

LES による乱流混合層の数値計算

東大生研 半場藤弘 (Fujihiro Hamba)

§ 1. はじめに

乱流混合層は、数多くの実験によって研究されてきた。Brown と Roshko¹⁾ は渦の秩序構造を示し、Wyganski と Fiedler²⁾ は乱流強度の分布、高次のモーメント、エネルギーバランスなど種々の統計量を調べ、Jones et al³⁾ は空間あるいは時間に関する速度相関を求めた。そして、平均速度や乱流強度の分布に自己相似性があることが知られている。

一方、数値計算では、Mansour et al⁴⁾、Cain et al⁵⁾ が LES を用い、層流からの遷移⁵⁾を調べ、Riley と Metcalfe⁶⁾ は直接数値計算を行なった。また、井上ら⁷⁾ は渦系近似法を使って初期強制擾乱の混合層を解析した。

本研究は、3次元、高レイノルズ数の流れを解析するために LES を採用し、層流からの遷移ではなく、十分発達した乱流に興味をしばり、乱流強度分布、エネルギーバランス、

速度相関などの統計量を求めた。

§ 2. 基礎方程式と計算方法

LESにおいて速度、圧力などの物理量は、

$$f = \bar{f} + f' \quad (2.1)$$

のように分解される。ここで \bar{f} はlarge scaleの流れ場、 f' は \bar{f} からのずれ(subgrid scaleの流れ場)であり、 \bar{f} はフィルタ関数 $G(x, y)$ を用いて

$$\bar{f}(x) = \iiint G(x, y) f(y) dy \quad (2.2)$$

のように定義される。

Navier-stokes 方程式と連続の式にこのフィルタ平均の操作を施し、渦粘性表現、Smagorinsky モデル⁸⁾を導入すると

$$\frac{\partial \bar{u}_i}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_j} (\bar{u}_i \bar{u}_j) = -\frac{\partial \bar{P}}{\partial x_i} + \frac{\partial}{\partial x_j} \left\{ (\nu + \nu_g) \left(\frac{\partial \bar{u}_i}{\partial x_j} + \frac{\partial \bar{u}_j}{\partial x_i} \right) \right\} \quad (2.3)$$

$$\frac{\partial \bar{u}_i}{\partial x_i} = 0 \quad (2.4)$$

ただし
$$\bar{P} = \frac{\bar{p}}{\rho} + \frac{1}{3} \overline{u'_e u'_e} \quad (2.5)$$

$$\nu_g = (C_s \Delta)^2 \left\{ \frac{\partial \bar{u}_i}{\partial x_j} \left(\frac{\partial \bar{u}_i}{\partial x_j} + \frac{\partial \bar{u}_j}{\partial x_i} \right) \right\}^{\frac{1}{2}} \quad (2.6)$$

$$\Delta = (\Delta_x \Delta_y \Delta_z)^{\frac{1}{3}} \quad (2.7)$$

となる。ここで u は速度、 p は圧力、 ν は動粘性係数、 ρ は密度、 C_s はモデルの定数、 $\Delta_x(y, z)$ は各方向の格子間隔である。

実際の計算では ν は無視した。Channel流の壁のような分子粘性が本質的にきく部分が、混合層にはないと思われるからである。

計算領域は、下流方向に流される渦と同じ速度の座標系で考え、時間とともに発達する混合層として計算した(図1)。格子分割は、混合層が厚くなるのを避けるため、次のように、2段階に分けて行なった。

①、momentum thickness θ が

0.5 から 1.0 まで

格子点 $128 \times 16 \times 128$

格子間隔 $\Delta x = \Delta y (y=0) = \Delta z = 0.5$

計算領域 $L_x = L_z = 64, L_y \approx 8$

② θ が 1.0 以降

格子点 $64 \times 64 \times 64$

格子間隔 $\Delta x = \Delta y (y=0) = \Delta z = 1.0$

計算領域 $L_x = L_z = 64, L_y \approx 256$

ただし、 θ は混合層の厚さを表す長さで

$$\theta(t) = \frac{1}{(U_1 - U_2)^2} \int_{-\infty}^{\infty} (U_1 - \langle u \rangle)(\langle u \rangle - U_2) dy \quad (2.8)$$

