumi Osada

この報告では、渦の運動を記述するSDE（確率微分方程式）と、2次元Vorticity eq. の渦運動からの導出（vortex method）について述べる。

今、粘性をもち非圧縮性の2次元流体を考える。そこにN個の渦があるとし、

$Z_t^i = (X_t^i, Y_t^i) \in R^2$; i番目の渦の時刻tの位置

c_i ; i番目の渦の強さ（$-\infty < c_i < \infty$）

とする。（渦の位置とは中心のある場所）。すると、$Z_t = (Z_t^1, \cdots, Z_t^N)$ は次のSDEで記述される。

1) $$\left\{ dZ_t^i = \sigma\, dB_t^i + \sum_{\substack{j \neq i \\ j=1}}^{N} c_j (\nabla^{\perp} G)(Z_t^i - Z_t^j)\, dt \right. , \quad i=1,2,\cdots N.$$

ただし、$\sigma = \sqrt{2\nu}$, ν ; 粘性に関する定数 , $\nu > 0$,

$(B_t^1, B_t^2, \cdots, B_t^N)$; $2N$-dim. Brownian motion,

$$\nabla^{\perp} = \left(\frac{\partial}{\partial y}, -\frac{\partial}{\partial x}\right)$$

$$G(z) = -(2\pi)^{-1}\log|z|, \quad z=(x,y)\in R^2.$$

流体の粘性の効果は、σdB_t^i の部分に、また、渦と渦との干渉は、$c_j(\nabla^{\perp}G)(Z_t^i - Z_t^j)$ の部分に表わされている。このSDEが解けるかどうかは明らかではない。実際、係数が $\mathcal{N} = \bigcup_{\substack{i\neq j\\ i,j=1}}^{N}\{z=(z_i)\in R^{2N};\ z_i=z_j\}$ の上で発散するからである。係数は、$R^{2N}-\mathcal{N}$ 上では滑らかだから $\{Z_t\}$ が $\mathcal{N}$ に到達するまでは一意的にとける。従がって問題は $\{Z_t\}$ が $\mathcal{N}$ に到達するかどうかを調べること、つまり $\mathcal{N}$ とは、渦と渦とがぶつかる集合だから、渦同士がぶつかるかどうかを調べるということになる。これについて、次の結果が得られた。

定理1([4]). $\tau = \inf_{t>0}\{Z_t\in\mathcal{N}\}$、又 $Z_0 = z\in R^{2N}$ をみたす1)の解の法則を P_z とおく。すると、$z\notin\mathcal{N}$ ならば

$$P_z\{\tau<\infty\} = 0,$$

つまり、渦と渦とは、確率1でぶつからない。

この結果は、粘性がない時には特別な出発点から出発すると渦と渦とがぶつかるという結果(See [ ])と著しい対比

をなしている。 粘性がある時に渦がぶつからないのは、Brownian motion の効果によるもので、証明の荒筋は、1) の拡散過程の基本解が Brownian motion のそれによって大局的に上下から押さえ込めることを示し (　　　)、このことと、平面上の独立な Brown motion は互にぶつからないことより定理 1 が従うというものである。 特にポイントになるのは次の 2 つの Lemma である。

Lemma 1.([2]) c_{ij} を $R^+ \times R^n$ 上の可測関数とし、$A = \nu\Delta + \sum_{i=1}^{n} b_i \frac{\partial}{\partial x_i}$, $b_i = \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial c_{ij}}{\partial x_j}$ (b_j は関数とは限らない) とおく。 今 $c_{ij}(t, x)$ が

1. $|c_{ij}(t, x)| \leq \mu / n$
2. $\mathrm{div}\, b = 0$ in distribution

をみたすとする. このとき、$\partial_t - A$ の基本解 $p(s, x, t, y)$ で次の条件をみたすものが存在する。

$$c_1 (t-s)^{-\frac{n}{2}} e^{-c_2 |x-y|^2/(t-s)} \leq p(s, x, t, y) \leq c_3 (t-s)^{-\frac{n}{2}} e^{-c_4 |x-y|^2/(t-s)}$$

$0 < t-s < \infty$, $x, y \in R^n$, ただし、$c_1, \cdots, c_4$ は n, λ, μ にのみよる正定数。

Lemma 2.([4]) 1) の generator $L = \nu\Delta + \sum_{\substack{i \neq j \\ i,j=1}}^{N} \Gamma_j (\nabla^\perp G)(z_i - z_j) \cdot \nabla_i$ ($\nabla_i = (\frac{\partial}{\partial x_i}, \frac{\partial}{\partial y_i})$) の formal な dual $L' = \nu\Delta - \sum_{\substack{i \neq j \\ i,j=1}}^{N} \Gamma_j (\nabla^\perp G)(z_i - z_j) \cdot \nabla_i$ は、Lemma 1

