数理解析研究所講究録
第 627 巻 1987 年 1-21

Brown運動と調和解析 I　— 解析射影について —

東北大理　新井　仁之（Hitoshi Arai）

D. L. Burkholder, R. F. Gundy, M. L. Silverstein [1] は、単位円板及び上半空間上の解析関数からなる Hardy 空間の最大関数による特徴づけを行なった。この特徴づけは、解析射影作用素の一つである Cauchy 射影の H^p–L^p 有界性を保障している。よく知られているように、Cauchy 射影の H^p–L^p 有界性の研究は、Hilbert 変換の H^p–L^p 有界性に帰着される。Burkholder-Gundy-Silverstein の結果は、この方向で、ただちに、C. Fefferman, E. M. Stein [2] により、Hilbert 変換の高次元化である Riesz 変換の H^p–L^p 有界性、さらには、より一般の特異積分作用素の H^p–L^p 有界性へと一般化されていった。

一方、Cauchy 射影自身は、関数論や、とりわけ偏微分方程式に現れる Commutator の研究との関連から、Cauchy 射影の定義されている曲線 — すなわち単位円周ならびに直線 — をより一般の曲線におきかえて一般化する研究が進められた。

その結果、1982年には、R. Coifman, A. McIntosh, Y. Meyer [3] が Lipschitz 曲線上の Cauchy 射影の Calderon-Zygmund 性を証明し、(その一つの帰結として) Lipschitz 曲線上の Cauchy 射影の H^p_{atom}-L^p 有界性も得られるに至った。

本稿では、Cauchy 射影以外の解析射影作用素の H^p-L^p 有界性を問題にする。

最初に、解析射影作用素の定義とその主な例をあげる：

$\mathbb{C}^n \supset D$ を有界領域で、D においては、Dirichlet 問題が解けているものとする。∂D を D の境界とし、

$$A(\partial D) := \{ f \in C(\partial D) : \ f \text{ の Dirichlet 問題の解は、D 上の正則関数になっている。} \}$$

とおく。さらに、∂D 上の正値測度 μ に対して、

$$H^p_A(\mu) \ (= H^p_A(\partial D, \mu)) := \text{“} A(\partial D) \text{ の } L^p(\mu) \text{-ノルム閉包”} \quad (1 \leq p < \infty)$$

$$H^\infty_A(\mu) \ (= H^\infty_A(\partial D, \mu)) := H^2_A(\mu) \cap L^\infty(\mu)$$

と表わす。

$L^2(\mu)$ 上の有界線形作用素が、$L^2(\mu)$ から $H^2_A(\mu)$ への解析射影とは、T が

(1.1) $T^2 = T$ (1.2) $\mathrm{Range}(T) = H^2_A(\mu)$

をみたすことである。たとえば、$L^2(\mu)$ から $H^2_A(\mu)$ の上への(唯一つの)直交射影作用素は、$L^2(\mu)$ から $H^2_A(\mu)$ への自己共役な解析射影になっている。以下、この解析射影を P_μ と表わ

すことにする。特に D が C^1 領域で、かつ μ が ∂D 上の Lebesgue 測度（i.e. area Hausdorff 測度）のとき、P_μ は、Szegö 射影と呼ばれている。

次に、Hardy 空間 H^p の定義を想起しておく：D を $\mathbb{R}^N$ 内の領域で、D においては、Dirichlet 問題が解けているものとする。ω を D の調和測度とし、μ を ∂D 上の正値測度で、$L^1(\mu) \subset L^1(\omega)$ をみたしているものとする。$f \in L^1(\mu)$ に対して f の Poisson 積分 $PI[f]$ が定義され、$PI[f]$ は D 上の調和関数になる。このとき、f の非接最大関数 $n(f)$ が次のように定義される：

$$n(f)(x) := \sup\{ |PI[f](z)| : z \in \Gamma(x) \} \qquad (x \in \partial D) \ ;$$

$$\Gamma(x) := \{ \zeta \in D : |\zeta - x| < 2\,\mathrm{dist}(\zeta, \partial D) \}.$$