($\langle \rangle$ は $x-z$ 平面の平均)

で定義される。また、いずれも y 方向について $\tan \theta =$ 比例

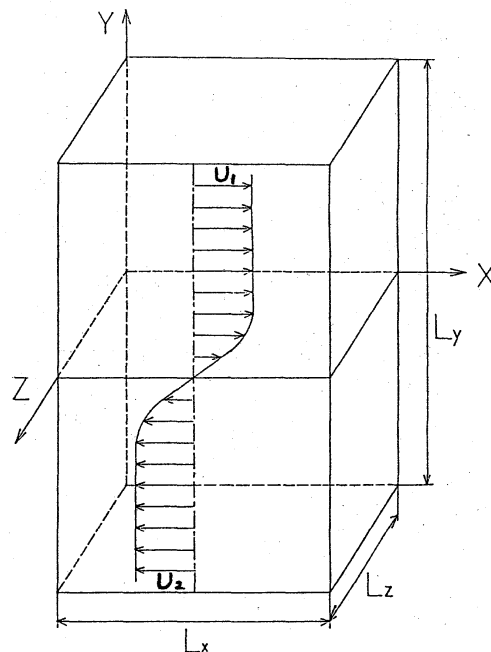


図1

する不等間隔の分割を行なった。速度は $\Delta U (= U_1 - U_2)$ 、長さは第2段階の初期の θ で無次元化されている。

境界条件は、 x (流れ) 方向、 z (スパン) 方向に周期境界条件を、 y (層に垂直) 方向に free-slip 条件を課した。

第1段階の初期条件は、平均速度、乱流強度、エネルギースペクトルが Wygnanski と Fiedler²⁾ の実験値にほぼ対応するように設定した。

差分計算は、空間には2次精度の中心差分を、時間には、Adams-Bashforth を用いた。圧力は、Poisson 方程式の差分式を Fourier 変換することによって求めた。

計算は東大大型計算機センターの HITAC S-810/20 を用い、約2時間を要した。

なお、(2.6) には C_s というモデル定数が含まれている。 32^3 の格子点を用いた予備計算で、混合層の中心での1次元エネルギースペクトルを求め(図2)、 $k^{-\frac{5}{3}}$ に近い、 $C_s = 0.12$ を採用した。

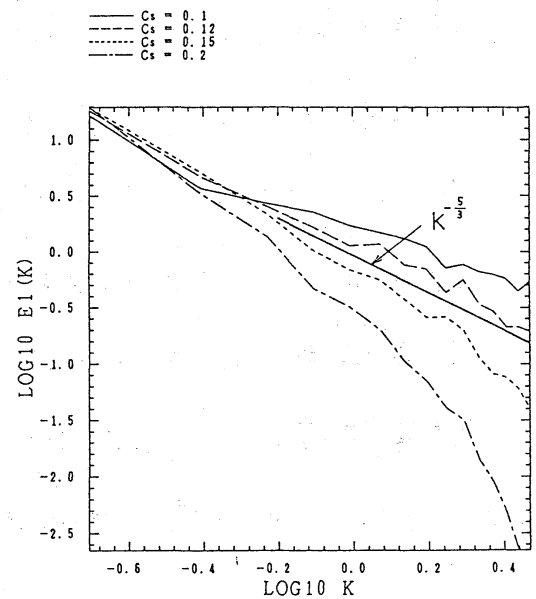


図2. 1次元エネルギースペクトル ($y=0$)

