

## On the genus of torus links

大阪工大 渋谷哲夫 (Tetsuo Shibuya)

$R^3$  に埋蔵された 2 つの solid tori  $V^*$ ,  $V$  の core を  $C^*$ ,  $C$  とする, ただし  $C^*$  は unknotted とする。  $V^*$  から  $V$  への faithful homeomorphism ( $V^*$  の longitude を  $V$  のそれに移す) を  $f$  とする。  $V^*$  の中の oriented link  $l^*$  に対し  $f(l^*)$  を  $l$  で表わす。特に  $l^* \subset \partial V^*$  のとき  $l^*$  を torus link,  $l$  を cable link (with a core  $C$ ) と言う。

torus knot  $k$  of type  $(p, q)$  の 3 次元 genus  $g(k)$  は次の形である。

定理 0 ([2])  $k$  を torus knot of type  $(p, q)$  とすると,  
 $g(k) = \frac{1}{2}(p-1)(q-1)$  で与えられる。

ここでこれを拡張した定理を証明する。

定理 1  $l$  を torus link of type  $(p, q)$  で  $l$  の各成分は同じ向きとする。  $p, q$  の最大公約数を  $d$  とすると,

$$g(l) = \frac{1}{2}\{(p-1)(q-1) - d + 1\}$$

で与えられる。

$l$  が knot のときは  $d=1$  だから定理 0 が導かれる。

定理1の証明のために次の3つの補題を準備する。

補題1  $l$  を torus link of type  $(p, np)$  で各成分は同じ向きとする (このような link を elementary torus link と呼ぶ)。そのとき  $g(l) = \frac{1}{2}(p-1)(np-2)$ 。

(証明)  $g(l) \leq \frac{1}{2}(p-1)(np-2)$  は link の genus の定義より明らか。すなわち、 $l$  に対し genus が  $\frac{1}{2}(p-1)(np-2)$  である曲面を構成すればよい。逆は [1] の定理 3.2 を使う。今  $\partial V^*$  の meridian を  $\mu$  とし  $L = pC^* \cup \mu$  とおく、ここで  $pC^*$  は  $p$  個の  $C^*$  と parallel で non-twisted な loops とする。そのとき  $L$  の Alexander polynomial は、

$$\Delta_L(t_1, \dots, t_p, t) = (t-1)^{p-1}$$

となるから定理 3.2 より

$$\Delta_l(t_1, \dots, t_p) = (t_1^n \cdots t_p^n - 1)^{p-1} (t_1 \cdots t_p - 1)^{-1}$$

で与えられる。したがって  $t_1 = \cdots = t_p = t$  とおいて、

$$\deg \Delta_l(t, \dots, t) = (p-1)np - p.$$

また  $l$  の reduced Alexander polynomial  $\Delta_l(t)$  の次数に関しては、次が成立する:

$$\begin{cases} \deg \Delta_l(t) = \deg \Delta_l(t, \dots, t) + 1 \\ \deg \Delta_l(t) \leq 2g(l) + p - 1 \end{cases}.$$

これより  $g(l) \geq \frac{1}{2}(p-1)(np-2)$  を得る。

次は明らかである。

補題2  $l$  を torus link of type  $(p, q)$  とする。  $p, q$  の最大公約数を  $d$  とするとき、  $l$  は cable link of type  $(d, \frac{pq}{d})$  with a core  $k$  which is a torus knot of type  $(\frac{p}{d}, \frac{q}{d})$  である。

$R^3$  の link  $L$  が decomposable とは  $L$  に disconnected な曲面が張れるときを言う。そのとき [2], [3] により次が成立する。

