数理解析研究所講究録
第613巻 1987年 204-219

対数核を含む不定積分の自動積分法

福井大・工 長谷川武光 (Takemitsu Hasegawa)
名大・工 鳥居達生 (Tatsuo Torii)

1. はじめに

与えられた滑らかな関数 $f(t)$ と特異関数 $K(t;c)$ との積のいわゆる積型積分[1)]

$$\int_a^b f(t)\,K(t;c)\,dt$$

の近似値を計算することは，通常の数値積分法では困難である。ここで $K(t;c)$ は，例えば $P/(t-c)$,(主値), $\ln|t-c|$ または $|t-c|^{\alpha}$ $(\alpha>-1)$ 等の特異関数である。特異点 c が両端点 a, b の一方に一致する場合には有効な積分則が存在するが[2)]，特異点 c が区間 $[a,b]$ の内部にある問題は難しく，そのための積分則は少ない。この問題を扱う能率的な積分則は，それぞれの特異関数の性質に基づいて個々に作ることが必要になる．主値積分については既にわれわれも発表した[3)]。

本論文では，特に対数特異性を含む関数の不定積分

$$I(x,y,c)=\int_x^y f(t)\ln|t-c|\,dt, \qquad a\leq x,y,c\leq b, \quad (1)$$

に対して，一般に上下限 y, x と特異点 c の色々な値に対する近似値の組 $\{I_N(x_i, y_j, c_k)\}$ ($1 \leq i \leq L$, $1 \leq j \leq M$, $1 \leq k \leq K$) を能率的に求める自動積分法を示す。ここで要求絶対精度を ε_a (相対精度を ε_r) とし，$\varepsilon = \max(\varepsilon_a, \varepsilon_r |I(x, y, c)|)$ とおくと

$$|I(x, y, c) - I_N(x, y, c)| \leq \varepsilon$$

を満足する近似値 $I_N(x, y, c)$ を計算する方法を自動積分法という。

関数 $f(t)$ が十分滑らかと仮定すると，区間 $[-1, 1]$ でのそのチェビシェフ展開の収束は速い。このため，変数変換により区間 $[a, b]$ を $[-1, 1]$ に移すと (1) は

$$I(x, y, c) = \alpha\left[\ln\alpha \int_\xi^\eta g(u)\,du + \int_\xi^\eta g(u) \ln|u-\zeta|\,du\right], \quad (2)$$

となる。ここで，$g(u) = f(\alpha u + \beta)$, $\alpha = (b-a)/2$, $\beta = (b+a)/2$, $\xi = (x-\beta)/\alpha$, $\eta = (y-\beta)/\alpha$, $\zeta = (c-\beta)/\alpha$ であり $-1 \leq \xi, \eta, \zeta \leq 1$ となる。式 (2) の右辺の $g(u)$ を $[-1, 1]$ 上でのチェビシェフ多項式 $T_k(u)$ による近似

$$g(u) \sim p_N(u) = \sum_{k=0}^{N}{}'' a_k^N T_k(u), \quad -1 \leq u \leq 1, \quad (3)$$

によっておきかえると，積分 $I(x, y, c)$ の近似

$$I_N(x, y, c) = \alpha\left[\ln\alpha \int_\xi^\eta p_N(u)\,du + \int_\xi^\eta p_N(u) \ln|u-\zeta|\,du\right] \quad (4)$$

がえられる。ここで Σ'' は初項と末項のみ $\frac{1}{2}$ 倍して総和することを意味する。上式の右辺のかっこ内の第1項は項別積分によって容易に計算される。

第2項の積分を具体的に評価するため2つの関数 $G_{N+1}(u)$ と $F_{N+1}(u)$ を用いて

$$\int_{\xi}^{\eta} p_N(u)\ln|u-s|du = \{G_{N+1}(\eta)-G_{N+1}(s)\}\ln|\eta-s| - \{G_{N+1}(\xi)-G_{N+1}(s)\}\ln|\xi-s| - \{F_{N+1}(\eta)-F_{N+1}(\xi)\}, \quad (5)$$

と書く．すると $G_{N+1}(u)$, $F_{N+1}(u)$ は微分方程式

$$G'_{N+1}(u) = p_N(u), \qquad F'_{N+1}(u) = \{G_{N+1}(u)-G_{N+1}(s)\}/(u-s), \quad (6)$$