§ 3. 計算結果と考察

以下に、数値計算の結果を示す。ただし時間の原点($t=0$)は第2段階の初期である。

3-1. momentum thickness

(2.8) で定義した momentum thickness の時間発展を図3に示す。実験では θ は時間 t に比例して増加するが、その傾きはばらついており、図3の2本の点線はその上限と下限を表す。⁴⁾ 計算結果(実線)もほぼ直線になっている。実験での傾きのば

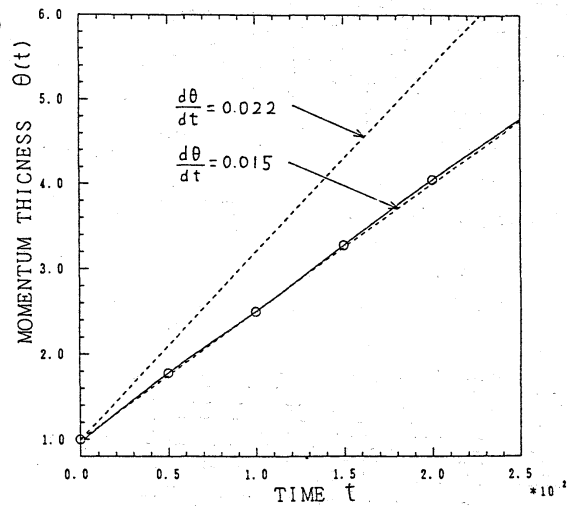


図 3

らつきの原因は、初期の境界層の性質、一様流中の乱れなどさまざま考えられるが、この計算の初期値は、傾きが小さい場合に対応していたと解釈できる。

3-2. 速度

各時刻の速度ベクトル図を図4に示す。 $t=0$ では数個あった渦が融合し、 $t=50$ では2~3個、 $t=150$ ではほぼ1個になっていることがわかる。

また、図5に平均速度分布を示す。横軸は、各時刻の θ で正規化された長さであり、相似則が成り立っている。

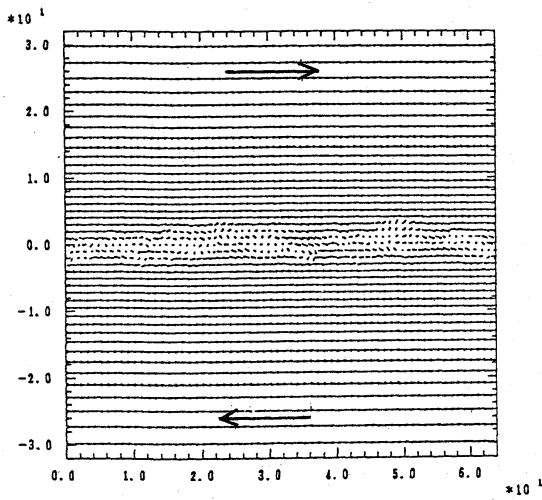
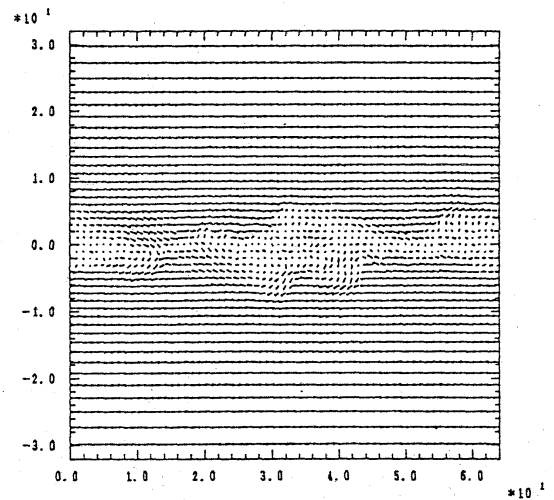
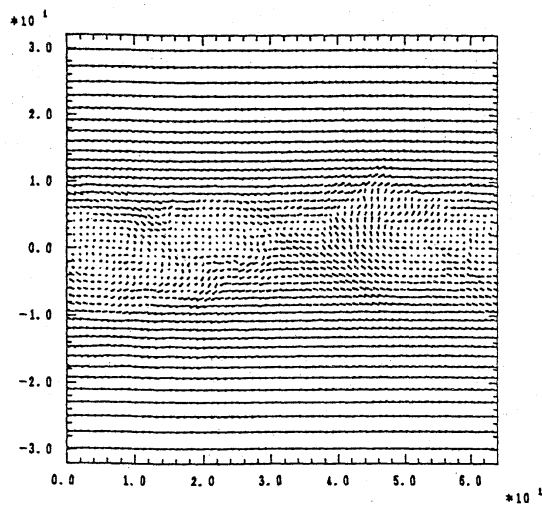