また、D 上の調和関数 u に対しても

$$n(u)(x) := \sup\{ |u(z)| : z \in \Gamma(x) \} \qquad (x \in \partial D)$$

とする。

Hardy 空間の定義は、次のようになる：

$$H^p(\mu) \ (:= H^p(\partial D, \mu)) := \{ f \in L^1(\mu) : \|f\|_{H^p(\mu)} := \|n(f)\|_{L^p(\mu)} < \infty \}$$

$H^p(D, \mu) := \{ u : u$ は D 上の調和関数で、

$$\|u\|_{H^p(D,\mu)} := \|n(u)\|_{L^p(\mu)} < \infty \} \qquad (0 < p \leq \infty).$$

$H^p(\mu)$ 及び $H^p(D, \mu)$ については、特に $\mu = \omega$ あるいは、D が Lipschitz 領域の場合に、area Hausdorff 測度 σ に A_∞ 荷重

w を施したもの $\mu = w\sigma$ の場合が重要で、これらは、C. Kenig, U. Neri, E. Fabes ([4], [5]) らの詳細な研究がある。

本稿では、次の問題を考える：

「できるだけ一般の D と μ に対して、P_μ の L^p–L^p 有界性 ($1<p<\infty$) 及び H^p–L^p ($0<p\leqq 1$) 有界性を証明せよ。」

これに対して、すでに得られている結果を記しておく：

1° (M. Riesz, 1927 ; cf. [6]). $D=\{z\in\mathbb{C}: |z|<1\}$, $\mu :=$ "∂D 上の Lebesgue 測度" ならば、P_μ は L^p–L^p 有界 ($1<p<\infty$) である。すなわち、

$$\|P_\mu f\|_{L^p(\mu)} \leqq C_p \|f\|_{L^p(\mu)} \qquad (f\in L^p(\mu)\cap L^2(\mu);\ 1<p<\infty).$$

2° (1) (D. J. Newman, 1961 ; cf. [6]) D, μ を 1° と同じものとする。このとき、$L^2(\mu)$ から $H^2_A(\mu)$ への解析射影で L^1–L^1 有界であるものは存在しない。

(2) (W. Rudin, 1961 ; cf. [6]) D, μ を 1° と同じものとする。このとき、$L^2(\mu)$ から $H^2_A(\mu)$ への解析射影で L^∞–L^∞ 有界であるものは存在しない。

3° (T. Gamelin, G. Lumer, 1968 [7]) $D \subset \mathbb{C}$ が有界な有限連結領域で、μ が D の調和測度ならば、P_μ は L^p–L^p 有界 $(1<p<\infty)$ である。

注. Gamelin–Lumer は、この結果を抽象的な設定のもとで証明した。

4° (Burkholder, Gundy, Silverstein, 1971 [1]). D, μ は 1° と同じものとする。このとき、P_μ は H^p–L^p 有界 $(0<p\leq 1)$ である。

5° (R. Coifman, R. Rochberg, G. Weiss, 1976 [8]) $D=\{z\in\mathbb{C}^n : |z|<1\}$ $\mu=$ "∂D 上の Lebesgue 測度" ならば、P_μ は H^1–L^1 有界である。

6° (J. Garnett, R. Latter ; 1978 [9]) D, μ を 5° と同じにする。このとき、P_μ は H^p–L^p 有界 $(0<p\leq 1)$ である。

本稿での主要結果は、次の二つである。

定理 1. $\mathbb{C} \supset D$ が有界な有限連結領域で、かつ NTA 条件(*1) をみたしているとする。このとき、D の調和測度 μ に対して

P_μ は H^1–L^1 有界である。

定理2. $\mathbb{C}\supset D$ を有限連結な有界 C^3 領域とし、W を ∂D 上の C^1 級の荷重、σ を ∂D 上の area Hausdorff 測度とする。$\mu = W\sigma$ に対して、P_μ は、L^p–L^p 有界 $(1<p<\infty)$ かつ H^1–L^1 有界である。

(※1) NTA 条件は D. Jerison – C. Kenig [10] が導入した条件で、たとえば、D が有界 Lipschitz 領域ならば、NTA 条件をみたしている。NTA 条件については §2 に記した。