を満足し，$p_N(u)$ が N 次の多項式なので共に $N+1$ 次の多項式となる．微分方程式 (6) より導かれる3項漸化式

$$d_{k+1} - 2s\,d_k + d_{k-1} = (a^N_{k-1} - a^N_{k+1})/k, \quad (7)$$

を初期値 $d_{N+2} = d_{N+1} = 0$ として逆向きに安定に計算してえられる $\{d_i\}$ $(0 \leqq i \leqq N)$ を用いると，(5) の右辺の $G_{N+1}(\eta)$, $F_{N+1}(\eta)$ はそれぞれ

$$G_{N+1}(\eta) - G_{N+1}(s) = (\eta - s)\sum_{k=0}^{N}{}' d_k T_k(\eta), \quad (8)$$

$$F_{N+1}(\eta) - F_{N+1}(\xi) = \sum_{k=1}^{N+1} (d_{k-1} - d_{k+1})/(2k)\cdot\{T_k(\eta) - T_k(\xi)\}, \quad (9)$$

と表わされる．ここで $\sum'$ は初項のみ 1/2 倍して総和することを意味する．また便宜上 (7) の右辺で $a^N_k = 0$ $(k > N)$ とおき，a^N_N には 1/2 をかけておく．Luke[4] は下端点に対数特異性をもつ不定積分（上端点が不定）をチェビシェフ展開の方法によって計算する手法を示している．したがって本方法は，Luke の方法を任意の位置に特異点をもつ不定積分の自動積分の問題への拡張になっている．

チェビシェフ展開(3)の係数 $\{a_k^N\}$ はFFT(高速フーリエ変換)を用いて能率的に計算されることは既に知られている[5]. しかし近似の次数 N は倍々と増加されているのが通常であり, 要求精度に対して標本点数を無駄にすることが多かった. そこでわれわれは[6], 要求精度 ε に対して無駄な関数評価回数を節減するため次数 N を倍々より緩く $N=2^{n+1}, 3\times 2^n$ $(n=1,2,\cdots)$ と増す方法を示した. Bulirsch と Stoer[7] は Romberg 積分に対してこの数列を用いている. 第2節では, この数列と比べて計算の手間をほとんど増加させることなく, N を更にきめ細かく $N=2^{n+2}, 5\times 2^n, 3\times 2^{n+1}$ $(n=1,2,\cdots)$ と増しながらチェビシェフ近似の列 $\{p_N\}$ を再帰的に構成できることを示す. 第3節で述べる誤差 $|I(x,y,c)-I_N(x,y,c)|$ の推定を用いて近似多項式 $p_N(u)$ の必要な次数 N が決定される. また, 関数 $f(t)$ が滑らかであれば積分の誤差の限界が特異点 c の値に無関係に一様に評価されることが第3節で示される. すなわち $\{I_N(x_i, y_j, c_k)\}$ の組に対して同一の誤差推定を用いてよく, したがって一度のチェビシェフ展開の手間で積分の近似値の組が計算されることがわかる.

第4節では, 定積分でかつ特異点が端点にある場合および内部の点である場合について Piessens ら[8] の方法との比較を数値例によって示す. Piessens らの方法は現在最も能率的な

自動積分法の一つであるが，区分的にチェビシェフ多項式展開を利用した適応型手法を用いているため，滑らかな関数に対して全域的なチェビシェフ展開の収束が速いという特長が生かされない．また一連の特異点の値 $\{C_n\}$ に対して個別に計算しなければならないし，不定積分も扱えない．

2、FFTを用いたチェビシェフ展開

2.1　標本点　数列 $\{\alpha_j\}$，$j=-1,0,1,\cdots$，を

$$\alpha_{-1}=0,\quad \alpha_0=1/2,\quad \alpha_1=1/4,\quad \alpha_{2k}=\alpha_k/2,\quad \alpha_{2k+1}=\alpha_{2k}+1/2,\quad k=1,2,\cdots \tag{10}$$