図4 (a) $x-y$ 平面の速度ベクトル
 $t=0$



(b) $t=50$



(c) $t=150$

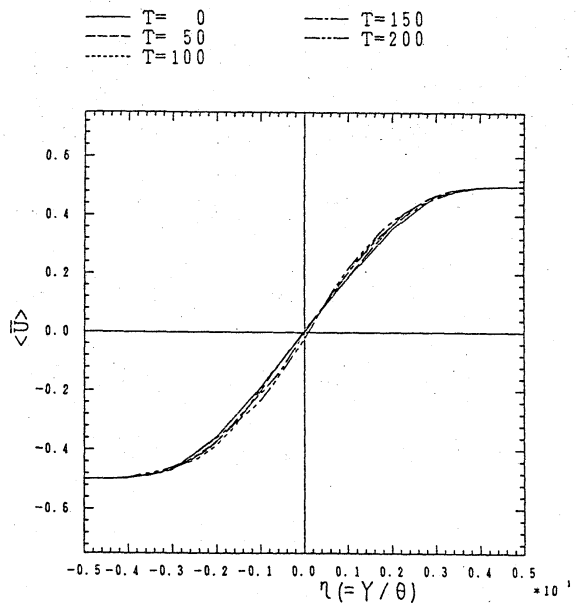


図5 平均速度分布

3-3. エネルギー

図6は、混合層の中心 ($y=0$) でのエネルギーとその成分、剪断応力の時間変化である。 $t=0 \sim 60$ では、 $\langle \bar{v}\bar{v} \rangle$ を除く各成分は減衰し、落ちつくまでに時間がかかっている。

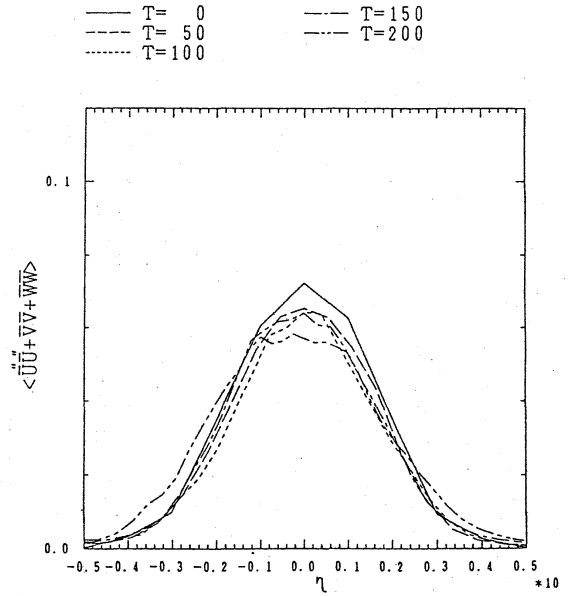
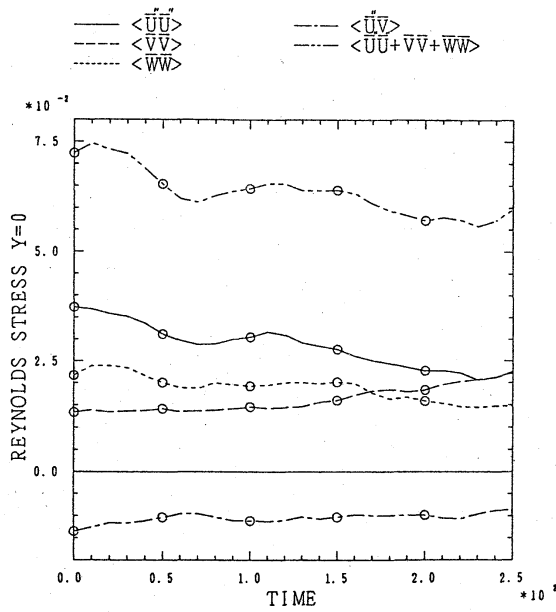
図6. エネルギーの時間変化 ($y=0$)