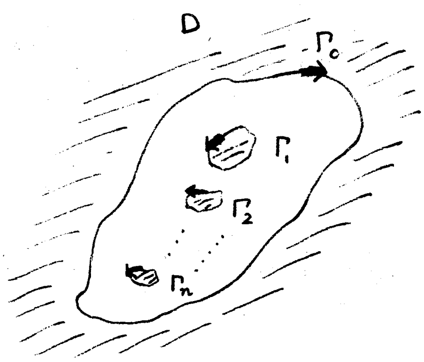
定理1 と定理2 の証明を以下のセクションで行なっていくが、その方法は、定理1については、Gamelin – Lumer [7] の方法と Burkholder – Gundy – Silverstein [1] の Brownian maximal function に関する結果を一般化することにより証明するという方法である。また、定理2は、調和測度 ω に対する P_ω と $\mu = W\sigma$ $(W\in C^1(\partial D), W>0)$ に対する P_μ との相互関係を求め、P_μ の有界性の問題を P_ω の有界性の問題に帰着させ、定理1 を用いるという方法をとる。

§1. $P_{W\sigma}$ と P_ω の関係式（定理2の証明の準備）([13]).

この § においては、D を $\mathbb{C}$ 内の有界な有限連結領域で、そ

の境界∂Dは、有限個の互いに交わらないC^3級の単純閉曲線からなるものとする。σを∂D上の area Hausdorff 測度としW_1, W_2を2つの∂D上のC^1級関数で、$w_1>0$, $w_2>0$とする。以下、$m_0=\sigma$, $m_1=W_1\sigma$, $m_2=W_2\sigma$と表わす

∂Dを構成するC^3級の単純閉曲線を$\Gamma_0,\dots,\Gamma_n$とし、各Γ_kの長さをl_kとする。ただし、Γ_0は、$\mathbb{C}\setminus D$の非有界成分の境界になっているものとし、Γ_0を正の向き、$\Gamma_1,\dots,\Gamma_n$を負の向きにとる。



このとき、各Γ_kは、単位接ベクトルをもつ曲線α_kで表わされる:

$$\Gamma_k := \left\{ \alpha_k(s) : s \in \left[\sum_{d=0}^{k} l_{d-1}, \sum_{k=0}^{k+1} l_{d-1} \right) \right\}$$

(但し、$l_{-1}=0$とする)。

簡単のため、$I_k = \left[\sum_{d=0}^{k} l_{d-1}, \sum_{=0}^{k+1} l_{d-1} \right)$とおき、

$$\alpha(s) := \begin{cases} \alpha_0(s) & s \in I_0 \\ \vdots & \\ \alpha_n(s) & s \in I_n \end{cases}$$

とおく。α は $I=[0,\sum_{d=0}^{n+1} l_{d-1})\ (=I_0\cup\cdots\cup I_n)$ をパラメータの範囲とする曲線で、∂D を構成するものである。

この表記のもとで、Cauchy 核 $K(\cdot,\cdot)$ は次のように表される：

$$K(s,t):=\frac{D_+\alpha(t)}{\alpha(t)-\alpha(s)} \qquad (s,t)\in I\times I\setminus\{\text{diagonal}\}$$

但し、ここで、D_+ は右側微分作用素である。従って、Cauchy 射影 H は

$$Hf(x):=\frac{1}{2}f(x)+\frac{1}{2\pi i}\,\mathrm{P.V.}\int_I K(\alpha^{-1}(x),t)\,f(\alpha(t))\,dt \quad (x\in\partial D)$$

となる。

まず、次の Kerzman-Stein の定理の拡張からはじめる：

定理 KS (Kerzman-Stein [11]). $n=0$ (i.e. D が単連結) とする。さらに、D は C^∞ 級とする．H^* を H の $L^2(\sigma)$ での共役作用素とする。このとき、

(1) H^*-H は滑らかな積分核をもつ積分作用素であり、

(2) $I-H^*+H$ は $L^2(m_0)$ から $L^2(m_0)$ への全単射有界作用素でかつ

$$P_{m_0}=H(I-H^*+H)^{-1}$$

である。

この定理を一般化することにより、定理2における P_μ と調和測度 ω に対する P_ω の間の関係式を求める。そのためには次の三点を一般化すればよい。

① D を定理2に定める領域におきかえる.