によって定義し，近似 $p_N(u)$，(3) に対する補間点を $\{\cos 2\pi\alpha_j\}$ とする．ここで数列(10) はいわゆる Van der Corput 列であり，したがって $\{\cos 2\pi\alpha_j\}$ はチェビシェフ分布列となる[9]．この点列について次のことがわかっている[9]．

補題 2.1　$N=2^n$（nは整数）と仮定すると

$$2^N\prod_{j=-1}^{N-1}(u-\cos 2\pi\alpha_j)=2^N\prod_{j=0}^{N}\left(u-\cos\frac{\pi j}{N}\right)=T_{N+1}(u)-T_{N-1}(u)\ , \tag{11}$$

$$2^N\prod_{j=0}^{N-1}(u-\cos 2\pi\alpha_{kN+j})=T_N(u)-\cos 2\pi\alpha_k \tag{12}$$

関係式 (11) より初めの 2^n+1 個の標本点 $\{\cos 2\pi\alpha_j\}$，$(j=-1,0,1,\cdots,2^n-1)$，は Clenshaw と Curtis[10] が用いた点列と一致することがわかる．

2.2　高速余弦変換　次数 N を $8,10,12,\cdots,2^{n+2}$，

$5\times 2^n, 3\times 2^{n+1}, \cdots, (n=1,2,\cdots)$, と増しながら近似多項式列$\{p_N\}$を再帰的に構成する．いま$N$を２のべきの形，$N=2^{n+2}$ $(n=1,2,\cdots)$と仮定し$N_1=N/2$，$N_2=N/4$とおく．式(3)の$p_N(u)$に対する補間条件

$$p_N(\cos\pi j/N) = g(\cos\pi j/N), \quad 0\leq j\leq N, \qquad (13)$$

よりチェビシェフ係数a_k^Nは

$$a_k^N = \frac{2}{N}\sum_{j=0}^{N}{}'' g(\cos\pi j/N)\cos\pi kj/N, \quad 0\leq k\leq N, \qquad (14)$$

と表わされる．

次に$p_{5N/4}(u)$，$p_{3N/2}(u)$を計算するために複素数$A_{\ell,k}$ $(1\leq \ell\leq 5)$を定義する．

$$A_{\ell,k} = \frac{1}{M}\sum_{j=0}^{M-1} g(\cos\theta_{\ell,j})e^{-ik\theta_{\ell,j}},$$

$$\theta_{\ell,j} = 2\pi(j+\alpha_\ell)/M, \quad 0\leq k<M, \qquad (15)$$

ここで$M=N$ $(\ell=1)$，$M=N/2$ $(\ell=2,3)$および$M=N/4$ $(\ell=4,5)$とおく．また$\theta_{\ell,j}$ $(0\leq j<M)$は$T_M(\cos\theta)-\cos 2\pi\alpha_\ell$の零点である．(15)の右辺は実数型FFTを用いて能率的に計算される。実際は$\ell=3,4$および5に対する$A_{\ell,k}$ $(0\leq k<M)$のみを計算すればよい．残りの$\ell=1,2$に対する$A_{\ell,k}$は$A_{3,k}$，$A_{4,k}$および$A_{5,k}$により次のように簡単にもとめられる．

$$A_{\ell,k} = (A_{2\ell,k} + A_{2\ell+1,k})/2, \quad 0\leq k<M/2,$$

$$A_{\ell,M-k} = (\overline{A}_{2\ell,k} + \overline{A}_{2\ell+1,k})e^{-4\pi i\alpha_{2\ell}}/2, \quad 0<k<M/2,$$

$$A_{\ell,M/2} = (A_{2\ell,0} - A_{2\ell+1,0})e^{-2\pi i\alpha_{2\ell}}/2, \qquad (16)$$