図7. エネルギーの分布

$t = 60 \sim 130$ では、だいたい定常状態にあるといえる。ただし、 $\langle \bar{u}^2 \bar{v}^2 \rangle$ については定常性があまりよくない。(「 $''$ 」は x - z 平面の平均 $\langle \rangle$ からのずれを表す。 $f = \langle f \rangle + f''$)

$t = 130 \sim$ では $\langle \bar{v}^2 \rangle$ は増加して $\langle \bar{u}^2 \bar{v}^2 \rangle$ と一致し、他は減衰している。この減衰の原因は次のように考えられる。図4からわかるように $t \sim 150$ では計算領域中に渦が1個しかない。これ以上渦の融合ができません、中心から上下へ拡散するだけになる。したがって中心でのエネルギーは減少し、また流れが x - y 方向について等方的になっていくのである。

図7は各時刻のエネルギーの分布である。 $t = 50, 100, 150$ が、およその相似則を示している。

次にエネルギーバランスを考える。エネルギー $k = \frac{\langle u_i'' u_i'' \rangle}{2}$ の式は、次のように評価できる。

$$\frac{\partial k}{\partial t} + \langle u_i \rangle \frac{\partial k}{\partial x_i} = E_p - \varepsilon + E_D \quad (3.1)$$

ただし

$$E_p = - \langle \bar{u}'' \bar{w} \rangle \frac{\partial \langle \bar{u} \rangle}{\partial y} \quad : \text{production (3.2)}$$

$$\varepsilon = \langle \nu_G \frac{\partial \bar{u}_i'}{\partial x_j} \left(\frac{\partial \bar{u}_i'}{\partial x_j} + \frac{\partial \bar{u}_j'}{\partial x_i} \right) \rangle \quad : \text{dissipation (3.3)}$$

$$E_D = - \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{1}{2} \langle \bar{w} \bar{u}_j'' \bar{u}_j'' \rangle + \langle \bar{P}'' \bar{w} \rangle \right) \quad : \text{diffusion (3.4)}$$