② P_{m_0} と H の関係式ではなく、P_{m_j} と P_{m_k} $(j \neq k)$ の間の関係式を求める

③ $L^2(m_0)$ の設定から $H^p(m_k)$ $(1 \leq p)$ の設定に移す。

以上の点を改良した定理として次を得る：

<u>定理2′.</u>　以下、記号は本手冒頭で定めたものとする。

$$a_j(s,t) := -\overline{K(t,s)}\, W_j(t)\, W_j(s)^{-1} - K(s,t) \qquad (s,t) \in I \times I \setminus \{\text{diagonal}\}$$

$(j=0,1,2)$ とおく。但し、ここで、$\overline{}$ は複素共役とし、$W_0 \equiv 1$ とおく。このとき、

(1) 各 a_j は、$I \times I$ 上で定義された関数 A_j で、$A_j(\alpha^{-1}(\cdot), \alpha^{-1}(\cdot)) \in C(\partial D \times \partial D)$ なるものに拡張される.

(2)
$$A_j f(x) := \frac{1}{2\pi i} \int_I A_j(\alpha^{-1}(x), t) f(\alpha(t))\, dt \qquad (f \in L^1(m_j))$$

とおく。このとき、$I - A_j$ は、$H^1(m_j)$ から $H^1(m_j)$ への全単射有界線形作用素であり、

(3) $$P_{m_j} = P_{m_{j+1}} (I - A_{j+1})(I - A_j)^{-1} \qquad (j=0,1)$$

である。

証明．(1) $g(s,t) := -\overline{K(t,s)} - K(s,t)$，

$$r_j(s,t) := A_j(s,t) - g(s,t)$$

とおく。このとき，

$$r_j(s,t) = W_j(s)^{-1}(W_j(s) - W_j(t))\overline{K(t,s)}$$

となっている。定理KSの証明と同様にして，$g(s,t)$ がある $Q(\alpha^{-1}(\cdot), \alpha^{-1}(\cdot)) \in C(\partial D \times \partial D)$ なる $I \times I$ 上の関数 $Q(\cdot,\cdot)$ に拡張できることが証明できる。従って，問題は，$r_j(\cdot,\cdot)$ を拡張することである。しかし，W_j の C^1 性より，r_j の拡張は，$(W_j(s) - W_j(t))K(t,s)$ の拡張ができるか否かに帰着される。そこで，

$$F_j(s,t) := \begin{cases} \dfrac{W_j(s) - W_j(t)}{s - t} & s \neq t \\[2ex] D_+ W_j(t) & s = t \end{cases}$$

$$G(s,t) := \begin{cases} \dfrac{\alpha(s) - \alpha(t)}{s - t} & s \neq t \\[2ex] D_+ \alpha(t) & s = t \end{cases}$$

とおく。このとき，

$$(W_j(s) - W_j(t))K(t,s) = D_+\alpha(s) \cdot \frac{F_j(s,t)}{G(s,t)} \qquad (s \neq t)$$

であり、W_j 及び α の C^1 性より、

$$F_j(\alpha^{-1}(\cdot), \alpha^{-1}(\cdot)) \in C(\partial D \times \partial D), \quad G(\alpha^{-1}(\cdot), \alpha^{-1}(\cdot)) \in C(\partial D \times \partial D)$$

& $G(s,t) \neq 0 \quad {}^\forall(s,t)$

である。（(1)の証明・終）.

(2) まず、次の事実に注意する：

「Banach 空間 X 上のコンパクト作用素 T に対して、

I−T の指数は 0 である。すなわち、

$$\dim \ker (I-T) = \operatorname{codim} \operatorname{Range} (I-T). \quad 」 \quad (\text{cf. } [12])$$

このことから、(2) は、次の二つのことの証明に帰着される：

(i) A_j は $H^1(m_j)$ から $H^1(m_j)$ へのコンパクト作用素である.

(ii) $\operatorname{Range}(I - A_j) = H^1(m_j)$

さて、(i)であるが、これは、(1) の直接の結果である。実際、(1) と一般化された Stone-Weierstrass の定理(後注1) より、A_j は、有限階作用素で近似される.