ここで $M=N$ $(l=1)$，$M=N/2$ $(l=2)$ であり $\bar{A}$ は A の複素共役である．

これらの $A_{l,k}$ を用いると $5N/4$ 次と $3N/2$ 次の補間多項式

$$P_{5N/4}(u)=\sum_{k=0}^{5N/4}{}' a_k^{5N/4}T_k(u), \tag{17}$$

$$P_{3N/2}(u)=\sum_{k=0}^{3N/2}{}' a_k^{3N/2}T_k(u), \tag{18}$$

を構成することができる．いま式(11)を $\omega_{N+1}(u)$ とおくと，即ち $\omega_{N+1}(u)=T_{N+1}(u)-T_{N-1}(u)$，補題2.1より $P_{5N/4}(u)$ と $P_{3N/2}(u)$ に対する補間点はそれぞれ $\omega_{N+1}(u)\{T_{N/4}(u)-\cos 2\pi\alpha_4\}$ および $\omega_{N+1}(u)\{T_{N/2}(u)-\cos 2\pi\alpha_2\}$ の零点であることがわかる．したがって係数 $a_k^{5N/4}$ と $a_k^{3N/2}$ は

$$\begin{aligned} a_{N+k}^{N+M} &= (a_{N-k}^{N}-B_{l,k})/2, & 1\leq k\leq M,\\ a_{N-k}^{N+M} &= (a_{N-k}^{N}+B_{l,k})/2, & 0\leq k<M,\\ a_{k}^{N+M} &= a_k^N, & 0\leq k<N-M, \end{aligned} \tag{19}$$

となる．ここで $M=N/2$ $(l=3)$，$M=N/4$ $(l=4)$ であり，また $B_{3,k}$ と $B_{4,k}$ は次式で定義される．

$$\begin{cases} B_{3,k}=\{2\,\mathrm{Re}(A_{2,N_1-k})-a_{N_1-k}^{N}\}/\sin\pi\alpha_1-a_k^N, & 1\leqq k<N/2,\\ B_{3,N_1}=(A_{2,0}-a_0^N/2)/\sin\pi\alpha_1, \end{cases} \tag{20}$$

$$\begin{cases} B_{4,k}=\Big[2\,\mathrm{Re}(A_{4,N_2-k})-a_{N_2-k}^{N}-\sum_{m=1}^{2}\{a_{(m-1)N_2+k}^{N}+a_{(m+1)N_2-k}^{N}\}\\ \qquad\times\cos\pi m\alpha_2\Big]/\sin\pi\alpha_2-a_{N_1+k}^{N}, \qquad 1\leqq k<N/4\\ B_{4,N_2}=\Big(A_{4,0}-a_0^N/2-\sum_{m=1}^{2}a_{mN_2}^{N}\cos\pi m\alpha_2\Big)/\sin\pi\alpha_2, \end{cases} \tag{21}$$

さらに $B_{3,0}=B_{4,0}=0$.

最終的に $2N$ 次の多項式 $p_{2N}(u)$ の係数は a_k^N と $A_{1,k}$ を用いて

$$
\begin{aligned}
a_k^{2N} &= \{a_k^N + 2\mathrm{Re}(A_{1,k})\}/2, & 0 \leqq k < N, \\
a_{2N-k}^{2N} &= \{a_k^N - 2\mathrm{Re}(A_{1,k})\}/2, & 0 \leqq k < N, \\
a_N^{2N} &= a_N^N/2, &
\end{aligned}
\tag{22}
$$

と表わされる、このとき $p_{2N}(u)$ の補間点は $\omega_{2N+1}(u)=\omega_{N+1}(u)T_N(u)$ の零点である事実を用いている．以上の手続きを $N=2^n$ $(n=3,4,\cdots)$ と増して繰り返すことにより，数列 $\{p_8, p_{10}, p_{12}, \cdots\}$ が構成される．

実際上，次節で述べる誤差推定を利用して収束するまでは (19)，(20) および (21) の全てを計算することはしない．計算すべき値は (14) 式の $\{a_k^N\}$ と (15) 式で定義される $\{A_{l,k}\}$, $(l=3,4,5)$ $(0 \leq k < M)$ およびこれを用いて (16) と (22) で求められる $\{A_{1,k}\}$, $\{A_{2,k}\}$ と $\{a_k^{2N}\}$ である．(15) と (16) 式は倍々と点数を追加して次数を増す FFT の構成法の内部の一部分に相当している．したがって，以上の手法の計算量も通常の FFT を利用して倍々と点数を追加しながら再帰的にチェビシェフ展開列を構成する手間とほとんど同じである．

3．積分の誤差評価

$N=2^n$ と仮定する．チェビシェフ補間(3)の誤差は複素積分表示を用いて

$$g(u)-p_N(u)=\frac{\omega_{N+1}(u)}{2\pi i}\oint_{C_\rho} f(z)/\{(z-u)\omega_{N+1}(z)\}\,dz \quad , \qquad (23)$$