補題3  $V^*$  の link  $l^*$  が decomposable でないとする。  $M$  を  $V^*$  の meridian disk とし  $m, n$  を  $l^*$  と  $M$  のそれぞれ代数的、幾何的交点数とするとき、

$$g(l^*) + m g(c) \leq g(l) \leq g(l^*) + n g(c).$$

したがって特に  $m=n$  ならば、  $g(l) = g(l^*) + m g(c)$ 。

これらを使つて定理1を証明する。  $l$  を torus link of type  $(p, q)$  (これを  $l_{p, q}^*$  で表わす) とすると補題2より  $l$  は cable link of type  $(d, \frac{pq}{d})$  (これを  $l_{d, \frac{pq}{d}}$  で表わす) で各成分が同じ向きだから decomposable でない。しかも  $l_{d, \frac{pq}{d}}^*$  は elementary torus link になる。したがって

$$g(l) = g(l_{p, q}^*)$$

$$\begin{aligned}
&= g(l_d, \frac{p\beta}{\alpha}) && \text{(Lemma 2)} \\
&= g(l_d^*, \frac{p\beta}{\alpha}) + d g(k_{\frac{p}{\alpha}, \frac{\beta}{\alpha}}^*) && \text{(Lemma 3)} \\
&= \frac{1}{2}(d-1)(\frac{p\beta}{\alpha}-2) + \frac{d}{2}(\frac{p}{\alpha}-1)(\frac{\beta}{\alpha}-1) && \text{(Lemma 1)} \\
&= \frac{1}{2}\{(p-1)(\beta-1) - d + 1\}.
\end{aligned}$$

付記 河内氏により torus link の reduced Alexander polynomial を計算し定理1が証明できるのではないかといい指摘がありました。実際はそのとおりで次が成立します。

定理2  $l$  を torus link of type  $(p, \beta)$  で  $l$  の各成分は同じ向きとする。  $p, \beta$  の最大公約数を  $d$  とすると、  $l$  の reduced Alexander polynomial は次の形である:

$$\Delta_l(t) = \frac{(t^{\frac{p\beta}{\alpha}} - 1)^d (t-1)}{(t^p - 1)(t^\beta - 1)}.$$

(証明) 補題2より  $l = l_{p, \beta}^* = l_{d, \frac{p\beta}{\alpha}}$  であるから、

$$\Delta_l(t) = \Delta_{l_{p, \beta}^*}(t) = \Delta_{l_{d, \frac{p\beta}{\alpha}}}(t).$$

また [2], [3] により、

$$\Delta_{l_{d, \frac{p\beta}{\alpha}}}(t) = \Delta_{l_{d, \frac{p\beta}{\alpha}}^*}(t) \Delta_{k_{\frac{p}{\alpha}, \frac{\beta}{\alpha}}}(t^d).$$

ここで  $l_{d, \frac{p\beta}{\alpha}}^*$  は elementary torus link だから補題1の証明から、

$$\Delta_{l_{d, \frac{p\beta}{\alpha}}^*}(t) = \Delta_{l_{d, \frac{p\beta}{\alpha}}^*}(t, \dots, t) (t-1)$$

$$= (t^{\frac{pq}{a}} - 1)^{d-1} (t^d - 1)^{-1} (t-1) \quad \circ$$

また

$$\Delta_{k, \frac{p}{a}, \frac{q}{a}}(t^d) = \frac{(t^{\frac{pq}{a}} - 1)(t^d - 1)}{(t^p - 1)(t^q - 1)} \quad \circ$$

これから定理2を得る。

したがって  $\deg. \Delta_l(t) = (p-1)(q-1)$ 。故に

$$\begin{aligned} g(l) &\geq \frac{1}{2} \{ \deg. \Delta_l(t) - d + 1 \} \\ &= \frac{1}{2} \{ (p-1)(q-1) - d + 1 \}. \end{aligned}$$

逆の不等号は link の genus の定義より明らかでこれより定理1を得る。

### References

- [1] M. E. Kidwell: Orders of links and the Alexander polynomial, Ph. D. Dissertation, Yale Univ. (1976).
- [2] H. Schubert: Knoten und Vollringe, Acta Math. 90 (1953), 131-286.
- [3] T. Shibuya: On compound links, Kobe Math. Sem. Notes 11 (1983), 349-361.