(ii)の証明のため、記号の準備をする。Banach空間 X に対し

$$B(X) := \{ X \text{ から } X \text{ への有界線形作用素の全体} \}$$

とする。

$T \in B(H^1(m_j))$ に対して、$(T)_{m_j}$ で T の共役作用素を表わし、$T \in B(L^2(m_j))$ に対して、$(T)_{L_j}$ によって、T の $B(L^2(m_j))$ での共役作用素を表わす。また、$T \in B(H^1(m_j))$ に対して、

$$R(T) := \{ Tf : f \in H^1(m_j) \}$$

とおく。

さて、A_j のコンパクト性から、$R(I-A_j)$ が $H^1(m_j)$ の閉部分空間であることがわかる。従って、閉値域定理により、

$$R(I-A_j) = \{ g \in H^1(m_j) : \quad \forall g^* \in \ker (I-A_j)_{m_j} \text{ に対して、} \\ g^*(g) = 0 \quad \}$$

となっている。これより、

$$R(I-A_j) = H^1(m_j) \qquad \Longleftrightarrow \qquad \ker (I-A_j)_{m_j} = \{0\}$$

である。以下、右側の命題の証明を行う。

<u>補題 1</u>　$\forall g^* \in H^1(m_j)^*$ ($:=$ "$H^1(m_j)$ の共役空間), $\forall g \in L^2(m_j)$:

$$[(A_j)_{m_j}(g^*)](g) = \int g \cdot \overline{H(b(g^*))}\, dm_j - \int g \cdot \overline{(H)_{L_j}(b(g^*))}\, dm_j$$

但し、ここで、$b(g^*)$ は g^* を定める唯一つの BMO 関数である。

証明．計算により、$\forall h \in L^2(m_j)$ に対して、

$$(H)_{L_j}(h)(x) = \frac{1}{2}h(x) - \frac{1}{2\pi i}\, \mathrm{P.V.}\int_I \overline{K(t,\alpha^{-1}(x))}\, W_j(t)\, W_j(\alpha^{-1}(x))^{-1} h(\alpha(t))\, dt$$

($x \in \partial D$) となることが示せる。ゆえに、

$$A_j(h) = (H)_{L_j}(h) - H(h)$$

である。従って、

$$[(A_j)_{m_j}(g^*)](g) = \int (H)_{L_j}(g)\cdot\overline{\theta(g^*)}\,dm_j - \int H(g)\cdot\overline{\theta(g^*)}\,dm_j$$

$$= \int g\cdot\overline{H(\theta(g^*))}\,dm_j - \int g\cdot\overline{(H)_{L_j}(\theta(g^*))}\,dm_j$$

（補題1の証・終）

（(2)の証明の続き）

$\forall g^* \in \ker(I-A_j)_{m_j}$ をとる。任意の $g \in L^2(m_j)$ に対して、

$$0 = [(I-A_j)_{m_j}(g^*)](g)$$

$$= g^*(g) - \int g\cdot\overline{H(\theta(g^*))}\,dm_j + \int g\cdot\overline{(H)_{L_j}(\theta(g^*))}\,dm_j$$

$$= \int g\cdot\overline{[I-H+(H)_{L_j}](\theta(g^*))}\,dm_j$$

である。ゆえに、

$$\theta(g^*) = [H-(H)_{L_j}](\theta(g^*))$$

となっている。この等式から、次が得られる：

$$\|\theta(g^*)\|^2_{L^2(m_j)} = \int [H-(H)_{L_j}](\theta(g^*))\cdot\overline{\theta(g^*)}\,dm_j$$

$$= 2i\,\mathrm{Im}\left\{\int H(\theta(g^*))\cdot\overline{\theta(g^*)}\,dm_j\right\}$$