と表わされる．ここで積分路 C_ρ は複素平面内の実軸上の2点 $-1, 1$ を焦点とする楕円

$$C_\rho ; \quad |z+\sqrt{z^2-1}|=\rho \quad , \quad \rho>1$$

であって，その内部に $f(z)$ の極を含まぬようにとる．同様に

$$g(u)-p_{5N/4}(u)=\frac{1}{2\pi i}\omega_{N+1}(u)\{T_{N/4}(u)-\cos 2\pi\alpha_4\}\oint_{C_\rho} f(z)/$$

$$[(z-u)\omega_{N+1}(z)\{T_{N/4}(z)-\cos 2\pi\alpha_4\}]\,dz \quad , \qquad (24)$$

$$g(u)-p_{3N/2}(u)=\frac{1}{2\pi i}\omega_{N+1}(u)\{T_{N/2}(u)-\cos 2\pi\alpha_2\}\oint_{C_\rho} f(z)/$$

$$[(z-u)\omega_{N+1}(z)\{T_{N/2}(z)-\cos 2\pi\alpha_2\}]\,dz \quad . \qquad (25)$$

さて複素数 $z \notin [-1,1]$ に対して恒等式

$$1/(z-u)= 2/\pi \sum_{n=0}^{\infty}{}' \tilde{U}_n(z)T_n(u) \quad , \qquad (26)$$

ただし
$$\tilde{U}_n(z)=\int_{-1}^{1} T_n(u)/\{(z-u)\sqrt{1-u^2}\}\,du=\pi/\{w^n\sqrt{z^2-1}\}$$

$$w=z+\sqrt{z^2-1} \quad , \quad |w|>1 \quad , \qquad (27)$$

を(23)に代入すると

$$g(u)-p_N(u)=\omega_{N+1}(u)\sum_{n=0}^{\infty}{}' b_n^N T_n(u) \quad , \qquad (28)$$

をうる．ここで

$$b_n^N = \frac{1}{\pi^2 i}\oint_{C_\rho} \tilde{U}_n(Z) f(Z)/\omega_{N+1}(Z)\, dZ \quad , \qquad (29)$$

である．式(2)，(4)および(28)より $p_N(u)$ を用いた積分の誤差が

$$|I(x,y,c) - I_N(x,y,c)| \leqq 2\alpha[|\ln\alpha|+2]\sum_{n=0}^{\infty}{}'|b_n^N| \quad , \qquad (30)$$

となる．ここで $\int_\xi^\eta |\ln|u-\zeta||du \leqq 2$，$(-1\leqq\xi,\eta,\zeta\leqq1)$ を用いた．

簡単のため $f(Z)$ が楕円 C_ρ の外側にJ個の一位の極 Z_j $(j=1,2,\cdots,J)$ をもつ有理関数と仮定する．(29)の右辺の複素積分を実行して

$$b_n^N = -\frac{2}{\pi}\sum_{j=1}^{J}\tilde{U}_n(Z_j)\,\mathrm{Res}\,f(Z_j)/\omega_{N+1}(Z_j) \quad , \qquad (31)$$

ここで $\mathrm{Res}\,f(Z_j)$ は Z_j における留数である．したがって $r = \min_j|Z_j+\sqrt{Z_j^2-1}|\,(>1)$ とおくと ρ の上限は r となり $|b_n^N| \sim |b_0^N| r^{-n}$，これを(30)に代入すると

$$|I(x,y,c) - I_N(x,y,c)| \lesssim \alpha[|\ln\alpha|+2]\,|b_0^N|(r+1)/(r-1) \, . \qquad (32)$$

この $|b_0^N|$ を実際に計算されるチェビシェフ係数 a_n^N を用いて表わそう．Elliott[11] は

$$a_n^N = \frac{2}{\pi i}\oint_{C_\rho} T_{N-n}(Z) f(Z)/\omega_{N+1}(Z)\, dZ \quad , \qquad (33)$$