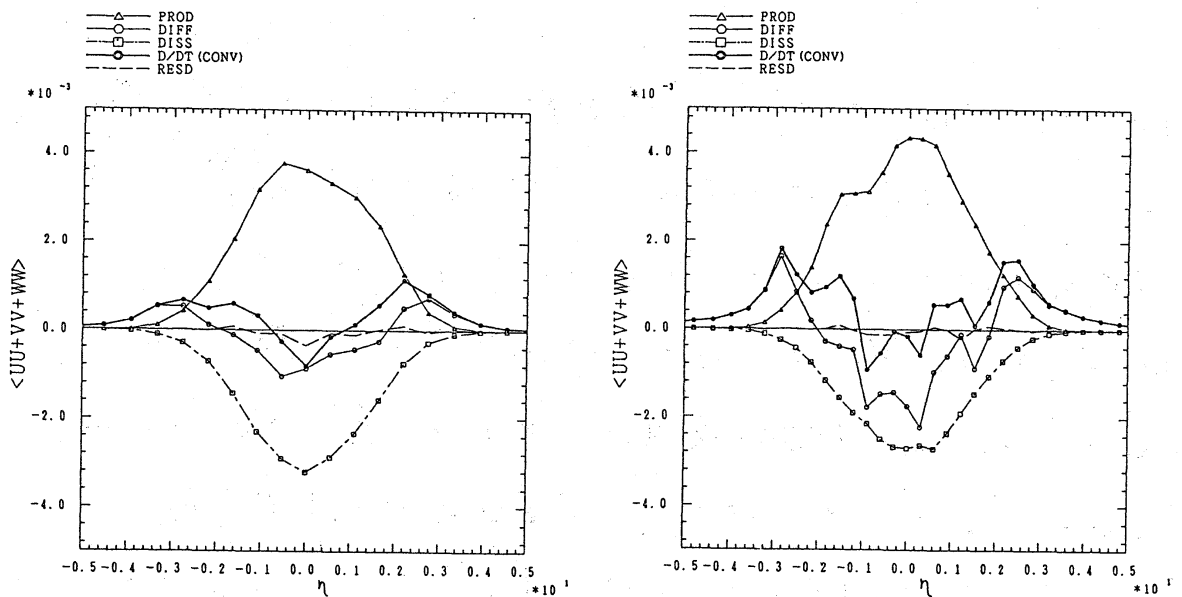


図8 (a) エネルギーバランス, $t=50$

(b) $t=150$

PROD ... E_p , DIFF ... E_D , DISS ... ε ,

D/DT ... (3.1)の左辺, RESD ... (3.1)の左辺 - 右辺

(計算誤差)

縦軸、横軸は η で正規化されている。

図8は(3.1) ~ (3.4) を $t=50, 150$ で実際に表したものである。この図から、乱流混合層では、中心で production と dissipation が優越していること、その外側では、diffusion がエネルギーの増加に寄与していることがわかる。さらに、 $t=150$ では $t=50$ より、diffusion が大きくなっている。

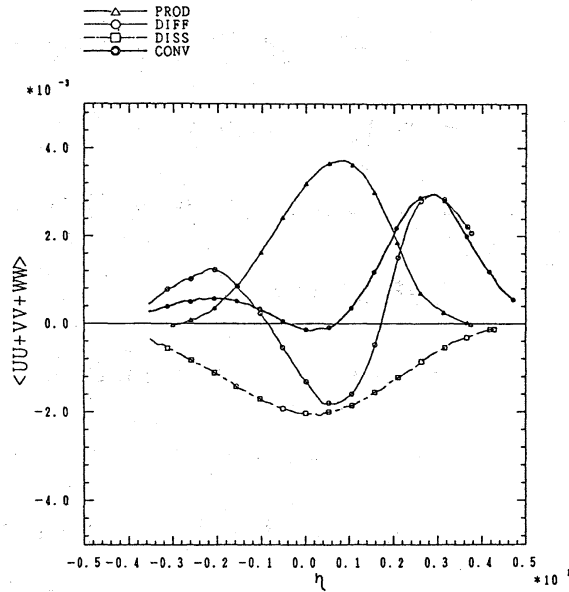


図9. エネルギーバランス
実験値

図9は Wygnanski と Fiedler²⁾ の実験値である。実験自体、 $\eta=0$ の両側で非対称であるので、計算結果と直接比較できないが、定性的には一致している。

3-4. 速度相関

層の中心 ($\eta=0$) での、スパン方向に離れた2点の速度相関を図10に示す。ただし速度相関は

$$R_{ii}(y, \Delta z) = \frac{\langle \bar{u}_i''(x, y, z) \bar{u}_i''(x, y, z + \Delta z) \rangle}{\langle \bar{u}_i''^2(x, y, z) \rangle} \quad (3.5)$$