すなわち、$\|\theta(g^*)\|_{L^2(m_j)} = 0$ である。よって、

$\ker(I-A_j)_{m_j} = \{0\}$ となることが証明された。　（(2)の証・終）

(3)　H は $L^2(m_j)$ から $H^2_A(m_j)$ への解析射影である。(cf. [13])。

従って、$P_{m_j}H = H$, $P_{m_j}(H)_{L_j} = (HP_{m_j})_{L_j} = (P_{m_j})_{L_j} = P_{m_j}$ である。ゆえに、$P_{m_j}(I + H - (H)_{L_j}) = H$ である。

また、$I + H - (H)_{L_j} = I - A_j$ であるから、(2) と同じ証明により、$I - A_j$ は $L^2(m_j)$ から $L^2(m_j)$ への全単射有界線形作用素にもなっている。すなわち、

$$P_{m_j} = H(I - A_j)^{-1}$$

である。同様に、$P_{m_{j+1}} = H(I - A_{j+1})^{-1}$ であるから、結局、

$$P_{m_j} = P_{m_{j+1}}(I - A_{j+1})(I - A_j)^{-1}$$

となる ((3) の証明・終)。

定理2′は、$H^1(m_j)$ の設定によるものであるが、定理2′の L^p version ($1<p<\infty$) も同様にして得ることができる。このことから、結局次のことが示せる：

系1. 記号は、すべて定理2′と同じものとする。このとき、$1 \leqq p < \infty$, $p \neq 2$ に対して、次の (1)〜(4) は互いに同値である：

(1) $\|Hf\|_{L^p(m_j)} \leqq C_p \|f\|_{H^p(m_j)}$, $\forall f \in H^p(m_j) \cap L^2(m_j)$

(2) $\|P_{m_0}f\|_{L^p(m_j)} \leqq C_p \|f\|_{H^p(m_j)}$, $\forall f \in H^p(m_j) \cap L^2(m_j)$

(3) $\|P_{m_1}f\|_{L^p(m_j)} \leqq C_p \|f\|_{H^p(m_j)}$, $\forall f \in H^p(m_j) \cap L^2(m_j)$

(4) $\|P_{m_2}f\|_{L^p(m_j)} \leqq C_p \|f\|_{H^p(m_j)}$, $\forall f \in H^p(m_j) \cap L^2(m_j)$

§2. NTA領域上の H^p （定理1の証明の準備）

NTA領域（Non-tangentially accessible domain）の概念は、1982年に、D. Jerison, C. Kenig [10] が導入したものである。これは、E. M. Stein による問題「Non-tangential behavior が意味をもつような最も一般的な領域への古典解析学の理論の一般化」に対する1つの解答を与えるためのものであり、実際、現時点では、NTA領域が古典解析学を展開できる最も一般的な領域の一つと考えられているようである。

定義（Jerison-Kenig [10]）$D \subset \mathbb{R}^N$ $(N \geq 2)$ を有界領域とする。$M > 1$, $r_0 > 0$ に対して、D が (M, r_0)-NTA領域とは、D が次の条件 —— NTA条件 —— をみたすことである：

(I) — Corkskrew condition — $0 < {}^\forall r < r_0$, ${}^\forall \xi \in \partial D$, ${}^\exists a = a(r, \xi) \in D$:

$$\frac{r}{M} < |a - \xi| < rM, \quad dist(a, \partial D) > \frac{r}{M}.$$

(II) $\mathbb{R}^N \setminus D$ に対しても Corkskrew condition が成立する。

(III) — Harnack chain condition — $x_1, x_2 \in D$, $dist(x_j, \partial D) \geq \varepsilon$, $|x_1 - x_2| < 2^k \varepsilon$ $(\varepsilon > 0, k \in \mathbb{N}, j = 1, 2)$ に対して、次をみたす Mk 個の ball $B_j \subset D$ が存在する：

(i) x_1 は B_1 の中心，x_2 は B_{Mk} の中心

(ii) $B_j \cap B_{j+1} \neq \phi$ $\quad 1 \leq j \leq Mk - 1$

(iii) $\frac{1}{M} diam\, B_j \leq dist(B_j, \partial D) \leq M\, diam\, B_j$

$$\& \quad \mathrm{diam}\, B_j \geq \frac{1}{M} \mathrm{dist}\,(x_i, \partial D) \qquad (j=1,\cdots, M_k\,;\ i=1,2).$$

D がある $M>1$, $r_0>0$ に対して、(M, r_0)- NTA領域になっているとき、D を NTA 領域と呼ぶ。

NTA 領域と古典的領域との関係は、次の通りである.