を示した．右辺の複素積分を実行し(31)と比較すると $|b_0^N| \sim |a_N^N|\, r/(r^2-1)$ であるから(32)より誤差推定として

$$|I(x,y,c) - I_N(x,y,c)| \lesssim \alpha[|\ln\alpha|+2]\,|a_N^N|\, r/(r-1)^2 \quad , \qquad (34)$$

がえられる．実際には，r は $\{a_n^N\}$ の漸近的振舞いから推定される．同様にして $p_{5N/4}(u)$，$p_{3N/2}(u)$ を用いた積分の誤差はそ

れぞれ

$$|I(x,y,c)-I_{5N/4}(x,y,c)| \lesssim 4\left(1+\cos\frac{\pi}{8}\right)\alpha[|\ln\alpha|+2]\,|a^{5N/4}_{5N/4}|\frac{r}{(r-1)^2}, \quad (35)$$

$$|I(x,y,c)-I_{3N/2}(x,y,c)| \lesssim 4\left(1+\cos\frac{\pi}{4}\right)\alpha[|\ln\alpha|+2]\,|a^{3N/2}_{3N/2}|\frac{r}{(r-1)^2}, \quad (36)$$

によって評価される.

誤差推定(34),(35)と(36)を比較することにより，チェビシェフ展開の次数が2のべきでない場合の誤差はそうである場合より因子3～4だけ悪いことがわかる．しかし，そのチェビシェフ展開の収束の速い滑らかな関数$f(t)$に対して，このことはほとんど問題にならないことを次節の数値例が示している．また誤差評価(34),(35)および(36)は特異点c，不定積分の上下限y，x（ただし$a \leqq x, y, c \leqq b$）に依存しないで，一様な上限を与えている．これは色々な下限，上限と特異点x_i，y_j，c_k（$1 \leqq i \leqq L$，$1 \leqq j \leqq M$，$1 \leqq k \leqq K$）の組に対して共通の誤差推定，したがって同一の次数の補間多項式を用いることができることを意味する．

4．数値例

次の5種類の異ったタイプの関数$f(t)$に対して積分(1)を計算し，Piessens ら[8]のプログラムQUADPACKと性能を比較した．対数特異点が端点および内点である場合についてそれぞれQUADPACK中のサブルーチンQAWSとQAGPを用いた．

QAGPは区間内の特異点の性質を対数と限定せず一般的である．そこで対数特異性に限定して本方法と性能を比較するとQAGPは不利になる．しかし特異点の位置の知識を利用しながら内点特異性を扱う能率的な自動積分法は他にないようなので，敢えてこのQAGPを比較の対象とした．QUADPACK中のプログラムの対象はいずれも定積分のみである．

i) $\int_{-1}^{1} e^{\alpha(t-1)} \ln|t-c|\,dt$,

ii) $\int_{-1}^{1} (t^2+\alpha^2)^{-1} \ln|t-c|\,dt$,

iii) $\int_{0}^{1} \cos 2\pi\alpha t \ln|t-c|\,dt$,

iv) $\int_{0}^{1} (1-\alpha^2)/(1-2\alpha t+\alpha^2) \ln|t-c|\,dt$, $|\alpha|<1$

v) $\int_{0}^{1} \sqrt{e^t-1} \ln|t-c|\,dt$.

問題 i)～v)の$f(t)$はそれぞれ，滑らか型，ピーク型，振動型，積分区間の外に特異点をもつ型および微係数が端点で特異な型である．積分 i), iii), iv)はパラメータαが大きい程困難な問題となる．積分 ii)は$|\alpha|$が小さい程難かしい．問題 i)～iv)に対し2種類の要求絶対精度の下でパラメータαを3通り変えて計算した結果を表1～4に示す．問題 v)の結果は表5に示される．各表において，色々な特異点cの値に対して本方法では，標本点を共通に一度計算するだけでよい．これらの表から滑らか型か振動型の$f(t)$をもつ積分に対して本方法の能率が高いことがわかる．また本方法は，色々な特