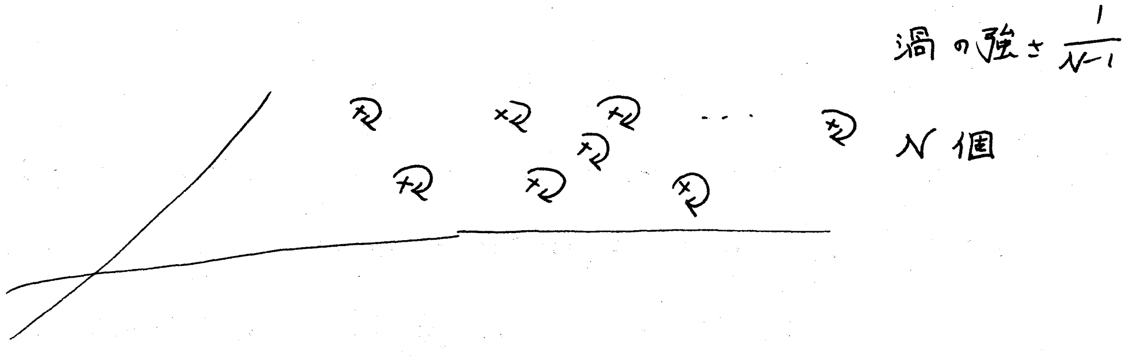
の条件をみたす。更に、SDE 1) の遷移確率密度 $P\{Z_t \in dy \mid Z_s = x\}$ は、Lemma 1 の評価をみたす $\partial_t - L^*$ の基本解である。

次に2次元 vorticity eq. の導出について述べる。今、1) において、$c_j = \frac{1}{N-1}$ の場合を考える。つまり、平面上にN個の、渦の強さが $\frac{1}{N-1}$ の渦の流れを考える。そして、初期分布は、i.i.d. とする;

$$2)\quad \begin{cases} dZ_t^{i,N} = \sigma dB_t^i + \displaystyle\sum_{\substack{j\neq i \\ j=1}}^{N} \frac{1}{N-1} (\nabla^\perp G)(Z_t^{i,N} - Z_t^{j,N})\,dt \\ \mathbb{Z}_0^N \sim \varphi(z_1)\cdots\varphi(z_N)\,dz_1\cdots dz_N \quad (\varphi \geq 0,\ \int \varphi\, dz = 1) \end{cases}$$

このとき、最初のm個の渦を $\mathbb{Z}_t^{m,N}$ とおく:

$$3)\quad \mathbb{Z}_t^{m,N} = (Z_t^{1,N}, Z_t^{2,N}, \cdots, Z_t^{m,N}).$$



又、次に、Z_t を2次元 vorticity eq. に対応した Nonlinear Markov process. つまり、$P^{Z_t}(dz)$ の分布 $V_t(z)dz$ が、

2次元 vorticity eq.

4)
$$\begin{cases} \partial_t V = \nu \Delta V - u \cdot \nabla V, & V(0,z) = \varphi(z) \\ u(t,z) = (\nabla^{\perp} G) * V(t,\cdot)(z) \end{cases}$$

の解でありかつ

5)
$$dZ_t = \sigma dB_t + u(t, Z_t)\,dt$$

をみたすとする。 この時次の結果がなりたつ

定理2 ([3]) 正定数 $\nu_0 (>0)$ が存在し、$\nu > \nu_0$ ならば

$$\lim_{N \to \infty} Z_t^{m,N} = m \text{ independent copies of } Z_t$$

in law in $C\{[0,\infty) \to R^{2m}\}$. ここで、$\nu_0$ は すべてに無関係な定数である。

Z_t^N の分布を $V_N(t, z_1, \cdots, z_N)\,dz_1 \cdots dz_N$ とおけば V_N は

5)
$$(\partial_t - L_N')V_N = 0, \quad V_N(0, z_1 \cdots z_N) = \varphi(z_1) \cdots \varphi(z_N)$$

ただし、L_N' は 2) の generator の formal な dual つまり

$$L_N' = \nu \Delta + \frac{1}{N-1} \sum_{\substack{i \neq j \\ i,j=1}}^{N} (\nabla^{\perp} G)(z_i - z_j) \cdot \nabla_i, \quad \nabla_i = \left(\frac{\partial}{\partial x_i}, \frac{\partial}{\partial y_i}\right)$$

である。 そこで、定理2の系として 解析的には次のことがなりたつ。

系． 定理2と同じ条件のもとで，今 $V_{N,m} = \int_{R^{2N-2m}} V_N \, dz_{m+1} \cdots dz_N$ とおけば，

$$\lim_{N\to\infty} V_{N,m}(t, z_1, \cdots, z_m) = \prod_{i=1}^{m} V(t, z_i) .$$

このように，2次元 Vorticity eq. の解 V は，Linear な方程式5) の解の極限として得られる。 尚，Burgers' eq. についても同様の結果が /1/ で得られている。

/1/ H.Osada & S.Kotani, Propagation of chaos for the Burgers equation, J. Math. Soc. Japan, Vol.37, No.2,(1983).

/2/ H.Osada, Diffusion processes with generators of generalized divergence form, to appear in J. Math. Kyoto Univ..

/3/ H.Osada, Propagation of chaos for the two dimensional Navier-Stokes equation, Proc. Japan Acad., 61, Ser. A (1985). announcement.

/4/ H.Osada, A stochastic differential equation arising from the vortex problem, Proc. Japan Acad., 61, Ser. A (1985).