- 有界 Lipschitz領域 $\Longrightarrow$ 有界 Zygmund 領域 $\Rightarrow$ NTA領域 $\Longrightarrow$ Dirichlet 問題が解ける領域 (cf. [10])
- Quasisphere $\Rightarrow$ NTA領域 (cf. [10])

定理1の証明のため、Burkholder-Gundy-Silverstein [1] の Brownian maximal function に関する単位円板上での結果を、NTA領域にまで一般化しておく。

以下、$\mathcal{D} \subset \mathbb{R}^N$ $(N \geq 2)$ を NTA 領域とし、ω^z を $z \in \mathcal{D}$ と $\mathcal{D}$ に関する調和測度とし、任意に $z_0 \in \mathcal{D}$ をとり固定し、$\omega = \omega^{z_0}$ とおく。$\{B_t\}$ を z_0 を出発点とする N 次元 Brown 運動とし、$\{B_t\}$ が定義されている完備確率空間を $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ によって表わす。Burkholder-Gundy-Silverstein の結果の一般化は次のものである:

定理1′ ([14]) $\mathcal{D}$ 上の調和関数 u に対して、

$$\|u\|_{H^p(\mathcal{D},\omega)} \approx \Big\| \sup_{0\leq t<\tau} |u(B_t)| \Big\|_{L^p(\Omega,\mathcal{F},P)} \qquad 1 \leq p \leq \infty$$

但し、ここで、≈はノルムの同値性を表わす記号であり、
$\tau = \inf\{t > 0 : B_t \notin \mathcal{D}\}$ である。

定理1′の $p<1$ への一般化については、[15] を準備中である。また、定理1′を non-tangential maximal function と Brownian maximal function の分布の比較に一般化することについても [15] を参照されたい。

§3. 定理1、定理2の証明([13]).

(定理1の証明) Gamelin-Lumer [7] より、

$$L^2(\omega) = H^2_A(\omega) \oplus \overline{H}^2_{A,0}(\omega) \oplus N$$

である。但し、$\overline{H}^2_{A,0}(\omega) = \{\bar{f} : f \in H^2_A(\omega), \int f\,d\omega = 0\}$ であり、N は $C(\partial D)$ のある有限次元部分空間である。$Re(A(\partial D)+N)$ $= \{Re f : f \in A(\partial D)+N\}$ とする。$f \in Re\, A(\partial D)$ に対して、$^*f \in C(\partial D)$ を $f + i\,^*f \in A(\partial D)$ & $\int {}^*f\,d\omega = 0$ となるようにとれる(このようなとり方は一意的である)。そこで、

$$T : Re(A(\partial D)+N) \ni f + g \longmapsto {}^*f \in C(\partial D)$$

なる作用素を考える。定理1′と Cauchy-Riemann の関係式、及び $\dim N < \infty$ より、

$$\|Tf\|_{L^p(\omega)} \leqq C_p \|f\|_{H^p(\omega)} \qquad (1 \leqq p < \infty)$$

である。さて、Melgelyan の近似定理 (cf. [16]) より、

$Re(A(\partial D)+N)$ は、$L^2_R(\omega)=\{f\in L^2(\omega): f$ は実数値$\}$ でノルム稠密である。すなわち、T は $L^2_R(\omega)$ 上の有界線形作用素に一意的に拡張できる。以下、T は $L^2_R(\omega)$ 上の有界線形作用素とする。今、$S=\frac{1}{2}(I+iT)$ とおき、これを複素化して、$L^2(\omega)$ 上の作用素とみると、S は $L^2(\omega)$ から $H^2_A(\omega)$ への自己共役な解析射影になっていることが容易にチェックできる。$L^2(\omega)$ から $H^2_A(\omega)$ への自己共役な解析射影は、直交射影に他ならない。従って、$S=P_\omega$ となり、求める結果が得られた。

(定理2の証明)　ω の evaluated point を $z_0\in D$ とする。G を D の Green 関数とすると、

$$d\omega(y)=-\nu_y G(z_0,y)\,d\sigma(y)$$

(ν は ∂D 上の外法線 vector 場)となることが知られている(cf. [17])。偏微分方程式の boundary regularity に関する良く知られた結果 (cf. [18, 6.4]) より、$G(z_0,\cdot)\in C^2(\partial D)$ すなわち、$W_1(t):=-\nu_{\alpha(t)}G(z_0,\alpha(t))$ とおくと、W_1 が C^1 級であることがわかる。$W_1>0$ である。$W_2=W$ とおいて、系1を定理1とともに用いれば、定理2が得られる。

§ Appendix.