表1 $\int_{-1}^{1} e^{\alpha(t-1)} \ln|t-c|\,dt$ に対する本方法と QUADPACK[8] との性能比較

		$\varepsilon_a = 10^{-6}$				$\varepsilon_a = 10^{-10}$			
		本方法		QUADPACK		本方法		QUADPACK	
α	c	標本数	誤差	標本数	誤差	標本数	誤差	標本数	誤差
4	−1.0		1×10^{-12}	40+)	1×10^{-16}		1×10^{-12}	40+)	1×10^{-16}
	−0.2	17	2×10^{-13}	462	9×10^{-15}	21	3×10^{-16}	630	5×10^{-16}
	0.6		3×10^{-12}	462	2×10^{-14}		1×10^{-15}	630	2×10^{-14}
8	−1.0		1×10^{-12}	40+)	2×10^{-14}		6×10^{-13}	70+)	3×10^{-16}
	−0.2	21	2×10^{-11}	462	4×10^{-16}	25	5×10^{-14}	462	4×10^{-16}
	0.6		1×10^{-10}	462	2×10^{-13}		2×10^{-14}	630	3×10^{-15}
16	−1.0		1×10^{-10}	70+)	2×10^{-14}		3×10^{-13}	100+)	4×10^{-16}
	−0.2	25	3×10^{-9}	462	8×10^{-12}	33	2×10^{-15}	294	2×10^{-12}
	0.6		1×10^{-9}	462	1×10^{-13}		2×10^{-14}	630	2×10^{-16}

QUADPACK中 +) を付した数字は QAWS による標本数，その他は QAGP を用いた場合の標本数である．

表2 $\int_{-1}^{1} \ln|t-c| / (t^2+\alpha^2)\,dt$

		$\varepsilon_a = 10^{-6}$				$\varepsilon_a = 10^{-10}$			
		本方法		QUADPACK		本方法		QUADPACK	
α	c	標本数	誤差	標本数	誤差	標本数	誤差	標本数	誤差
1	−1.0		2×10^{-11}	40+)	8×10^{-13}		2×10^{-13}	40+)	8×10^{-13}
	−0.2	21	6×10^{-10}	462	1×10^{-13}	33	3×10^{-15}	630	4×10^{-16}
	0.6		5×10^{-9}	462	5×10^{-14}		2×10^{-14}	630	2×10^{-15}
1/4	−1.0		2×10^{-12}	100+)	7×10^{-11}		9×10^{-13}	170+)	7×10^{-13}
	−0.2	81	2×10^{-9}	546	2×10^{-13}	129	1×10^{-13}	714	1×10^{-13}
	0.6		5×10^{-10}	546	5×10^{-13}		4×10^{-15}	756	2×10^{-15}
1/8	−1.0		4×10^{-13}	230+)	2×10^{-13}		2×10^{-13}	230+)	2×10^{-13}
	−0.2	161	2×10^{-10}	630	1×10^{-12}	257	2×10^{-14}	798	7×10^{-15}
	0.6		2×10^{-9}	672	1×10^{-13}		5×10^{-15}	882	3×10^{-15}

表3 $\int_0^1 \cos 2\pi\alpha t \ \ln|t-c|\,dt$

		$\varepsilon_a=10^{-6}$				$\varepsilon_a=10^{-10}$			
		本方法		QUADPACK		本方法		QUADPACK	
α	C	標本数	誤差	標本数	誤差	標本数	誤差	標本数	誤差
8	0.0		2×10^{-13}	200+)	1×10^{-11}		1×10^{-13}	390+)	1×10^{-12}
	0.4	49	1×10^{-12}	546	3×10^{-13}	65	1×10^{-15}	756	7×10^{-16}
	0.8		6×10^{-12}	588	2×10^{-12}		5×10^{-16}	756	2×10^{-14}
16	0.0		7×10^{-14}	450+)	2×10^{-11}		6×10^{-14}	820+)	1×10^{-12}
	0.4	81	3×10^{-13}	630	2×10^{-11}	97	1×10^{-15}	1008	6×10^{-16}
	0.8		2×10^{-13}	798	4×10^{-12}		9×10^{-15}	966	7×10^{-15}
32	0.0		4×10^{-13}	940+)	2×10^{-11}		3×10^{-14}	1670+)	1×10^{-12}
	0.4	129	3×10^{-10}	924	1×10^{-11}	161	3×10^{-16}	1512	5×10^{-16}
	0.8		4×10^{-10}	1050	3×10^{-11}		1×10^{-15}	1386	2×10^{-15}