で定義される。uについては、Jones et al³⁾ の実験値があるので比較した。ここで注目すべきことは、uの相関に負の部

分があることである。
 そこで、速度のu成分の等高線(図11)を見るとスパン方向に高速部分と低速部分が交互にならんだストリークの構造をもつことがわかる。よく知られているchannel流の壁付近での構造⁹⁾ほど著しくはない。が両者に共通するのは、productionや、dissipationが大きい部分にその構造があらわれることである。

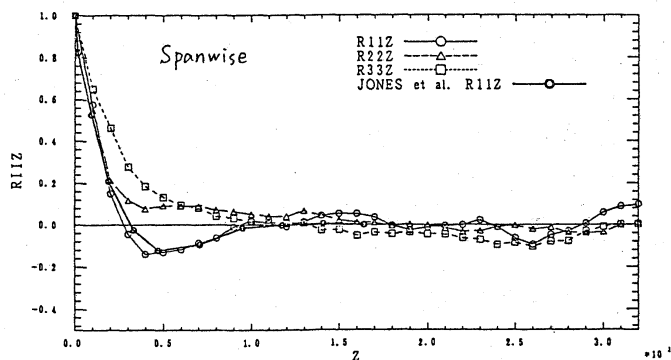


図10 スパン方向の速度相関
($y=0$)

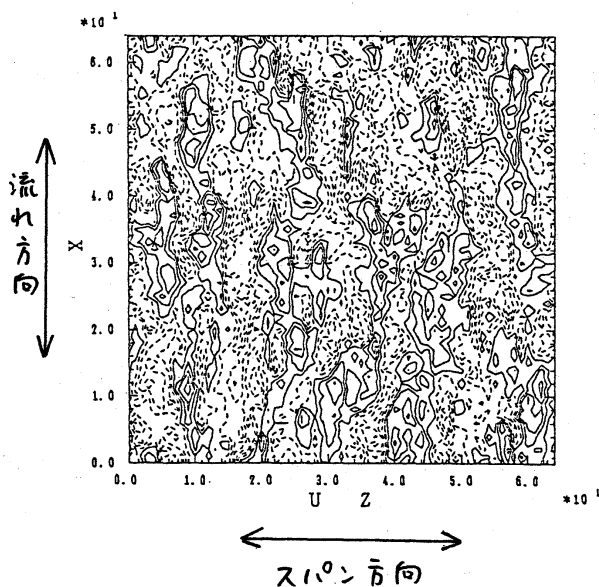


図11 u'' の等高線

実線: $u'' > 0$, 破線: $u'' < 0$

§4. まとめ

LESを用いて乱流混合層を数値的に解析し、種々の統計量を求め、実験と比較した。この計算では、 $t=60 \sim 130$ がおおよそ定常で自己相似性を示すことができた。さらにエネルギーバランスにおいて、層の中心ではproductionと

dissipation が つりあっていること、その外側で diffusion が エネルギーの増加に寄与していること、また速度相関と u の等高線図によって、中心にストリークの構造があることがわかった。

参考文献

- 1) G.L. Brown & A. Roshko: J. Fluid Mech. 64 (1974) 775
- 2) J. Wygnanski & H.E. Fiedler: J. Fluid Mech. 41 (1970) 327
- 3) B.G. Jones, H.P. Planchon, & R.J. Hammersley: AIAA J. 11 (1973) 1146
- 4) N.N. Mansour, J.H. Ferziger, & W.C. Reynolds: Rept. TF-11, Mech. Engrg. Dept., Stanford Univ.
- 5) A.B. Cain, W.C. Reynolds, & J.H. Ferziger: Rept. TF-14 Mech. Engrg. Dept., Stanford Univ.
- 6) J.J. Riley & R.W. Metcalfe: AIAA paper No. 80-0274 (1980)
- 7) 井上督, 小口伯郎: 京大教理解析研講究録 510 (1984) 191
- 8) J.W. Deardorff: J. Fluid Mech. 41 (1970) 453
- 9) P. Moin & J. Kim: J. Fluid Mech. 118 (1982) 341