定理2′及び定理KSに関連して、次のような定理も証明され

る。証明は、定理2′と同様の方法を使えばよい：

定理2″. Xを複素Hilbert空間とし、MをXの閉部分空間とする。PをXからMの上への直交射影、TをXからMの上への有界射影で、T^*-Tがコンパクトであるものとする（H^*はHの共役作用素）. このとき、

$$P=T(I+T-T^*)^{-1}$$

である.

[後注1]（p.11） 一般化されたStone-Weierstrassの定理とは「Sをコンパクト Hausdorff空間とし、AをC(S)の部分環で、$A\ni 1$, $A\ni f \Rightarrow \bar{f}\in A$（$-$は複素共役）なるものとする。このとき、AはC(S)において、上限ノルム（$\|f\|=\sup_S|f|$）による位相に関して稠密である」（cf. [16]）.

参考文献

[1] D. L. Burkholder, R. F. Gundy and M. L. Silverstein, A maximal function characterization of the class H^p, Trans. Amer. Math. Soc. 157 (1971), 137-153.

[2] C. Fefferman and E. M. Stein, H^p spaces of several variables, Acta Math. (1972), 137-193.

[3] R. R. Coifman, A. McIntosh and Y. Meyer, L'integrale de Cauchy sur les courbes lipschiziennes, Ann. of Math. 116 (1982), 361-387.

[4] C. Kenig, Weighted Hardy spaces on Lipschitz domains, Amer. J. Math. 102 (1980), 129-163.

[5] E. Fabes, C. Kenig and U. Neri, Carleson measures, H^1 duality and weighted BMO in non-smooth domains, Indiana J. Math. 30 (1981), 547-581.

[6] K. Hoffman, Banach Spaces of Analytic Functions, Prentice Hall, Englewood Cliffs, New York, 1962.

[7] T. Gamelin and G. Lumer, Theory of abstract Hardy spaces and the universal Hardy class, Adv. in Math. 2 (1968), 118-174.

[8] R. R. Coifman, R. Rochberg and G. Weiss, Factorization theorems for Hardy spaces of several complex variables, Ann. of Math. 103 (1976), 611-635.

[9] J. B. Garnett and R. H. Latter, The atomic decomposition for Hardy spaces in several complex variables, Duku Math. J. 45 (1978), 815-845.

[10] D. S. Jerison and C. E. Kenig, Boundary behavior of harmonic functions in non-tangentially accessible domains, Adv. in Math. 46 (1982), 81-147.

[11] N. Kerzman and E. M. Stein, The Cauchy kernel, the Szego kernel, and the Riemann mapping function, Math. Ann. 236 (1978), 85-93.

[12] A. E. Taylor and D. C. Lay, Introduction to Functional Analysis, John Wiley & Sons, New York, 1980.

[13] H. Arai, Bounded projections onto holomorphic Hardy spaces on planer domains, Tohoku Math. J., to appear.

[14] H. Arai, Brownian motion and the Hardy space H^1 on non-tangentially accessible domains, Sci. Res. School of Education, Waseda Univ. 34 (1985), 21-29.

[15] H. Arai, Brownian motion and harmonic functions in non-smooth domains, in preparation.

[16] 竹之内，阪井，貴志，神保， 関数環， 培風館， 1977.

[17] S. G. Krantz, Function Theory of Several Complex Variables, Wiley & Sons New york, 1982.

[18] D. Gilberg and N. S. Trudinger, Elliptic Partial Differential Equations of Second Order, Springer, Berlin, Heidelberg, New york, 1983.