表4 $\int_0^1 \{(1-\alpha^2)/(1-2\alpha t+\alpha^2)\} \ln|t-c|\,dt$

		$\varepsilon_a=10^{-6}$				$\varepsilon_a=10^{-10}$			
		本方法		QUADPACK		本方法		QUADPACK	
α	c	標本数	誤差	標本数	誤差	標本数	誤差	標本数	誤差
0.8	0.0		6×10^{-14}	100+)	8×10^{-13}		1×10^{-14}	160+)	2×10^{-14}
	0.4	65	3×10^{-11}	504	1×10^{-11}	97	3×10^{-15}	798	3×10^{-15}
	0.8		6×10^{-11}	462	3×10^{-13}		1×10^{-14}	672	3×10^{-15}
0.9	0.0		3×10^{-14}	160+)	3×10^{-13}		8×10^{-15}	220+)	7×10^{-15}
	0.4	129	9×10^{-11}	756	4×10^{-12}	193	2×10^{-15}	966	3×10^{-16}
	0.8		2×10^{-10}	546	1×10^{-9}		4×10^{-14}	924	1×10^{-15}
0.95	0.0		7×10^{-15}	220+)	6×10^{-14}		9×10^{-16}	250+)	1×10^{-16}
	0.4	257	1×10^{-10}	1008	2×10^{-13}	385	3×10^{-15}	1218	1×10^{-15}
	0.8		2×10^{-10}	798	8×10^{-11}		2×10^{-14}	1092	3×10^{-15}

表5 $\int_0^1 \sqrt{e^t-1}\ \ln|t-c|\,dt$

	$\varepsilon_a=10^{-3}$				$\varepsilon_a=10^{-5}$			
	本方法		QUADPACK		本方法		QUADPACK	
c	標本数	誤差	標本数	誤差	標本数	誤差	標本数	誤差
0		2×10^{-9}	40+)	4×10^{-9}		1×10^{-13}	40+)	4×10^{-9}
0.4	65	1×10^{-6}	462	6×10^{-7}	513	3×10^{-9}	630	6×10^{-11}
0.8		3×10^{-6}	462	3×10^{-7}		2×10^{-9}	630	3×10^{-10}

異点や積分区間の上下限の値に対して一度に効率的に積分の近似値を与えることができる.

参考文献

1) Rabinowitz,P.: The Convergence of Interpolatory Product Integration Rules, BIT, Vol.26,No.1,pp.131-134 (1986).

2) Davis,P.J. and Rabinowitz,P.: Methods of Numerical Integration, Academic Press, Orlando (1984).

3) 長谷川武光, 鳥居達生: コーシーの主値積分に対する自動積分法, 情報処理学会論文誌, Vol.25, No.5, pp.857-863 (1984).

4) Luke,Y.L.: Algorithms for the Computation of Mathematical Functions, Academic Press, New York (1977).

5) Gentleman,W.M.: Implementing Clenshaw-Curtis Quadrature, II Computing the Cosine Transformation, Comm.ACM, Vol.15,No.5, pp.343-346 (1972).

6) 鳥居達生, 長谷川武光: 標本点数を低倍率で漸増させる実関数のＦＦＴ, 情報処理学会論文誌, Vol.24, No.3, pp343-350 (1983).

7) Bulirsch,R. and Stoer,J.: Handbook Series Numerical Integration : Numerical Quadrature by Extrapolation, Numer. Math. Vol.9, pp.271-278 (1967).

8) Piessens,R.,deDoncker,E., Überhuber,C.W. and Kahaner,D.K.: QUADPACK A Subroutine Package for Automatic Integration, Springer-verlag, Berlin (1983).

9) Hasegawa,T.,Torii,T. and Ninomiya,I.: Generalized Chebyshev

Interpolation and Its Application to Automatic Quadrature, Math.Comput., Vol.41,No.164,pp.537-553 (1983).

10)Clenshaw,C.W. and Curtis,A.R.: A Method for Numerical Integration on an Automatic Computer, Numer.Math.,Vol.2, No.4,pp.197-205 (1960).

11)Elliott,D.: Trancation Errors in Two Chebyshev Series Approximations, Math.Comput., Vol.9,pp.234-248 (1965).